D. DRĂGHICESCU
AL. LEONTE
G. VRACIU

GHID

de pregătire la matematică pentru concursul de admitere în învățămîntul superior

scrisul românesc

Prof. dr. D. DRĂGHICESCU Prof. dr. G. VRACIU
Lector dr. AL. LEONTE

GHID
de pregătire la matematică

pentru concursul de admitere în învățămîntul superior



EDITURA SCRISUL ROMÂNESC
Craiova, 1976

PREFAȚĂ

Matematica, prin diferitele sale discipline, ocupă un loc central în întregul sistem formativ pentru marea majoritate a specialiștilor care lucrează în industrie, economie și în organele de decizie socială. Organizarea învățămîntului pe trei nivele — elementar, mediu și superior (în acesta din urmă pot fi incluse și formele învățămîntului postuniversitare) — determină necesitatea luării unor măsuri de racordare a cunoștințelor de matematică la trecerea de la un nivel la altul și aceste măsuri trebuie să aibă un caracter specific pentru diferitele specializări tehnice, economice, de învățămînt etc. Trecerea cea mai dificilă între nivele este, fără îndoială, cea dintre liceu și facultate, fiind afectată în multe țări, între care și în țara noastră, de un caracter marcat selectiv în funcție de specificul gnoseologic și social al diferitelor specialități din învățămîntul superior. În forma actuală de selecție a candidaților care bat la porțile învățămîntului superior — aceea a concursului de admitere —, majoritatea acestor candidați se confruntă în mod decisiv cu diferitele discipline matematice și se poate afirma că multe nereușite se datoresc acestor discipline.

Din aceste motive, în practica sistemului nostru de admitere a apărut o fază specifică de mare intensitate nervoasă, anume aceea a pregătirii pentru concursurile de admitere. În această fază care se întinde, pentru foarte mulți candidați, pe întreaga durată a ultimului an de studii liceale, avînd în cadrul ei un interval de încordare maximă în lunile aprilie, mai, iunie și iulie din fiecare an, se recapitulează toate cunoștințele de liceu și se efectuează chiar un „antrenament" pentru problemele de concurs. Există în momentul de față probleme de matematică tipice pentru concursurile de admitere și specifice pentru fiecare tip de facultate, chiar pentru fiecare facultate în parte. Caracterul tipic al acestor probleme este determi-

nat, mai întîi, de necesitatea de a se realiza într-o perioadă scurtă de timp o testare și o verificare a aptitudinilor pentru matematică și a învățămîntului de informație matematică pe care le posedă fiecare dintre miile de candidați ce se prezintă la concursurile de admitere.

În al doilea rînd, caracterul tipic al acestor probleme este generat de necesitatea de a ordona și tria candidații, în funcție de nevoile de învățămînt ale fiecărei facultăți sau tip de facultate, astfel ca admiterea în facultate să fie coerentă cu normele de echitate ale societății socialiste în care trăim și lucrăm.

În al treilea rînd, acest caracter tipic este dat de necesitatea explicit formulată ca problemele de concurs să nu depășească în nici-un sens cadrul fixat de programa analitică de concurs, pentru fiecare tip de facultate, și anume tematica lor să fie inclusă în mulțimea cunoștințelor transmise elevilor în liceu.

Ca principiu, metodele și mijloacele de pregătire pentru concursul de admitere trebuie să țină seama, în mod obligatoriu, de specificul problemelor care se propun la concurs și să îmbine antrenarea aptitudinilor pentru studiul matematicii cu sistematizarea și completarea cunoștințelor de matematică pînă la nivelul programei analitice de concurs. Există în aceste programe analitice unele capitole legate, în special, de tehnica calculelor numerice care, de regulă, nu se includ în problemele de concurs datorită faptului că problemele din aceste capitole necesită în cursul rezolvării lor unele tabele matematice care conțin și alte formule utile ce trebuie cunoscute de către candidați. Din această cauză, în pregătirea pentru concurs, fără a elimina cu totul asemenea capitole, este recomandabil să li se acorde o pondere relativ mai mică.

Ținînd seama de aceste principii, prezentul ghid de pregătire urmărește în linii mari să se constituie ca mijloc independent pentru pregătirea candidaților ce se prezintă la concursurile de admitere de la facultățile de matematică, tehnice, de fizică, chimie și economice. Materialul cuprins în acest ghid este sistematizat pe capitole și paragrafe, care reflectă atît programele analitice cele mai dezvoltate cît și specificul problemelor de concurs. Înlănțuirea paragrafelor urmărește structura logică a materialului din fiecare capitol, iar în interiorul lor se urmărește o anumită gradare a problemelor după dificultatea de rezolvare. Sigur că această gradare poate apărea unora dintre cei ce o vor utiliza ca avînd o anumită doză de subiectivism, însă subliniem că nici nu se poate pretinde realizarea unei ordonări a problemelor după dificultate, care să fie unanim acceptată. Tot în scopul gradării materialului prezentat în paragrafele cu soluții, primele probleme au soluții mai detailate, în timp ce spre sfîrșitul paragrafelor multe probleme au în locul soluțiilor doar indicații de rezolvare.

Ghidul de față este mai mult decît o culegere de probleme. În introducerea fiecărui paragraf de enunțuri este prezentată o scurtă apreciere asupra ponderii pe care problemele de acel tip o au în concursurile de admitere, asupra greșelilor celor mai frecvente ce se fac de către candidați, cît și asupra dificultății relative a problemelor respective în contextul matematicii privită ca ansamblu. Sigur că aceste introduceri și aprecieri se pot face și mai bine, în sensul de a fi mai utile celor care le citesc, forma lor concretă din acest ghid fiind determinată de necesități de spațiu tipografic și de un anume raport între introducere și dificultate de rezolvare a problemelor cuprinse în paragraful respectiv.

De asemenea, înaintea primului capitol am inserat o introducere în care se analizează modalitățile de pregătire pentru un concurs de admitere.

În textele părții a doua a cărții — partea cu soluții —, se găsesc unele referiri la alte probleme cărora li se indică numărul în paranteze. În cazul că problema face parte din alt capitol, indicația de referință, din paranteze, este formată din trei numere, primul fiind numărul capitolului, al doilea al paragrafului și al treilea al exercițiului. Dacă problema face parte din același capitol, indicația conține două numere, primul fiind numărul paragrafului, iar al doilea cel al problemei. Dacă problema face parte din același paragraf, indicația este formată dintr-un singur număr și anume numărul problemei.

Capacitatea de a rezolva în mod independent problemele propuse în acest ghid de către cei ce se pregătesc pentru un concurs de admitere atestă o pregătire foarte bună și poate garanta reușita la probele de matematică ale oricărui concurs. Celor care vor utiliza soluțiile și indicațiile date de către autori, le recomandăm ca, în primul rînd, să se intereseze și să rețină metodele de rezolvare, ci nu rezolvările concrete în amănunt pentru fiecare problemă, cu alte cuvinte, să-și educe mai întîi capacitatea de înțelegere și de reconstituire a soluțiilor ci nu capacitatea de memorizare mecanică a lor.

Unele din problemele propuse în ghidul de față mai fac parte și din alte culegeri de probleme, indicate de către noi la bibliografie dar care de regulă sînt mai greu accesibile unui număr mai mare de candidați. În orice caz, prezentarea lor într-un anume loc al ghidului nostru le atribuie un anumit grad de dificultate și le integrează în unitatea pedagogică a ghidului iar soluțiile pe care le prezentăm atribuie acestor probleme un anume grad de prelucrare personală.

AUTORII

INTRODUCERE

Scopul prezentei introduceri este acela de a înfăţişa cîteva din părerile autorilor asupra următoarelor probleme :

1. Cum trebuie efectuată o pregătire corectă pentru concursul de admitere ;

2. Care sînt criteriile unei bune pregătiri.

1. Pregătirea pentru concursul de admitere se efectuează, de regulă, în timpul ultimului an de studii liceale, paralel cu studiul materiei de clasa a XII-a (anul IV) şi în ultima perioadă, degajată de acest studiu. În general, matematica este o ramură a ştiinţei cu o structură complexă, în care cunoştinţele se acumulează şi se sistematizează într-o ordonare destul de strictă, care presupune o integrare treptată a cunoştinţelor anterioare în procesul acumulării de noi cunoştinţe. Pentru a exemplifica această idee semnalăm că fără deprinderi de calcul, bine dezvoltate, de algebră elementară şi trigonometrie (identităţi, ecuaţii, proprietăţi ale polinoamelor şi funcţiilor raţionale etc.) nu se poate însuşi în mod aprofundat teoria şi, mai ales, calculul primitivelor şi al integralelor. Fără aceeaşi bază calculatorie, bine însuşită, cunoştinţele de algebră abstractă rămîn simple informaţii exterioare arsenalului de mijloace cu care se pot rezolva probleme de matematică. Fără o bună cunoaştere a tuturor teoremelor de geometrie plană nu pot fi rezolvate probleme de geometrie şi aşa mai departe. Este adevărat însă, că şi în matematică fiecare capitol are o relativă independenţă în raport cu celelalte, unele cum sînt, de exemplu, cele referitoare la analiza combinatorie putînd fi tratate aproape fără nici o cunoştinţă din domeniul studiului ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii algebrice sau trigonometrice.

Ținînd seama de aceste particularități, pregătirea pentru concursul de admitere trebuie începută cu o recapitulare generală a tuturor cunoștințelor dobîndite în liceu. În această primă perioadă de pregătire prealabilă trebuie insistat la algebră și trigonometrie, în special asupra perfecționării deprinderilor calculatorii pînă la stabilirea de automatisme în acest sens. Mijloacele de bază ale acestei pregătiri pot fi constituite din rezolvarea exercițiilor și problemelor din manualele de liceu (mai ales identități, inegalități, ecuații, descompuneri în factori, simplificări de expresii algebrice și trigonometrice, eliminări de variabile între mai multe relații). La geometrie trebuie însușite toate teoremele de geometrie plană și în spațiu, în totalitatea lor, adică enunțările împreună cu demonstrațiile corespunzătoare. La recapitularea acestor cunoștințe se va insista asupra metodelor de demonstrație, în special pentru proprietăți ca: paralelism și ortogonalitate, colinearitate și concurență, egalitate și asemănare și conciclicitate a patru sau mai multe puncte. În programele analitice de concurs se precizează că la admitere în facultate nu se cere demonstrarea teoremelor de geometrie și mulți candidați, în spiritul acestei indicații, neglijează cu totul, în timpul pregătirii prealabile, studiul aprofundat al acestor teoreme, limitîndu-se la memorizarea enunțurilor. Un asemenea mod de pregătire îl considerăm greșit, întrucît dacă nu se însușesc acele modele de demonstrație geometrice care fac obiectul teoremelor, pretenția de a demonstra proprietăți mai complicate ale figurilor plane sau spațiale devine în mod necesar superfluă. Părerea noastră este că simplificarea programei analitice de concurs, prin eliminarea demonstrării teoremelor de geometrie, în loc să constituie o ușurare a pregătirii, din contră, o îngreunează. Un argument destul de puternic care susține această părere este constituit de rezultatele concrete ale concursurilor de admitere unde probele de geometrie determină, de regulă, o triere netă și foarte pronunțată a candidaților.

A doua perioadă a pregătirii pentru concursul de admitere, și anume perioada fundamentală de pregătire, are un caracter specific mult mai pronunțat. Mijloacele de bază pentru această pregătire îl constituie culegerile de probleme dedicate acestui scop. Ghidul de față, credem, îndeplinește în bună măsură cerințele logice și practice ale unei bune pregătiri în această perioadă. În acest scop am încercat să introducem, și să analizăm în acest ghid numai probleme care, pe lîngă unele dificultăți de calcul, să prezinte și dificultăți mai mici sau mai mari de natură logică.

La unele din problemele propuse (numărul lor este destul de mare) dificultățile de natură logică întîlnite în procesul rezolvării sînt hotărîtoare pentru acest proces.

Asemenea probleme sînt cuprinse în toate paragrafele și capitolele și doar paragrafele referitoare la identități și ecuații algebrice sau trigonometrice sînt mai ușoare din acest punct de vedere.

Modul în care sugerăm să fie utilizat prezentul ghid cuprinde citirea introducerilor de la fiecare paragraf, raportarea problemei respective la programa de liceu în vederea transformării datelor în elemente care trebuie să conducă la rezultat, alegerea unei metode de rezolvare (se pot utiliza în mod avantajos pentru o bună pregătire și mai multe metode) rezolvarea propriu-zisă și, foarte important, verificarea rezultatelor obținute.

În multe probleme în care se cere demonstrat un anume rezultat se poate porni și de la analiza faptelor și proprietăților din care poate rezulta în mod nemijlocit concluzia cerută și se poate încerca conectarea acestor fapte și proprietăți intermediare cu rezultatul cerut. Oricum, dacă după eforturi personale susținute nu se reușește rezolvarea problemei (recomandabil, după un timp mai lung de gîndire repartizat în mai multe zile) se poate recurge la partea a doua a ghidului și se pot utiliza indicațiile sau rezolvările care se găsesc acolo. Menționăm că, cu mici excepții, soluțiile sau indicațiile noastre nu au un caracter exhaustiv și este încă necesar un efort personal a rezolvitorului pentru a elabora complet soluția în condițiile în care s-ar cere la un concurs de admitere.

Acest mod de a elabora ghidul de față are la bază observația că prezentarea în culegeri de probleme a problemelor propuse, însoțite de rezolvări complete are de foarte multe ori efecte negative asupra unei bune pregătiri de concurs, întrucît elimină aproape complet efortul personal de gîndire al rezolvitorului și pe această cale, în afara neajunsului de a se realiza un studiu superficial (în care capacitatea de memorizare este solicitată în primul rînd), creează și pericolul unor deprinderi de studiu total necorespunzătoare.

În sfîrșit, a treia și ultima perioadă de pregătire pentru concurs, căreia i se poate dedica un timp de 2—4 săptămîni, este aceea a finisării pregătirii și adaptării acesteia la condițiile de concurs. În această perioadă se vor rezolva probleme tot de tipul celor din culegeri specializate, însă grupate cîte 2—3 din diferite paragrafe și încadrate în intervale de cîte 2—3 ore. Se va începe, în mod avantajos pentru o bună pregătire, cu probleme

din culegeri, deja rezolvate anterior, fără a se face însă, apel în intervalul de 2—3 ore, de lucru, sub nici-un motiv la soluțiile date în aceste culegeri.

Apoi treptat, în grupul de 2—3 probleme se vor introduce (mai întîi, una, apoi două și în ultimă instanță toate trei) probleme din culegeri care n-au mai fost rezolvate anterior. Această parte a pregătirii este preferabil să se facă sub supravegherea, cel puțin în privința condițiilor formale de desfășurare a „lucrărilor-test", a unei persoane interesate în această pregătire (părinți, colegi, profesori etc.).

2. Criteriile care să ateste, înaintea concursului de admitere, o bună pregătire de concurs sînt atît de ordin obiectiv, cît și de ordin subiectiv. Cele de ordin obiectiv se referă la capacitatea celui testat de a rezolva simplu și sistematizat o problemă dată, într-un interval de timp prescris (de regulă mai mic sau egal cu o oră) și apoi, după confruntarea soluției găsite cu o soluție exactă, de a-și aprecia în mod just eventualele lipsuri. Dificultatea majoră a unor asemenea testări este dată de alegerea problemei-test care trebuie să se încadreze în timpul problemelor de concurs. Asemenea testări este preferabil să se facă de către un specialist în matematică și este bine să fie repetate în ultima săptămînă dinaintea concursului, odată la fiecare două zile. Alte teste ce se pot efectua în ultima săptămînă de pregătire se referă la investigarea volumului de informații matematice acumulat și se poate desfășura în modul următor. Supraveghetorul testului (în mod obligatoriu un specialist în matematică) stabilește un număr de 15—20 de întrebări privind formulele matematice, cîte 5 din fiecare capitol — algebră, trigonometrie, geometrie (în special relații metrice) și analiză matematică — și propune lista lor candidatului, acordîndu-i un interval de timp care să realizeze o medie de 1,5—2 minute de întrebare, după care corectarea răspunsului poate fi efectuată chiar de către cel testat. Importante în aceste teste sînt alegerea întrebărilor și respectarea foarte riguroasă a timpului de lucru. O bună pregătire poate fi considerată aceea care produce un procent de 90% răspunsuri corecte, restul putînd avea unele greșeli, dar fiind, de asemenea bine orientate.

Testarea de ordin psihic urmărește eliminarea cît mai deplină a factorilor emoționali din timpul probelor de concurs. Criteriul fundamental al unei bune pregătiri în această direcție îl constituie încrederea candidatului că orice subiect i s-ar propune spre rezolvare nu este posibil să-l lase fără nici un răspuns. Această încredere se bazează pe pregătirea metodică din perioada funda-

mentală și poate fi consolidată de rezultatele testelor privind capacitatea de a rezolva probleme și a celor privind volumul de informații acumulate.

Pentru temperamentele excesiv de emotive și la care emoțiile puternice au o componentă inhibitoare puternică, poate fi folositoare în concurs folosirea unor medicamente deconectate recomandate de medic, însă numai cu condiția de încercare prealabilă a acestora în condițiile unor teste de cunoștințe anterioare. În toate aceste cazuri semnalăm însă, că esențial este buna pregătire a concursului, întrucît cel mai bun tonic prielnic pentru emotivi este succesul care poate fi sugerat de testele de cunoștințe.

Cu aceste considerații și cu recomandarea de a se cere ori de cîte ori este nevoie sprijinul profesorilor de matematici, de la licee sau de la facultăți, în cadrul cursurilor de pregătire ce se organizează în vederea pregătirii pentru concursurile de admitere se poate începe pregătirea pentru concurs de către toți acei care pe parcursul liceului nu au dovedit inaptitudini explicite pentru studiul matematicii. Fără intenția de a descuraja pe cineva, apreciem totuși că, de exemplu, cei care în ultimii 4 ani de liceu nu au realizat la matematică o medie generală mai mare de 7, nu este cazul să se orienteze spre facultățile de matematică spre a face din această știință o profesie, iar cei ce nu au realizat medii peste 6 să nu se îndrepte spre disciplinele tehnice la care matematica este un instrument principal de lucru. Chiar dacă unii din aceștia vor reuși să pătrundă în facultățile pe care noi le semnalăm ca fiind contraindicate pentru ei, pregătirea lor ulterioară în cadrul facultăților va fi chinuitoare atît pentru ei, cît și pentru profesorii lor, iar profesia, în cazul că vor reuși să și-o orienteze spre aceste domenii, nu le va da nici lor, nici beneficiarilor muncii lor, înaltele satisfacții pe care munca umană de înaltă calitate o oferă oamenilor.

Partea întîia—ENUNȚURI

Capitolul I

ALGEBRA

1. IDENTITĂȚI ALGEBRICE

A. Identitățile algebrice sînt egalități definite pe diferite mulțimi de numere, adevărate pentru orice valori ale nedeterminantelor din mulțimile de definiție. Verificarea identităților algebrice se face fie printr-un șir de transformări identice cunoscute ale unuia din membrii egalității, pînă se ajunge la celălalt membru, fie prin transformări identice ale ambilor membrii, pînă la o formă comună a lor.

Fie de exemplu, de verificat identitatea lui Lagrange

1. $$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 =$$
$$= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2.$$

Efectuînd calculele în membrul întîi obținem șirul de egalități :

$$a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 +$$
$$+ a_3^2b_2^2 - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_1b_1a_2b_2 - 2a_1b_1a_3b_3 -$$
$$- 2a_2b_2a_3b_3 = a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_1^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 -$$
$$- 2a_1b_3a_3b_1 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2b_3a_3b_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 +$$
$$+ (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_1b_2)^2$$

care se reduc prin transformări identice, membrul întîi la cel de-al doilea.

Fie, acum, de verificat identitatea:

$$2.\quad (a^2 - c^2 + 2bd)^2 + (d^2 - b^2 + 2ac)^2 = (a^2 - b^2 + c^2d^2)^2 + $$
$$+ 2(ab - bc + dc + ad)^2.$$

Efectuînd calculele în membrul întîi obţinem:

$$(a^2 - c^2 + 2bd)^2 + (d^2 - b^2 + 2ac)^2 = a^4 + c^4 + 4b^2d^2 -$$
$$- 2a^2c^2 + 4a^2bd - 4bc^2d + d^4 + b^4 + 4a^2c^2 - 2b^2d^2 +$$
$$+ 4acd^2 - 4ab^2c = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2(b^2d^2 + a^2c^2) +$$
$$+ 4(a^2bd - bc^2d + acd^2 - ab^2c).$$

Efectuînd calculele în membrul al doilea obţinem:

$$(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 + 2(ab - bc + dc + ad)^2 =$$
$$= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c + 2b^2d + 2b^2d^2 -$$
$$2c^2d^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2d^2 + 2a^2d^2 - 4ab^2c + 4abcd + 4a^2bd -$$
$$- 4bc^2d + 4abcd + 4acd^2 = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2(a^2c^2 + b^2d^2) +$$
$$+ 4(a^2bd - bc^2d + acd^2 - ab^2c).$$

Comparînd rezultatele obţinute la calcularea celor doi membri, observăm că ei au fost reduşi la o formă comună, ceea ce, în virtutea proprietăţii de tranzitivitate pe care o are orice egalitate (deci şi identitate), demonstrează identitatea supusă verificării.

Observaţia 1. Unii candidaţi, atunci cînd au de verificat o identitate, de fiecare dată cînd efectuează o transformare a unuia, sau a ambilor membri a egalităţii, scriu ambii membri ai identităţii ca în exemplul următor, în care se cere demonstrarea identităţii.

$$3.\quad \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a};$$

$$-\frac{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 2\,\frac{(b-c)(c-a) + (a-b)(c-a) + (a-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)};$$

$$-(b^2 + c^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ac + a^2 + b^2 - 2ab) =$$

$$= 2(bc + ac - c^2 - ab + ac + ab - a^2 - bc + ab + bc - b^2 - ac)$$

$$2(ab + bc + ac - a^2 - b^2 - c^2) = 2(ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2).$$

Din punct de vedere logic un asemenea mod de demonstrație este incomplet, întrucît în realitate s-a demonstrat că identitatea de demonstrat implică o identitate evidentă. Pentru a arăta că nu totdeauna implicația inversă este adevărată, să considerăm ecuația $a = -a$ satisfăcută în R doar de soluția $a = 0$ (deci nu o identitate !) din care, prin ridicarea la pătrat a ambilor termeni obținem *identitatea* $a^2 = a^2$. În consecință, atragem atenția ca demonstrația care se dă unei identități să fie făcută în modul indicat de noi.

Observația 2. În unele cazuri, înainte de a trece la demonstrația identității prin una din metodele indicate, este foarte util să se redistribuie termenii între cei doi membri ai identității prin trecerea unora dintre ei dintr-o parte în alta peste semnul egal (bineînțeles cu respectarea regulilor valabile în cazul acestor treceri).

Ca exemplu, fie de verificat identitatea

4. $(a^2 - b^2)^4 + (2ab + b^2)^4 + (2ab + a^2)^4 = 2(a^2 + ab + b^2)^4.$

Înainte de a începe calcularea unuia din membri, se trece al doilea și al treilea termen din primul în al doilea membru al identității și se calculează noul membru drept prin transformări identice simple.

$$(a^2 + ab + b^2)^4 - (2ab + b^2)^4 + (a^2 + ab + b^2)^4 - (2ab + a^2)^4 = (a^2 - ab)(a^2 + 3ab + 2b^2)[(a^2 + ab + b^2)^2 + (2ab + b^2)^2] + (b^2 - ab)(2a^2 + 3ab + b^2)[(a^2 + ab + b^2)^2 + (2ab + a^2)^2] = a(a^2 - b^2)(a + 2b)[(a^2 + ab + b^2)^2 + (2ab + b^2)^2] + b(b^2 - a^2)(2a + b)[(a^2 + ab + b^2)^2 + (2ab + a^2)^2] = (a^2 - b^2)(a^2 + ab + b^2)^2[a(a + 2b) - b(2a + b)] + (a^2 - b^2)[(a^2 + 2ab) + (b^2 + 2ab)^2 - (b^2 + 2ab)(a^2 + 2ab)^2 = (a^2 - b^2)^2 (a^2 +$$

$$+ ab + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 (a^2 + 2ab)(b^2 + 2ab) =$$

$$(a^2 - b^2)^2 [(a^2 + ab + b^2)^2 - (a^2 + 2ab)(b^2 +$$

$$+ 2ab)] = (a^2 - b^2)^4.$$

Observaţia 3. În anumite cazuri, identitatea de demonstrat, în faza iniţială sau pe parcursul demonstraţiei, se înmulţeşte sau se împarte cu anumiţi factori conţinînd nedeterminatele (aduceri la acelaşi numitor, simplificări). În aceste cazuri, este necesar să se demonstreze egalitatea şi pentru valorile ce anulează factorii cu care am înmulţit sau împărţit identitatea.

B. În multe cazuri, identităţile se propun sub forme diferite faţă de cele expuse mai sus. O categorie de asemenea probleme cer să se transforme identic în produs (să se descompună în factori) o expresie dată, în timp ce o altă categorie de probleme cer să se dezvolte calculele unei anumite expresii pentru a o aduce la forma cea mai simplă.

În primul caz, o atenţie deosebită trebuie acordată descompunerii *complete* a expresiei date în factori pe mulţimea pe care se cere descompunerea în factori. Dacă descompunerea se cere a fi făcută pe R, factorii din expresia finală pot fi numai de gradul întîi sau doi, în timp ce la descompunerile pe C factorii nu pot fi decît de gradul întîi. Legat de primul caz, descompunerea la care se ajunge trebuie completată cu demonstraţia că factorii de gradul doi nu se mai pot descompune în alţi factori de gradul întîi.

Fie, de exemplu, problema descompunerii în factori a expresiei

5. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ pe R.

Pornim de la identitatea evidentă (prevăzută de programa analitică de concurs):

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

în care vom pune $x = a$, $y = b + c$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + (b + c)^3 + 3a(b + c)(a + b + c) =$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3bc(b + c) + 3(ab + ac)(a + b + c) =$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3bc(a + b + c) - 3abc + 3(ab +$$

$$+ ac)(a + b + c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab +$$

$$+ ac + bc) - 3abc.$$

De aici rezultă:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + $$
$$+ ac + bc) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

Pentru analiza completă a problemei rămîne, încă, să se demonstreze că expresia $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$ nu se mai poate descompune în factori de gradul întîi.

Este evident

$$0 \leqslant \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc,$$

deci expresia este pozitivă pentru orice valori distincte ale nedeterminantelor a, b, c, ceea ce arată că ea nu se mai poate descompune în factori (în caz contrar, am putea anula unul din factori şi ar exista nişte valori distincte pentru a, b, c, care să anuleze expresia dată).

Observaţia 4. Toate transformările identice ale expresiilor ce demonstrează problemele asupra identităţilor presupun cunoaşterea unor identităţi fundamentale, cum sînt patratele binoamelor şi trinoamelor, binomul lui Newton, descompunerea diferenţelor de puteri şi a sumelor de puteri impare. În demonstraţii se admit şi alte identităţi în afara acestora, cum sînt

1. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3ac(a + c) +$
$+ 3bc(b + c) + 6abc.$

2. $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1a_2 + b_1b_2)^2 + (a_1b_2 - a2b_1)^2.$

3. $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 +$
$+ a_3b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1) + (a_2b_3 -$
$- a_3b_2)^2$ (Lagrange).

4. $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2.$

5. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2).$

C. Pînă aici am examinat numai identităţi libere peste o mulţime dată (sau identităţi generale), adică adevărate pentru orice valori ale nedeterminantelor.

O categorie importantă de identităţi sînt identităţile condiţionate. De exemplu, să se demonstreze că dacă $a + b + c = 0$, atunci

6. $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

7. $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc)$.

Identitatea condiţionată (6) se demonstrează imediat, dacă se ţine seama de exerciţiul (5) în care l-am descompus pe

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Identitatea (7) se demonstrează simplu astfel:

$$0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc),$$

de unde rezultă, evident, identitatea cerută.

În aceste două exemple, în demonstraţie a fost pusă în evidenţă condiţia dată sub forma în care a fost dată; în alte cazuri, se poate utiliza condiţia (condiţiile) pentru a elimina unele dintre nedeterminante şi, apoi, identitatea rămasă se demonstrează ca identitate liberă.

D. PROBLEME PROPUSE

Să se demonstreze următoarele identităţi pe R.

8. $\frac{(a+b)(a^3+b^3)}{(b-c)(c-a)} + \frac{(b+c)(b^3+c^3)}{(a-c)(b-a)} + \frac{(c+a)(c^3+a^3)}{(b-c)(a-b)} = ab + bc + ca \cdot (a \neq b \neq c)$.

9. $2[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-d)^4 + (d-a)^4] - [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2]^2 + 8(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) = 0$

10. $(1+2a)^3 + (1+2b)^3 + (1-2a-2b)^3 + 24(1-a)(1-b)(1+a+b) = 27$.

11. $\sum_{k=0}^{n-1}\left[x + \frac{k}{n}\right] = [nx]$, unde cu $[x]$ se notează partea întreagă a lui x.

12. Să se demonstreze identitatea

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$$

13. $(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)\cdot(\sum_{j=1}^{n} b_j^2) = (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}(a_i b_j - a_j b_i)^2$ (Lagrange).

14. Să se demonstreze că dacă $a + b + c = 0$, atunci:

$a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$.

15. $2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

16. $5(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) = 6(a^5 + b^5 + c^5)$.

17. $7(a^3 + b^3 + c^3)(a^4 + b^4 + c^4) = 6(a^7 + b^7 + c^7)$.

18. Să se arate că dacă $(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 = n\sum_{i=1}^{n} a_i^2$, atunci

$a_i = a_j$, $\forall$, i, $j \in N$.

19. Să se arate că dacă:

$a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 - a_4x_4 = 0$

$a_2x_1 + a_1x_2 - a_4x_3 + a_3x_4 = 0$

$a_3x_1 + a_4x_2 + a_1x_3 - a_2x_4 = 0$

$a_4x_1 - a_3x_2 + a_2x_3 + a_1x_4 = 0$,

atunci fie $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, fie $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$

20. Să se arate că dacă

$a^3 + b^3 = 13ab(a + b)$, atunci $\lg_\alpha \frac{a + b}{4} = \frac{1}{2}(\lg_\alpha a + \lg_\alpha b)$

$(\alpha \neq 1)$

21. Notînd $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ să se arate că

$$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2| \quad \text{şi} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

22. Să se descompună în factori expresiile:

$$E_1 = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$$

$$E_2 = (b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3.$$

23. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile.

$$E_1 = (x + y + z)^3 - (x + y - z)^3 - (y + z - x)^3 - \\ - (z + x - y)^3$$

$$E_2 = \frac{x^2 - yz}{(x + y)(x + z)} + \frac{y^2 - xz}{(y + z)(y + x)} + \frac{z^2 - xy}{(z + x)(z + y)}$$

24. Să se demonstreze că dacă

$$x + y + z = 0,$$

$$\xi + \eta + \zeta = 0;$$

$$\frac{\xi}{x} + \frac{\eta}{y} + \frac{\zeta}{z} = 0,$$

atunci: $\xi x^2 + \eta y^2 + \zeta z^2 = 0$

25. Să se arate că dacă:

$$\frac{a_2x_3 + a_3x_2}{x_1(-a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)} = \frac{a_3x_1 + a_1x_3}{x_2(a_1x_1 - a_2x_2 + a_3x_3)} = \\ = \frac{a_1x_2 + a_2x_1}{x_3(a_1x_1 + a_2x_2 - a_3x_3)},$$

atunci:

$$\frac{x_1}{a_1(a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)} = \frac{x_2}{a_2(a_1^2 + a_3^2 - a_2^2)} = \frac{x_3}{a_3(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)}.$$

26. Să se arate că pentru orice n impar, egalitatea

$$\sum_1^3 \frac{1}{a_i} = \left(\sum_1^3 a_i\right)^{-1}, \text{ implică}$$

$$\sum_1^3 \frac{1}{a_1^n} = \left(\sum_1^3 a_1^n)\right)^{-1}.$$

27. Să se arate că dacă

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = (a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_1) \text{ și}$$

$$(a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)x_1 = (a_3^2 + a_1^2 - a_2^2)x^2 = (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)x_3,$$

atunci:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1).$$

28. Să se demonstreze că

$$\frac{a_1^4}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{a_2^4}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{a_3^4}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}=$$

$$=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$$

29. Să se arate că expresia :

$$E=\frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{(x-a_3)(x-a_1)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

este independentă de x.

30. Să se arate că dacă $a_1+a_2+a_3=0$, expresia

$$E=\left(\frac{a_1-a_2}{a_3}+\frac{a_2-a_3}{a_1}+\frac{a_3-a_1}{a_2}\right)\left(\frac{a_3}{a_1-a_2}+\frac{a_1}{a_2-a_3}+\frac{a_2}{a_3-a_1}\right)$$

este independentă de a_1, a_2, a_3.

31. a. Să se arate că :

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x);$$

b. Dacă $x+y+z=a$ și $x^3+y^3+z^3=a^3$, atunci

$x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}=a^{2n+1}$ pentru orice n natural.

2. INEGALITĂȚI ALGEBRICE

A. Inegalitățile sînt relații de ordine tranzitive, definite pe diferite mulțimi, de regulă R, sau submulțimi ale sale. Demonstrarea lor se face pornind de la unele inegalități elementare bazate, în esență, pe faptul că în R orice pătrat perfect, sau sume de pătrate perfecte, este nenegativ. (În C nu sînt definite relații de ordine).

Din inegalitatea $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$ rezultă imediat în R_+ (unde $\sqrt{a}$ și $\sqrt{b}$ au sens) că $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ sau $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, adică media aritmetică a două numere este mai mare decît media lor geometrică.

Această inegalitate fundamentală se poate generaliza la un număr oarecare de numere din R_+ în modul următor :

1. Lemă. Dacă $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$, atunci $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n, \forall x_i \in R_+$, semnul egal avînd loc numai cînd $x_i = x_j$, $\forall\ i, j \in N$.

Demonstrația acestei teme se face cu ajutorul principiului inducției complete al cărui enunț este:

Dacă $P(n)$ este o proprietate depinzînd de $n \in N$ și dacă

a) $P(n_0)$ este adevărată;

b) Adevărul lui $P(k)$ implică adevărul lui $P(k+1), (k \geqslant n_0)$; atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geqslant n_0$. Fie, deci, în cazul lemei noastre $n = 2$. Avem pentru $P(2)$.

$x_1x_2 = 1$ și trebuie să demonstrăm că $x_1 + x_2 \geqslant 2$, egalitatea avînd loc numai cînd $x_1 = x_2$.

Știm că $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geqslant 0$, egalitatea fiind adevărată pentru $x_1 = x_2$.

De aici

$$x_1 + x_2 \geqslant 2\sqrt{x_1x_2} = 2 \quad (\text{căci } x_1x_2 = 1)$$

Deci am demonstrat că $P(2)$ este adevărată.

Fie $P(k)$ adevărată și ne propunem să demonstrăm $P(k+1)$. Avem $x_1x_2\ldots(x_kx_{k+1}) = 1$ și $x_1 + x_2 + \ldots x_{k-1} + x_kx_k \geqslant k$, semnul egal avînd loc cînd $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-1} = x_{k+1} = 1$.

Atunci

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geqslant k + 1 - 1 + + x_k + x_{k-1} - x_kx_{k+1} = k + 1 + (x_k - 1)(1 - x_{k+1}).$$

Întrucît $\prod_{i=1}^{k+1} x_i = 1$, rezultă că între numerele $x_i \in R_+$ există numere mai mari ca unu și numere mai mici ca unu, astfel că putem presupune x_k și x_{k+1}, unul superior și altul inferior unității, ceea ce ne arată că $(x_k - 1)(1 - x_{k+1}) \geqslant 0$, semnul egal avînd loc cînd $x_k = 1$, sau $x_{k+1} = 1$.

Ținînd seama de inegalitatea demonstrată mai sus, avem:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \geqslant k + 1 + (x_{n-1})(1 - x_{n+1}) \geqslant k + 1,$$

deci am demonstrat $P(k+1)$. (Aceasta deoarece cînd $\sum_{1}^{k} x_i = k + 1$, avem $x_kx_{k+1} = 1$ și $x_k = 1$, sau $x_{k+1} = 1$, adică și $x_k = 1$ și $x_{k+1} = 1$).

Fie acum de demonstrat inegalitatea

2. $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

Pentru demonstrație notăm $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}}$ și vom avea

evident $\prod_{i=1}^{n} x_i = \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\left(\sqrt[n]{\prod_{n=1}^{n} a_i}\right)^n} = 1$. În conformitate cu lema 1

vom avea:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n, \text{ adică } \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}} \geqslant n, \text{ de unde}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

Semnul egal avînd loc cînd $x_i = x_j$ $(\forall i,j \in N)$ sau $a_i = a_j$.
O altă inegalitate fundamentală este relația de ordine dintre media aritmetică și cea armonică a două numere:
Reamintim că media armonică a două numere a, $b \in R_+$ este numărul x definit de relația

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \text{ adică } x = \frac{2ab}{a+b}.$$

Inegalitatea de demonstrat este atunci,

3. $$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Pentru demonstrarea acestei inegalități pornim de la $(a - b)^2 \geqslant 0$ care se scrie

$a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0$ de unde

$a^2 + b^2 + 2ab \geqslant 4ab$ sau $(a+b)^2 \geqslant 4ab$ de unde $\frac{2ab}{a+b} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

Toate operaţiile efectuate sînt permise întrucît $a, b \in R_+$. Pentru a completa descrierea relaţiilor de ordine ce există între mediile aritmetice, geometrice şi armonice se mai poate arăta, destul de uşor, că

$$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b}.$$

Pentru demonstraţie se porneşte de la relaţia deja demonstrată $\frac{a+b}{2} \geqslant ab$ | pe care o înmulţim cu $\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ (operaţie permisă pentru $a, b \in R_+$).

Ţinînd seama de cele demonstrate şi notînd cu $\overline{m}_a(a, b)$; $m_g(a, b)$; $m_a(a, b)$, respectiv mediile aritmetică, geometrică şi armonică a două numere din R_+ avem relaţiile:

$$m_a(a, b) \geqslant m_g(a, b) \geqslant m_a(a, b) \text{ şi}$$

$$m_g(a, b) = m_g(\overline{m}_a, m_a).$$

Observaţia 1. Atunci cînd se demonstrează inegalitatea $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, mulţi candidaţi procedează în modul următor: Din inegalitatea de demonstrat deduc alta:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \geqslant 0, \text{ sau } \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0$$

şi întrucît se ştie că $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$, conchid că inegalitatea dată a fost demonstrată. De fapt, ceea ce s-a demonstrat este că inegalitatea $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ implică pe $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$, ori problema cere să se demonstreze că inegalitatea iniţială este adevărată. Demonstraţia dată la începutul paragrafului este cea corectă.

Observaţia 2. Principiul inducţiei complete se foloseşte pentru demonstraţia oricăror proprietăţi depinzînd de n, deci şi a inegalităţilor.

Observaţia 3. Inegalităţile pot fi definite *numai* peste structurile algebrice în care sînt definite relaţii de ordine. Un prim exemplu remarcabil în care inegalităţile nu au sens este corpul numerelor complexe.

Observaţia 4. La verificarea inegalităţilor se pot folosi numai proprietăţile stabilite prin teoreme asupra acestor relaţii (adunarea sau scăderea de termeni egali în ambii membrii, înmulţirea cu numere pozitive, ridicarea la putere în cazul cînd ambii membri sînt pozitivi etc.). O atenţie deosebită trebuie acordată înmulţirii inegalităţilor cu factori care conţin nedeterminalele. Asemenea operaţii nu-s permise decît dacă în prealabil s-a demonstrat că factorii cu care se înmulţesc inegalităţile păstrează semn constant pentru orice valori ale nedeterminantelor.

B. PROBLEME PROPUSE

Să se demonstreze inegalităţile :

4. $$\frac{abc}{d^3}+\frac{bcd}{a^3}+\frac{acd}{b^3}+\frac{abd}{c^3}\geqslant 4 \text{ pe } R_+.$$

5. $a^2b^2c^2+b^2c^2d^2+a^2c^2d^2+a^2b^2d^2\geqslant 4(abcd)^{3/2}$ pe R_+.

6. $\frac{abc}{d}+\frac{bcd}{a}+\frac{acd}{b}+\frac{abd}{c}\geqslant ab+bc+cd+da$ pe R_+.

7. Dacă $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = s^2$, atunci $\sum_{i=1}^{n} a_i^n < s^n, \forall\, n > 2$.

8. Dacă $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, atunci $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$.

9. Dacă $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$ şi $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1$, atunci $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| < 1$.

10. Să se arate că $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + n \geqslant 2\sum_{i=1}^{n} a_i$.

11. Să se arate că $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i+1)^2} < \frac{1}{4}$ pentru orice $n \in N$

12. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2n-1}{n}$ pentru $\forall\, n > 1$.

13. $\sum_{k=1,}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$

14. Să se arate că pentru orice $x > 0$, $px^q - qx^p - p + q < 0$, $(p,q \in N)$, $p > q$, $(x \neq 1)$.

15. $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geqslant 6, \forall a, b, c \in R_+.$

16. Dacă $a + b + c = 1$, atunci

$$\frac{a(a^2+1)}{bc} + \frac{b(b^2+1)}{ca} + \frac{c(c^2+1)}{ab} \geqslant 10. \quad (a, b, c, \in R_+)$$

17. $(a_1^{m+p} + a_2^{m+p} + \ldots + a_n^{m+p})(a_1^{m-p} + a_2^{m-p} + \ldots + a_n^{m-p}) \geqslant$

$$\geqslant (a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m)^2, \ \forall \ a_i \in R_+.$$

Cînd are loc egalitatea ?

18. Dacă $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$, atunci

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geqslant (ayz + bzx + cxy)^2.$$

19. Dacă $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 1$, atunci $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant 1.$

20. Dacă $\sum_{i=1}^{n} a_i = c$, $a_i \in R_+$, atunci $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant \frac{n^2}{c}$

În ce caz avem egalitatea ?

21. Dacă $\sum_{i=1}^{n} a_i = c$, $a_i \in R_+$, atunci $\prod_{i=1}^{n} a_i \leqslant \left(\frac{c}{n}\right)^n$

În ce caz are loc egalitatea ?

22. Dacă $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$, atunci $\sum_{i=1}^{n} (1 + a_i) \geqslant 2^n$

23. Să se arate că

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i a_{i+1}} \geqslant 4 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(a_i + a_{i+1})^2}, \forall a_i \in R_+.$$

24. Să se arate că

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 < n \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \forall n \in N \text{ şi } a_i \in R.$$

Folosind această inegalitate să se arate că dacă

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt{(n-1) \sum_{i=1}^{n} a_i^2}, \text{ atunci } a_i \in R_+.$$

25. Să se arate că

$$a + b + c \leqslant \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \text{ în care } a, b, c \in R.$$

26. Să se arate că

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \forall a_i, b_i \in R$$

27. Dacă $a + b + c = m$, să se arate că

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{m^2}{3}.$$

28. Fie $a, b, c, a + b - c, a + c - b, b + c - a$ pozitive. Să se arate că $abc \geqslant (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$.

29. Să se arate că pentru orice $a_i \in R_+$, avem :

$$\sum_{\substack{i<j \\ i, j=1}}^{n} \sqrt{a_i a_j} \leqslant \frac{n-1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

30. Să se arate că pentru orice $a, b, c \in R_+$, avem

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a + b + c}.$$

3. ECUAŢII ŞI SISTEME DE ECUAŢII ALGEBRICE

A. Ecuaţiile sînt egalităţi adevărate numai pentru anumite valori ale nedeterminatelor din mulţimile lor de definiţie. O primă clasificare a ecuaţiilor algebrice se face după apariţia puterilor

întregi sau raționale ale unor expresii în care se află nedeterminatele, în ecuații polinomiale și iraționale. De asemenea, există unele clase de ecuații în care necunoscutele apar în exponenții unor expresii (ecuații exponențiale), sau în argumentele unor funcții transcendente (ecuații logaritmice). Rezolvarea ecuațiilor înseamnă aflarea tuturor soluțiilor lor, adică a tuturor valorilor nedeterminatelor (necunoscutelor) pentru care ecuațiile sînt adevărate. În legătură cu ecuațiile, se pot propune un mare număr de probleme în care aflarea soluțiilor să nu intereseze de loc, sau să fie o operație auxiliară. Astfel, în multe probleme interesul principal este dirijat spre studiul existenței și apartenenței soluțiilor la anumite mulțimi, al numărului de soluții aparținînd unor mulțimi date (rădăcini reale, complexe, pozitive, negative etc.) al relațiilor de ordine ale rădăcinilor, între ele, sau față de anumite numere date etc. O categorie importantă de probleme referitoare la ecuații constă în discutarea naturii și a relațiilor de ordine dintre rădăcini, în funcție de unul sau mai mulți parametri care intră în componența coeficienților ecuațiilor.

B. Ecuațiile polinomiale se clasifică, după numărul necunoscutelor și după puterile acestora, în ecuații cu una sau cu n necunoscute, de gradul întîi, al doilea etc. În clasa ecuațiilor cu o singură necunoscută se mai fac distincții după numărul termenilor (ecuații binoame, trinoame) și după raporturile dintre puterile diferiților termeni ai acestor ecuații, sau după relațiile dintre coeficienți (ecuații bipătrate, reciproce etc.).

Pentru ecuațiile cu o necunoscută, există metode generale de rezolvare exactă în cazurile celor de grad pînă la al patrulea inclusiv; în programa analitică a concursurilor de admitere asemenea metode sînt limitate la gradul al doilea. De asemenea, există metode generale de aflare a rădăcinilor raționale (deci și întregi) și de separare a rădăcinilor reale raționale. Sensul în care subînțelegem rezolvarea exactă este acela al reprezentării soluțiilor sub forma unor expresii conținînd radicali.

Pentru sistemele de ecuații există metode generale de rezolvare în cazul celor de gradul întîi, indiferent de numărul de ecuații sau necunoscute. În programa de concurs aceste sisteme sînt limitate la cele cu număr egal de ecuații și necunoscute. În afară de rezolvarea sistemelor, problemele de concurs legate de ele mai cuprind, de regulă, discuția soluțiilor în funcție de unul sau mai mulți parametri, un rol special avîndu-l sistemele cu soluție unică.

Sistemele de gradul doi, sau superior gradului doi, se pot rezolva numai în cazuri speciale. De exemplu, pentru cele de gradul al doilea cu 2 necunoscute există metode de rezolvare în cazul că

una din ecuaţii este de gradul întîi, în cazul că una din ecuaţii este omogenă de gradul al doilea (membrul drept egal cu zero), sau în cazul că ambele ecuaţii conţin în membrul stîng (cel al necunoscutelor) doar termeni de gradul al doilea.

O atenţie deosebită va trebui acordată scrierii corecte a tuturor soluţiilor aceste sisteme :

Pentru ilustrarea acestor idei să considerăm sistemul de ecuaţii:

1. $$\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 4xy - 5y^2 + 6x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

Mai întîi observăm că $y = 0$ nu face parte din soluţiile lui, întrucît prima ecuaţie dă $x = 0$ şi $x = 0$, $y = 0$ nu verifică ecuaţia a doua. În aceste conditii. împărţim prima ecuaţie cu y^2 şi substituind $\frac{x}{y} = u$ obţinem :

$$2u^2 - 5u + 2 = 0$$

ale cărei soluţii sînt $u_1 = 2$, $u_2 = 1/2$

În continuare avem, deci, de rezolvat sistemele (corespunzătoare lui $u_1 = 2$ şi $u_2 = 1/2$) :

a) $$\begin{cases} x = 2y \\ x^2 + 4xy - 5y^2 + 6x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x = y \\ x^2 + 4xy - 5y^2 + bx + y + 3 = 0 \end{cases}$$

pe care le vom rezolva acum simplu, prin metoda substituţiei. Astfel, sistemul (*a*) conduce la ecuaţia rezolventă de gradul al doilea

$$\text{(c)} \quad 7y^2 + 13y + 3 = 0,$$

ale cărei soluţii sînt $y_1 = \frac{-13 - \sqrt{85}}{14}$, $y_2 = \frac{-13 + \sqrt{85}}{14}$.

Corespunzător acestei soluţii a ecuaţiei (c) sistemul iniţial va avea soluţiile :

I) $$\begin{cases} x_1 = \frac{-13 - \sqrt{85}}{7} \\ y_1 = \frac{-13 - \sqrt{85}}{14} \end{cases}$$ II) $$\begin{cases} x_2 = \frac{-13 + \sqrt{85}}{7} \\ y_2 = \frac{-13 + \sqrt{85}}{14} \end{cases}$$

Sistemul (b) conduce la ecuaţia rezolventă de gradul al doilea

(a) $11x^2 - 8x - 3 = 0$,

ale cărei soluţii sînt $x_1 = 1$, $x_2 = -3/11$.

Corespunzător acestor soluţii ale ecuaţiei (d), sistemul iniţial va mai avea şi soluţiile :

$$\text{(III)} \begin{cases} x_3 = 1 \\ y_3 = 2 \end{cases} \qquad \text{(IV)} \begin{cases} x_4 = -\dfrac{3}{11} \\ y_4 = -\dfrac{6}{11} \end{cases}$$

C. Ecuaţiile polinomiale pot avea, în afară de formele canonice cunoscute, şi unele forme non-standard care necesită, înainte de a le aduce la forma standard, o prelucrare bazată, în general, pe artificii de calcul.

Un exemplu de acest tip este rezolvarea ecuaţiei în R.

2. $2x^2 + 2xy + 5y^2 - 8x - 22y + 26 = 0$.

Examinînd această singură ecuaţie de gradul al doilea cu două necunoscute sîntem tentaţi să credem că ea este nedeterminată întrucît conţine două necunoscute.

O primă medotă de rezolvare a acestei ecuaţii este de a o considera, de exemplu, ca ecuaţie de x.

$$2x^2 - 2(4 - y)x + 5y^2 - 22y + 26 = 0$$

şi de a-i scrie soluţia $x_{1,2} = \dfrac{4 - y \pm 3i(y - 2)}{2}$

Întrucît se cere ca soluţia să fie în R, este necesar ca $y - 2 = 0$, adică $y = 2$, ceea ce dă pentru x valoarea 1 ; soluţia ecuaţiei este, deci, $x = 1$ $y = 2$,.

O altă metodă este aceea de a pune ecuaţia dată sub forma

$$(a_1x + b_1x + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 0.$$

Ţinînd seama de forma coeficienţilor lui x^2, y^2 şi de termenul liber, putem încerca pentru partea de sistem de identificare :

$$a_1^2 + a_2^2 = 2, \; b_1^2 + b_2^2 = 5, \; c_1^2 + c_2^2 = 26$$

soluţiile $a_1 = \pm 1$, $a_2 = \pm 1$, $b_1 = \pm 1$ (sau ± 2), $b_2 = 2$ (sau ± 1) şi $c_1 = \pm 1$ (sau ± 5), $c_2 = \pm 5$ sau ± 1.

Făcînd verificările acestor soluţii pe întregul sistem de identificare găsim că ecuaţia dată se poate pune sub forma echivalentă.

$$(x + 2y - 5)^2 + (-x + y - 1)^2 = 0.$$

De aici, pentru soluţia în R, rezultă condiţiile necesare

$$x + 2y = 5$$
$$-x + y = 1$$

care ne dau soluţia ecuaţiei iniţiale (2), $x = 1$, $y = 2$.

D. Ecuaţiile iraţionale (algebrice) se rezolvă, de regulă, prin ridicări la diferite puteri a ecuaţiilor date, direct sau după transformări prealabile. Întrucît ridicarea la putere a unei ecuaţii îi ridică gradul şi, implicit, îi poate introduce rădăcini noi, este necesar ca după aflarea soluţiilor, acestea să se verifice pe ecuaţia de origine.

Aceeaşi obligaţie revine rezolvitorilor şi în cazul ecuaţiilor care au în structura lor module ale unor expresii ce conţin necunoscutele. Astfel, de exemplu, fie de rezolvat ecuaţia

$$|x^2 - 3x + 2| + 6x = 0.$$

Această ecuaţie se rezolvă ţinînd seama c

$$|x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{pentru } x \ (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \\ -x^2 + 3x - 2 & \text{pentru } x \in [1, 2] \end{cases}$$

deci este echivalentă cu

(a) $x^2 + 3x + 2 = 0$ pentru $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) = R \setminus I_1$

(b) $x^2 - 9x + 2 = 0$ pentru $x \in [1, 2] = I_1$

Ecuaţia (a) are soluţiile $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ care verifică condiţia de a aparţine domeniului $R \setminus I_1$, deci sînt soluţii ale ecuaţiei date.

Ecuaţia (b) are soluţiile $x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{2} \simeq \frac{9 \pm 8{,}5}{2}$ şi întrucît nu aparţin lui I_1, nu-s soluţii ale ecuaţiei iniţiale date.

Observaţie importantă. În procesul de calcul necesar aducerii ecuaţiilor la forma canonică, se va evita cu stricteţe împărţirea, sau înmulţirea ecuaţiilor cu factori care conţin necunoscute. În

cazul cînd toţi termenii dintr-o ecuaţie conţin un factor comun, acesta se va scoate în factor şi se vor egala pe rînd factorii obţinuţi cu zero.

E. PROBLEME PROPUSE

Să se rezolve ecuaţiile:

3. $\sqrt{\frac{x+5a}{12a}+\sqrt{\frac{x-4a}{4a}}}+\sqrt{\frac{x+5a}{12a}-\sqrt{\frac{x-4a}{4a}}}=\sqrt{3}.$

4. $\left(\sqrt{8+\sqrt{7}}\right)^x+\left(\sqrt{8-\sqrt{7}}\right)^x=4^x.$

5. $2x^2+5y^2-2xy-16x-10y+50=0.$

6. $3x^2+3y^2+z^2-3xy+3xz-18x-12z+36=0.$

7. $5^x+12^x=13^x.$

8. $a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=0.$

9. $a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1.$

10. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$

11. $\sqrt{x^2+\sqrt{6x^2-9}}+\sqrt{x^2-\sqrt{6x^2-9}}=\sqrt{6}.$

12. Să se determine λ, astfel ca ecuaţia:

$$5x^2+(\lambda^2+4)y^2+4(1-\lambda)xy-20x+2(3\lambda-8)y+25=0$$

să admită soluţii reale şi întregi.

13. Fără a rezolva sistemul

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-\alpha^2}+\frac{z^2}{a^2-\beta^2}=1\\ \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2-\alpha^2}+\frac{z^2}{b^2-\beta^2}=1\\ \frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{c^2-\alpha^2}+\frac{z^2}{c^2-\beta^2}=1\end{cases}$$

Să se calculeze $S_2 = x^2 + y^2 + z^2$.

14. Să se rezolve ecuația

$$|z|^2 + 2iz + 2a(1 - i) = 0$$

și să i se discute rădăcinile în funcție de $a \in R_+$.

+**15.** Să se determine a, b, c, astfel ca sistemul

$$\begin{cases} a\left|\dfrac{x^y - 1}{x^y + 1}\right| = b \\ x^3 + y^2 = c \end{cases}$$

să aibă soluție unică (a, b, x, $y \in R_+^*$).

Să se rezolve sistemele:

16. $$\begin{cases} z^5 + \bar{w}^4 = 0 \\ z^7 \cdot w^9 = 1 \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} |2x^2 - 2x| + 2y = 3 \\ x - |y| = 1 \end{cases}$$

+**18.** $$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 27 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Să se discute natura rădăcinilor următoarelor ecuații, după parametrul real m.

19. $x^2 + (2 - m^2)x + 2 - m^2 = 0$

20. $4x^2 + 4(m + 1)x + m = 0$

21. $(m - 1)x^2 + mx + m + 1 = 0$

22. $(m - 1)x^2 + (2m^2 - m - 1)x + m^3 - m - 1 = 0$

23. Se consideră ecuația $mx^2 + mx - 1 = 0$ cu $m \in R$.

a) Să se arate că această ecuație nu poate avea ambele rădăcini pozitive;

b) Să se determine valorile parametrului m, astfel ca ecuația să aibă rădăcinile x_1, x_2 mai mari ca -1;

c) Să se determine valorile parametrului real m astfel ca $-3 < x_1 < -2$ și $2 < x_2 < 3$.

24. Se consideră ecuaţia
$(m - 1)x^2 - 2mx + m^2 - m = 0$
Să se afle valorile lui $m \in R$, astfel încît rădăcinile x_1, x_2 ale ecuaţiei să satisfacă condiţiile:
$x_1 < -2$, $1 < x_2$.

25. Să se determine valorile parametrului $m \in R$, astfel ca rădăcinile următoarelor ecuaţii să satisfacă condiţiile indicate în dreptul lor.

(a) $mx^2 + (m + 1)x + m - 3 = 0$; $x_1 < 1 < x_2 < 2$;

(b) $(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 2 = 0$; $-1 < x_1 < 1 < x_2$

26. Să se discute natura şi semnul rădăcinilor ecuaţiei

$$[2x^2 - 2(a - b)x] - [ab + 2] = 0$$

după poziţia punctului $P(a, b)$ în sistemul cartezian de coordonate $a\,0\,b$.

27. Să se discute natura şi semnele rădăcinilor ecuaţiei
$x^2 - 2(a - 1)x + b - 2a + 1 = 0$
cînd a şi b sînt coordonatele carteziene ale unui punct $M(a, b)$ care variază în plan.

28. Să se determine parametrul $m \in R$, astfel ca rădăcinile ecuaţiilor $x^2 - x - m = 0$ şi $x^2 - x + m - 1 = 0$ să se separe (adică între rădăcinile fiecărei ecuaţii să se afle o rădăcină a celeilalte).

29. Să se determine valorile lui $m \in R$, astfel ca o rădăcină a ecuaţiei $x^2 + x - (m + 1)$ să se afle între rădăcinile ecuaţiei $mx^2 - 2x - 2 = 0$, şi reciproc.

30. Să se determine valorile parametrului $m \in R$ astfel ca trinomul
$(m^2 - m - 2)x^2 - 2(m^2 - m + 1)x + m^2 - m - 9$
să ia valori pozitive pentru orice x real.

31. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2 + mx + 2 = 0$. Notînd cu $S_n = x_1^n + x_2^n$ $(n \in N)$, să se arate că pentru orice n
$S_{n+2} + (m + 1) S_{n+1} + (m + 3)(S_1 + S_2 + \dots S_n) + m + 4 = 0$.

32. Se consideră polinomul de două variabile $P(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$.

a) Să se găsească o condiţie necesară şi suficientă pentru ca $P(x, y)$ să păstreze semn constant în tot planul;

b) Notînd $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ să se arate că o condiţie necesară şi suficientă ca $P(x, y) \geqslant 0$, $\forall\, x, y$, este $\Delta_1 > 0$ şi $\Delta_2 > 0$.

33. Fie $f : R$, funcţie definită prin relaţia $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$.

Să se găsească valoarea maximă şi minimă a funcţiei f precum şi valorile variabilei x pentru care se realizează aceste extreme ale lui f (fără a folosi derivata).

34. Să se determine valorile parametrului $m \in R$, astfel ca ecuaţia $(m - 1)x^4 - (m - 4)x^2 + 3m - 2 = 0$, să aibă o rădăcină mai mică decît -2 şi celelalte trei mai mari ca -1.

35. Să se determine valorile parametrului m astfel ca ecuaţia $2mx^4 - (3m - 1)x^2 + m = 0$ să admită o rădăcină pe intervalul $(-1, 0)$ şi o altă rădăcină pe intervalul $(1, 2)$. Să se arate că în acest caz toate rădăcinile ecuaţiei date sînt reale.

Să se afle parametrul $m \in R$ şi să se rezolve ecuaţiile următoare ştiind că au două rădăcini opuse:

36. $2x^3 + mx^2 - 8x + 4 = 0$

37. $x^3 - 2x^2 + mx - 2 = 0$

38. $3x^3 + x^2 - 27x + m = 0$.

Să se afle parametrul m şi apoi să se rezolve ecuaţiile de mai jos, ştiind că acestea admit o rădăcină dublă.

39. $x^3 + mx^2 - 3x + 2 = 0$

40. $x^3 + x^2 + mx - 12 = 0$

41. $3x^3 + 7x^2 + 5x + m = 0$

Să se afle parametrul m şi să se rezolve ecuaţiile următoare ştiind că au două rădăcini inverse.

42. $2x^3 + mx^2 + 3x - 2 = 0$

43. $2x^3 + 3x^2 + mx + 3 = 0$

44. $3x^3 - 4x^2 - 17x + m = 0$

45. Să se găsească o condiţie necesară şi suficientă pentru ca ecuaţia $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ să aibă o rădăcină dublă şi apoi să se rezolve.

Să se rezolve ecuaţiile de mai jos ştiind că au rădăcini multiple:

46. $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = 0$

47. $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 17x - 10 = 0$

48. $36x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 2x + 1 = 0$

49. $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 3x + 9 = 0$

Să se determine parametrul a, astfel ca ecuaţiile de mai jos să aibă rădăcini multiple reale şi apoi să se rezolve:

50 $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 8x + a = 0$

51. $x^3 + x^2 - 5x + a = 0$

52. $x^4 + 2x^3 + x^2 (a + 2) + x(a + 1) + a = 0$

53. $x^4 + x^3 (1 - a) - (2a - 1) x^2 + (1 + a^2) x - a = 0$

Să se determine parametrii necunoscuţi şi apoi să se rezolve ecuaţiile de mai jos, ştiind că rădăcinile lor sînt în progresie aritmetică.

54. $27x^4 - 72x^3 + mx^2 + nx - 5 = 0$

55. $x^5 - 5x^4 + mx^3 + nx^2 + px - 22 = 0$

56. Să se rezolve ecuaţiile

$9x^3 - 18x^2 - x + 10 = 0$, $27x^4 - 72x^3 + 33x^2 + 32x - 20 = 0$

ştiind că au rădăcini comune.

57. Se dă ecuaţia $x^3 - 2ax^2 + ax - 2 = 0$ avînd rădăcinile x_1, x_2, x_3 şi funcţia $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ şi se cere:

a) Valorile lui a astfel ca $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = 3$;

b) Să se rezolve ecuaţia dată pentru a determinat mai sus.

58. Să se determine a şi b pentru care sistemul:

$$\begin{cases} xyz + z = a \\ xyz^2 + z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \text{ are soluţie unică } (a, b, x, y, z \in R). \end{cases}$$

59. Să se găsească valorile lui a pentru care sistemul:

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2 \\ a + bxy + x^2y = 1, \text{ admite cel puţin o soluţie reală} \\ \text{pentru } \forall\, b \in R. \end{cases}$$

60. Să se calculeze $E = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$ dacă x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + px + q = 0$ şi $p^2 - 4q > 0$, $p < 0$, $q > 0$.

61. Să se rezolve ecuaţiile
$x^4 - x^3 - 12x^2 + 7x - 1 = 0$ şi $x^3 - 2x^2 - 7x + 2 = 0$
ştiind că au rădăcini comune.

62. Să se rezolve ecuaţia
$24x^4 - 20x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

63. Să se rezolve ecuaţia
$x^6 + 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 28x^2 + 100x + 350 = 0$.
ştiind că admite o rădăcină egală cu $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$.

64. Fie ecuaţia $x^2 - mx + 1 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2.
Să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sînt

$$y_1 = x_1^3 + \lambda, \qquad y_2 = x_2^3 - \lambda,$$

unde $\lambda = \lg_{0,01} 100 + \lg_{0,4125} 4 + \lg_9 \frac{1}{27}$.

65. Să se rezolve ecuaţia

$$\begin{vmatrix} -a^3 & b^3 & c^3 \\ (x + a)^3 & (x - b)^3 & (x - c)^3 \\ (x + 2a)^3 & (x - 2b)^3 & (x - 2c)^3 \end{vmatrix} = 0$$

66. Să se rezolve ecuaţia $(\sqrt{2} + 1)^{\frac{\sin x}{2}} + (\sqrt{2} - 1)^{\frac{\sin x}{2}} = a$.

67. Se dă polinomul $P(x) = x^3 - (\sqrt{9a+10} - 2)x^2 + 11x - 3\sqrt{a-2}$ şi se cere:

a) Să se determine valorile lui a ştiind că suma rădăcinilor este egală cu produsul lor;

b) Să se rezolve ecuaţia $P(x) = 0$ cu valorile lui a determinate de punctul a);

c) Să se reprezinte grafic $\frac{P(x)}{x-1}$ (în cazul lui a determinat din condiţia a).

68. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{(x-a)^2 + (x-b)^2}{(x-a)^2 - (x-b)^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

69. Fie trinomul de gradul al doilea

$y(x) = x^2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)x + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$ cu rădăcinile x_1, x_2 şi se cere:

a) Să se arate că $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} = 2 \sin \alpha$;

b) Să se determine α din condiţia $\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} = 2 \sin \alpha$.

70. Să se rezolve ecuaţia

$$a\left(2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{x}(a+1)$$

şi apoi să se determine a, astfel încît o rădăcină a ecuaţiei să fie strict mai mică decît $\frac{1}{2}$.

71. Se dă polinomul

$P_n(x) = (x - 1 + i\sqrt{3})^n + (x - 1 - i\sqrt{3})^n$ şi se cere:

a) Să se rezolve ecuaţia $P_3(x) = 0$.

b) Să se afle toate rădăcinile ecuaţiei

$$\frac{P_n(x)}{(x-1-i\sqrt{3})^n} = 0;$$

c) Să se arate că rădăcinile ecuaţiei de la punctul b) pot fi puse sub forma $x = \sqrt{3}\,\text{ctg}\,\alpha + 1$.

72. Pentru ce valori ale parametrului m, ecuaţia $(m - 15) x^2 - 4mx + m - 6 = 0$ are o rădăcină sau ambele rădăcini mai mari ca 2.

73. Să se arate că sistemul

$$\sum_{i=1}^{4} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

unde $|a_{ij}| = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$

a_{ij} fiind numere reale, admite numai soluţia nulă $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

74. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 3(x^3 + y^3) - 13(x^2 + y^2) + 31(x + y) - 55 = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

75. Se consideră ecuaţia $x^2 - \alpha(m + 1)x + 2(m - 1) = 0$ a) Să se arate că ecuaţia are rădăcini reale pentru orice m real; b) Să se determine valorile lui m pentru care

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{1}{2}.$$

76. Să se găsească m, astfel ca rădăcinile ecuaţiei să fie toate reale.

$$\sqrt[3]{mx^2 + (m-1)x + 1 - m} + \sqrt[3]{(m-1)x^2 - (m+2)x + \sqrt{m-2}} = \sqrt[3]{(2m-1)x^2 - 3x - 1}$$

77. Să se rezolve ecuaţia

$\left[\frac{4x - 3}{2x + 2}\right] = 2x - 1$, unde $[u]$ este partea întreagă a lui u definită de $[u] = \begin{cases} n & \text{pentru } n \leqslant u < n + 1 \\ -n & \text{pentru } -n \leqslant u < -n + 1 \end{cases}$

4. INECUAŢII ŞI SISTEME DE INECUAŢII

A. Inecuaţiile algebrice (ca şi cele trigonometrice) constituie unul din capitolele care furnizează un mare număr de probleme prezente în probele de examene şi concursuri. Acest fapt, dato-

rat în egală măsură importanței mari a acestui capitol în cadrul matematicii și dificultăților de natură logică în rezolvarea problemelor, impune necesitatea unei atenții deosebite pentru problemele respective. Probleme de această natură apar atît în cadrul algebrei (și trigonometriei), cît și în cadrul celorlalte discipline matematice de concurs, cu referire specială la problemele de analiză unde se cer determinate domeniile de definiție ale funcțiilor, sau trebuie determinate semnele diferitelor expresii.

Din capul locului trebuie menționată necesitatea unui studiu prealabil al inecuațiilor, care să stabilească domeniul de definiție al tuturor funcțiilor care intră în relația de inegalitate. În acest studiu se va ține seama de condiția ca ambii membri ai inecuației să aparțină mulțimii numerelor reale (în mulțimea numerelor complexe nu sînt definite relații de ordine) pentru orice valori ale necunoscutelor unde căutăm soluțiile.

O particularitate importantă a inecuațiilor, în raport cu ecuațiile, o constituie faptul că soluțiile primelor sînt, de regulă, mulțimi de numere care formează subintervale ale domeniilor de definiție ale funcțiilor puse în relații de ordonare.

Fie de exemplu, de rezolvat inecuația:

1. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x} \leqslant \sqrt{a+b-2x}$.

Pentru ca toți termenii aflați în această inecuație să aparțină lui R, este necesar ca:

$a-x \geqslant 0,\ b-x \geqslant 0,\ \ a+b-2x \geqslant 0$, adică $x \leqslant a$;

$x \leqslant b$ și $x \leqslant \dfrac{a+b}{2}$, adică domeniul în care căutăm soluțiile inecuației date va fi $D=(-\infty, \lambda] \subseteq R$, unde $\lambda = \min\left\{a, b, \dfrac{a+b}{2}\right\}$.

În D ambii membri ai inecuației sînt pozitivi, deci soluțiile inecuației date sînt și soluțiile inecuației obținute prin ridicarea la pătrat.

$(a-x)+(b-x)+2\sqrt{(a-x)(b-x)} \leqslant a+b-2x$,

adică

$$\sqrt{(a-x)(b-x)} \leqslant 0.$$

Această ultimă inecuație nu poate fi satisfăcută strict, întrucît primul membru este nenegativ. Atunci soluția ei va fi a dacă $a<b$, sau b dacă $b<a$.

Fie acum, ca alt exemplu, de rezolvat inecuaţia:

2. $\sqrt{8-x^2}-\sqrt{25-x^2} \geqslant x.$

În primul rînd, din motivele arătate mai sus, trebuie să căutăm soluţia inecuaţiei date pe mulţimea D definită de

$$\begin{cases} 8-x^2 \geqslant 0 \\ 25-x^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

adică $D = [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \cap [-5,5] = [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.

Inecuaţia dată o punem sub forma echivalentă

a) $\sqrt{8-x^2} \geqslant x+\sqrt{25-x^2}.$

Să examinăm membrul drept al acestei inecuaţii. Pentru valorile pozitive din D ale lui x, acest termen este evident pozitiv. Pentru valorile negative ale lui $x \in D$, valoarea minimă a acestui termen este atinsă în $x = -2\sqrt{2}$, căci ambii termeni sînt crescători în acest subinterval; această valoare minimă este însă pozitivă, astfel că membrul drept al inecuaţiei (a) este pozitiv peste tot în D. În aceste condiţii putem ridica inecuaţia la pătrat, ceea ce conduce la:

b) $-x^2-17 \geqslant 2x+\sqrt{25-x^2}$

Această ultimă inecuaţie nu poate fi adevărată în $D_+ = [0, 2\sqrt{2}]$, întrucît un număr pozitiv (membrul drept) nu poate fi inferior unuia strict negativ.

Pentru $x \in -D = [-2\sqrt{2}, 0]$ valoarea minimă a membrului drept va fi $-4\sqrt{2}\sqrt{17} = -\sqrt{544}$, iar cea maximă a primului membru este -17, deci există, în principiu, posibilitatea de a exista soluţii ale inecuaţiei. Pentru a găsi aceste soluţii vom împărţi (b) cu x (bineînţeles schimbînd sensul inegalităţii) şi, ţinînd seama că acum ambii membrii ai inecuaţiei obţinute vor fi pozitivi, vom ridica din nou inecuaţia la pătrat, obţinînd:

$$\frac{x^4-34x^2+289}{x^2} \leqslant 100-4x^2 \quad \text{sau,} \quad (x^2>0)$$

$$5x^4-66x^2+289 \leqslant 0,$$

ceea ce este imposibil, aşa cum se poate vedea uşor (33^2 — — 5,289 < 0). Deci inecuaţia dată nu are soluţii.

Analize analoage trebuie făcute în toate cazurile de inegalităţi.

B. PROBLEME PROPUSE

Să se rezolve inecuaţiile :

3. $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-9} + \sqrt{5-x}$

4. $\frac{(1+x)(2+x)}{x^2 - |x| - 2)} > -3x$

5. $\frac{2x+3}{x-1} > \frac{x+2}{2x-3}$

6. $\frac{x^2-1}{\sqrt{13-x^2}} \geqslant x-1$

7. $\frac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4} > -2$

8. $\sqrt{(x-3)(2-x)} < 2+3x$

9. $\frac{x-1}{x+3} \geqslant \frac{2x+1}{3x-2}$

10. $\log_{\sqrt{3}} \frac{2x-1}{x+1} < 0$

11. $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^2-2x}{2x-1} < 0$

12. $\log_3^2 (x^2-2x) > 1$

13. $\sqrt{\frac{10\,g_2\sqrt{x}}{x}} > 2$

14. $\lg_{\sqrt{x^2-4x-5}} \frac{x-1}{3} > 0$

15. $\lg_{3x-2} \frac{5x-4}{x-2} > 1$

16. $(\lg_x 3)(\lg_{3x} 3)(\lg_3 9x) > 1$

17. $\lg_{2x-5}\left(\frac{3+8}{x-3}\right)^2 > 0$

Să se determine domeniul plan ale cărui puncte (x, y) satisfac inegalitățile :

18. $\lg_x(\lg x) > 0$

19. $\lg_x(\lg x - 1) > 0.$

20. Să se afle toate numerele complexe de forma $z = x + iy$, cu $x, y \in Z$, care satisfac inegalitatea :

$$\left|\frac{239 + 2i}{40 - 30i} - z\right| < \frac{1}{4}.$$

21. Să se determine valorile lui a pentru care inecuația

$$\frac{ax - a(1-a)}{a^2 - ax - 1} > 0$$

este adevărată pentru orice x de modul subunitar.

22. Să se determine valorile lui a pentru care inecuația $ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$
este satisfăcută de orice $x \in [-2,2]$.

Să se rezolve inecuațiile următoare :

23. $4^{\sin^2 \pi x} + 3 \cdot 4^{\cos^2 \pi x} \leqslant 8$

24. $\lg_2(4^x + 5 \cdot 2^x + 2) > 2.$

25. $\lg_{3x^2+1} 2 < \frac{1}{2}$

26. $\lg_{x^2} \frac{4x-5}{x-2} \geqslant \frac{1}{2}$

27. $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x 30^x$

28. $\lg_2 \lg_3 \frac{x+1}{x-1} < \lg_{1/2} \lg_{1/3} \frac{x-1}{x+1}$

29. $\sqrt{\lg_a \frac{3-2x}{1+x}} < 1$

30. $6x^2 + 3x\, 2^{\sqrt{x}} + 3 < x^2\, 2^{\sqrt{x}+1} + 9x + 2^{\sqrt{x}}$

31. $\lg_3 \frac{|x^2 + 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \geqslant 0$

32. $\lg_{tgx}\lambda^2 < \lg_{tgx}(\lambda^3 tg^4 x)$ cu $\lambda \in R_+$.

Să se rezolve inecuaţiile :

33. $\lg (x - 3x^2) < 0$

34. $e^{2x} + 3e^x - 4 < 0$

35. $\ln \frac{x+1}{x-1} < 0$

36. $\lg_x (x^2 - x - 1) \geqslant 1$

5. STUDIUL POLINOAMELOR

A. Numeroase probleme asupra polinoamelor sînt legate de proprietăţile de divizibilitate şi de identificare.

În prima categorie de probleme se utilizează foarte adesea identitatea împărţirii $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$, unde gr $P(x) >$ gr $Q(x)$ şi gr $Q(x) >$ gr $R(x)$, $P(x)$ fiind polinomul deîmpărţit, $Q(x)$ polinomul împărţitor şi $R(x)$ polinomul rest. De asemenea, în multe probleme referitoare la divizibilitate este de mare utilitate algoritmul lui Euclid de aflare a codivizorului maxim a două polinoame. În esenţă acest algoritm constă în împărţirea polinoamelor unul la altul şi apoi a împărţitorului la rest pînă cînd împărţirea se face exact; ultimul împărţitor cu care împărţirea se face exact este cel mai mare divizor comun al polinoamelor cu care s-a început algoritmul.

În a doua categorie de probleme se utilizează în special definiţia egalităţii polinoamelor (egalitatea tuturor coeficienţilor) de unde se deduce şi teorema rădăcinilor conjugate (iraţional sau complex).

În acest paragraf polinoamele sînt date peste Q (adică coeficienţii sînt numere raţionale.

B. PROBLEME PROPUSE

1. Să se arate că polinomul $P(x) = nx^{n+3} + (n-1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} - (n+1)x^n + x^2 + 2x + 1$ este divizibil cu $(x^2 - 1)^2$.

2. Să se arate că polinomul
$P(x) = (2n - 1)x^{2n+2} - 2(n - 1)x^{2n+1} - (2n + 1)x^{2n} + 2nx^{2n-1}(x - 1)^2$ este divizibil cu $(x^2 - 1)^2$.

3. Să se arate că polinomul
$P(x) = [x^{4n+3} + x^{2n+1} - x^n]^2 - x^{n+2}$
este divizibil cu $x^2 + x + 1$.

4. Să se arate că polinomul
$P(x) = [(x + 1)^{6n+1} + x^2 + 1)]^p - x^3$
este divizibil cu $x^2 + x + 1$.

5. Să se demonstreze că polinomul
$P(x) = (1 + x)^{6m+1} - (1 + x)^{6n+1}$
este divizibil cu $x^2 + x + 1$ pentru orice $m, n \in N$. Să se determine cîtul acestei diviziuni.

6. Să se arate că polinomul
$P(x) = x^{n-1}(x^4 - 6) + 5x^n(1 + x - x^2) - 2x^4 + 9x^3 - 6x^2 - 11x + 6$ este divizibil cu $x^3 - 4x^2 + x + 6$.

7. Să se determine λ și μ, astfel ca polinoamele
$P(x) = x^5 + x^4 - \lambda x^3 - \mu x^2 + x - 3$ și
$Q(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 6$
să admită drept codivizor maxim un polinom de gradul al doilea.

8. Să se arate că polinomul
$P(x, y, z) = (x + y + z)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1}$
este divizibil cu $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

9. Să se găsească o condiție necesară și suficientă pentru ca $x^m - a^m$ să se dividă cu $x^n - a^n (m, n \in N)$.

Să se descompună în factori inductibili peste Q următoarele polinoame:

10. $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$.

11. $8x^5 + 4x^4 - 10x^3 - x^2 + 4x - 1$

12. $x^4 + 4x^3 - 26x^2 - 60x + 225$.

13. Se dă polinomul $P(z) = (z + i)^n + (z - i)^n$.

a) Să se calculeze $\frac{1}{2^{n/2}} P(1)$ și să se arate că această expresie ia numai patru valori diferite de zero cînd $n \in N$;

b) Să se rezolve ecuația $\frac{P(z)}{(z-i)^n} = 0$;

c) Să se arate că rădăcinile lui $P(z)$ pot fi puse sub forma $z_k = \operatorname{ctg} a_k$, unde a_k sînt arce cuprinse între 0 și 2π.
d) Să se transforme în produs expresia $1 + z_k + z_k^2 + z_k^3$.

14. Să se arate că polinomul
$P(x) = x(x^{n-1} - na^{n-1}) + a^n(n-1)$ este divizibil în $(x-a)^2$.

15. Să se găsească o condiție necesară și suficientă ca $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + kxyz$ să se dividă cu $x + y + z$.

16. Să se studieze divizibilitatea polinomului
$P(x) = x^{4a} + x^{4b+1} + x^{4c+2} + x^{4d+3}$ $(a, b, c, d \in N)$, cu $x^3 + x^2 + x + 1$.

17. Pentru ce valori ale parametrilor p și q, binomul $x^4 + 1$ este divizibil cu $x^2 + px + q$.

18. Fie $x_1 = 1, x_2, x_3 \ldots x_n$ rădăcinile polinomului $P(x) = x^n - 1$

Să se arate că $\prod_{k=2}^{n} (1 - x_k) = n$.

19. Fie $x_1, x_2 \ldots x_n$ rădăcinile polinomului

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

Să se calculeze expresia:

$$E = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k - 1}.$$

20. Să se arate că dacă x_i $(i = 1 \ldots n)$ sînt rădăcinile polinomului

$$P(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots p_{n-1} x + p_n; \ (p_i \in R),$$

atunci:

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i^2) = (1 - p_2 + p_4 \ldots)^2 + (p_1 - p_3 + p_5 \ldots)^2.$$

21. Să se găsească o condiție necesară și suficientă pentru ca ecuațiile:

$$x^3 + px + q = 0$$

$x^3 + p_1 x + q_1 = 0$ să aibă o rădăcină comună.

22. Să se găsească o condiție pentru ca polinomul

$$P(x) = (x^2 - m)(a + x)^2 + a^2x^2; \quad (a, m \in R_+)$$

să aibă toate rădăcinile reale și în această condiție să se determine numărul rădăcinilor pozitive și negative.

23. Să se găsească rădăcinile ecuației

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0, \text{ dacă:}$$

a) $x_1^2 = x_2x_3$;
b) $x_1 = x_2 + x_3$.

Să se găsească coeficientul lui x^k în polinoamele:

24. $P(x) = \sum_{k=0}^{n} (1 + x)^k$.

25. $P(x) = [(k - 2)x^2 + nx - k](x + 1)^n$

26. $P(x) = (\sum_{k=0}^{n} x^k)(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k)$.

27. $P(x) = [\sum_{k=0}^{n} (k + 1) x^k][\sum_{k=0}^{n} (k + 1) x^k]$.

28. Să se găsească restul împărțirii polinomului $P(x)$ ($gr\, P(x) > 3$) cu $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ dacă restul împărțirii lui $P(x)$ cu $x - x_1$ este r_1, cu $x - x_2$ este r_2 și cu $x - x_3$ este r_3.

29. Să se arate că dacă gr $P(x) \leqslant m - 2$ și x_i $(i = 1, \ldots n)$ sînt numere arbitrare diferite între ele, atunci avem

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{P(x_i)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (x_i - x_k)} \right] = 0.$$

30. Să se arate că orice polinom $P(x)$ de gradul n poate fi reprezentat sub forma:

$$P(x) = P(0) + \frac{x}{1!} \Delta P(0) + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 P(0) + \ldots +$$
$$+ \frac{x(n-1)\ldots(x-n+1)}{n!} \Delta^n P(0)$$

și să se găsească expresiile mărimilor $\Delta^k P(0)$.

31. Se dă polinomul : $P(x) = x^4 - 8x^3 - 18x^2 + mx - 175$ care are rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 şi se cere :

a) să se afle m dacă $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$ şi apoi să se rezolve ecuaţia $(Px) = 0$;

b) Să se formeze ecuaţia $Q(y) = 0$ care are ca rădăcini inversele rădăcinilor ecuaţiei $P(x) = 0$.

6. PROBLEME REFERITOARE LA NUMERE ANALIZĂ COMBINATORIE

A. În acest paragraf sînt reunite probleme diverse privind proprietăţi ale numerelor din diferite mulţimi (naturale, întregi, reale complexe). Astfel, se propun probleme referitoare la divizibilitate, la proprietăţile numerelor complexe, la logaritmii numerelor etc. Metodele utilizate în aceste probleme au un caracter mai specific, unele din ele ajungînd să poată fi considerate ca nestandard, deci implicînd dificultăţi de natură logică mai mari.

B. PROBLEME PROPUSE

1. Să se arate că

$$E = \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} \in Z.$$

2. Să se găsească valorile întregi ale lui x pentru care expresia $E = 2^{18} + 2^x + 2^{1800}$ este pătrat perfect.

3. Să se găsească cel mai mare număr întreg x, astfel ca expresia $E = 4^{27} + 4^{1000} + 4^x$ să fie pătrat perfect.

4. Să se arate că pentru orice $n \in N$ expresia $(\sqrt{2} - 1)^n$ poate fi pusă sub forma $\sqrt{m} + \sqrt{m - 1}$ cu $m \in N$.

Să se calculeze sumele :

5. $S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots$, $S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots$

6. $S_0 = C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$, $S_1 = C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots$

7. Să se calculeze:

$$\sum_{k=2}^{1975} \frac{1}{\lg_k N}, \text{ unde } N = 1975!$$

8. Să se calculeze $\lg_{12} 18$ cînd se cunoaşte $\lg_{16} 54 = a$.

9. Să se pună sub formă trigonometrică următoarele numere complexe:

$$1 + i\sqrt{3};\quad 1 - i\sqrt{3}; -1 + i\sqrt{3};\quad 1 + i;\quad 1 - i;$$

$$1 + \cos\alpha + i\sin\alpha;\ 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha;\ 1 + \sin\alpha + i\cos\alpha.$$

10. Să se determine valorile lui x şi y pentru care

$$z_1 = 3x + 2y + 1 + i(5x + 6y - 3) \text{ şi}$$

$$z_2 = 2x + 4y - 2 - i(3x - y + 2)$$

sînt unul conjugatul celuilalt.

11. Pentru ce valori ale lui x şi y numerele $z_1 = 5 + ix^3y^2$; $z_2 = x^3 + y^2 - 6i$ sînt complex conjugate?

12. Să se arate că numărul

$E = 11^{k+2} + 12^{2k+1}$ e divizibil cu 133, pentru orice $k \in N$.

13. Să se arate că expresia $E = 12^{n+1} + 13^{2n-1}$ este divizibilă cu 157, pentru orice $n \in N$.

14. Să se arate că numărul natural $E = 5^{2n-1} + 5^{5n+1} + 5^{5n}$ este divizibil cu 31, pentru orice $n \in N$.

15. Se dă numărul $x = 0,(10)$ scris în baza 3 şi se cere transcrierea lui în baza 2.

16. Care sînt ultimele trei cifre ale numărului 13^{101} din baza 10 atunci cînd e transcris în baza 3.

17. Să se arate că

$$\frac{1}{1!(2n-1)!} + \frac{1}{3!(2n-3)!} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)!\cdot 1!} = \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}.$$

18. Fie obiectele a_{ijk} marcate de indicii i, j şi k luînd valorile 1, 2 şi 3. Să se arate cîte asemenea obiecte diferite sînt în cazul general şi atunci cînd

a) $a_{ijk} = a_{jik} = a_{ikj} = a_{kji} = a_{kij} = a_{jki}$ (complet simetrice)

b) $a_{ijk} = a_{jki} = a_{kij} = -a_{ikj} = -a_{jik} = -a_{kji}$ (complet antisimetrice).

În cazul (b) să se arate şi cîte obiecte au modulul diferit.

19. Fie obiectele C_{ij}^{rs} marcate din indicii i, j, r, s care iau valorile 1, 2, 3. Aceste obiecte satisfac relaţiile de simetrie

$$C_{ij}^{rs} = C_{ji}^{rs} = C_{ij}^{sr} = C_{rs}^{ij}\,.$$

Să se determine numărul obiectelor C_{ij}^{rs} diferite între ele.

20. Fie obiectele R_{ijkl} marcate de indicii i, j, k, l care iau valorile 1, 2, 3. Aceste obiecte satisfac relaţiile:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}\,;\quad R_{ijkl} = -R_{ijkl}\,;\quad R_{ijlk} = R_{klij}$$

Se cere să se afle cîte asemenea obiecte diferite ca modul şi diferite de zero există.

21. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k+1}\, C_n^k = \frac{n}{n+1}\,.$$

22. Să se arate că

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_m^k (n-k)^n = \begin{cases} 0 & \text{dacă } m < n \\ m\,! & \text{dacă } m = n \end{cases}$$

23. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = C_{n+1}^2 + 2\,(C_n^2 + C_{n-1}^2 + \ldots C_2^2) = C_{n+1}^2 + 2\sum_{k=2}^{n} C_k^2.$$

24. Să se arate că pentru orice a, b, $c \in R_+$ avem $a + b + c \geqslant$

$$\geqslant \sqrt[s]{a^m\, b^n\, c^p} + \sqrt[s]{a^n\, b^p\, c^m} + \sqrt[s]{a^p\, b^m\, c^n}\,,$$

unde $s = m + n + p$.

25. Să se arate că dacă $p_i + q_i = 1$ $(i = 1,2,\ldots n)$, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i = npq - \sum_{i=1}^{n} (p_i - p)^2,$$

unde $p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$; $q = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i$.

Să se demonstreze relațiile

26. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

27. $\left(\sqrt[5]{\frac{1}{5}} + \sqrt[5]{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = (1 + \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{8})^{\frac{1}{5}}$

28. Fie $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

Să se arate că

a) $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

b) $u_{2n-1} = u_n^2 + u_{n-1}^2$.

29. Să se arate că

$$\lg_{a_1 a_2 \dots a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\lg_{a_1} x} + \frac{1}{\lg_{a_2} x} + \dots \frac{1}{\lg_{a_n} x}}$$

30. Se dă o progresie aritmetică $\{a_n\}$ și una geometrică $\{b_n\}$, formate din numere pozitive și $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$.
Să se arate că $a_n \leqslant b_n \; \forall \, n > 2$.

31. Patru numere pozitive formează o progresie aritmetică. Produsul primului număr cu al patrulea este egal cu rădăcina ecuației

$$3^{x-3} - 3^{\frac{x-1}{2}} + 27 = 3^4$$

iar suma pătratelor termenilor al doilea și al treilea este cu 29 mai mare decît numărul care reprezintă rangul termenului independent de y din dezvoltarea binomului :

$$\left[\frac{y+1}{y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{1}{3}} + 1} - \frac{y-1}{y - y^{1/2}}\right]^{10}$$

Să se determine aceste patru numere.

32. Să se scrie sub formă condensată sumele

$$S_1 = 1!3 + 2!7 + \ldots + n!(n^2 + n + 1)$$

$$S_2 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}.$$

33. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ un şir de numere pozitive în progresie geometrică crescătoare, iar p un număr natural.

a) Să se arate că raportul sumelor

$$S_n = \frac{1}{a_2^p + a_1^p} + \frac{1}{a_3^p + a_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}^p + a_n^p}$$

$$S'_n = \frac{1}{a_2^p - a_1^p} + \frac{1}{a_3^p - a_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}^p - a_n^p}$$

nu depinde de n.

b) Să se determine raţia progresiei date, astfel ca

$$\frac{a_n}{a_{n-2} + a_{n+2}} = \frac{4}{17}.$$

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

d) Fie $R_n = \frac{S_n}{S'_n}$. Să se calculeze $\lim\limits_{p\to\infty} R^p$.

7. STRUCTURI ALGEBRICE. ALGEBRĂ LINIARĂ

A. Problemele din acest domeniu, care se propun la concursuri nu se îndepărtează, de regulă, prea mult de la definiţii, axiome şi teoreme, astfel încît o bună cunoaştere a acestor elemente, privind structurile abstracte ale algebrei, sînt suficiente (în condiţiile unei abilităţi calculatorii corespunzătoare) pentru soluţionarea lor.

B. PROBLEME PROPUSE

1. Fie un grup $(G, *)$ cu proprietatea $\forall, a, b \in G$, $(a * b)^2 = a^2 * b^2$.

Să se arate că acest grup e comutativ.

2. Să se studieze comutativitatea unui grup $(G, *)$ în care

$$(a * b)^3 = a^3 * b^3.$$

3. În mulțimea Z^2 a perechilor ordonate (a, b) de numere întregi se definesc operațiile $*$ și $\odot$, astfel ca:

$$(a,b) * (a',b') = (a + a',\ b + b');$$

$$(a,b) \odot (a',b') = (aa',\ 0).$$

Să se arate că $(Z^2, *, \odot)$ este un inel comutativ.

4. Notînd cu $Z/(k)$ mulțimea claselor de resturi modulo 5 și cu $[1]$, $[2]$ clasele de echivalență cu $1, 2, \ldots$ (mod. k) să se arate că $[0]$, $[3]$, $[6]$ și $[9]$ ale inelului $Z/(12)$ formează un subinel al lui $Z/(12)$. Să se scrie tabelele adunării și înmulțirii și să se verifice că acest subinel este izomorf în $Z/(4)$.

Să se descompună în factori primi în $Z/(5)$ polinoamele definite pe $Z/(5)$:

5. $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

6. $Q(x) = x^2 + 4.$

7. Să se afle cel mai mare divizor comun în $Z/(5)$ al polinoamelor

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2;$$

$$Q(x) = x^2 + 4;$$

$$R(x) = 2x^2 + 3.$$

Să se determine care din polinoamele următoare sînt prime în corpurile indicate. Cele care nu sînt prime să se descompună în factori.

8. $x^2 + x + 1$ definit pe $Z/(2)$, $Z/(3)$ și $Z(5)$.

9. $x^3 + x + 1$ definit pe $Z/(2)$, $Z/(5)$ și $Z/(11)$.

Să se rezolve în $Z/(5)$ următoarele sisteme de ecuații definite pe $Z/(5)$:

10. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 3z = 4 \end{cases}$

12. Fie $C[x]$ mulțimea polinoamelor de variabilă x definite pe corpul arbitrar de numere C. Prin definiție, două polinoame $f(x)$, $g(x) \in C[x]$ sînt congruente (sau echivalente) modulo

$s(x)$ ($s(x) \in C[x]$) scriind $f(x) \equiv g(x)$ (mod. $s(x)$) dacă şi numai dacă $f(x) - g(x) = h(x)\,s(x)$ cu $h(x) \in C[x]$. Clasa de polinoame din $C[x]$, congruente cu $f(x)$ o vom nota cu $[f(x)]$. Să se arate că mulţimea claselor de echivalenţă modulo $s(x)$ este inel comutativ cu unitate faţă de operaţiile:

$$(A)\ [f(x)] + [g(x)] = [f(x) + g(x)];$$

$$(M)\ [f(x)][g(x)] = [f(x)\,g(x)].$$

13. Notînd cu $C[x]/(s(x))$ inelul din problema precedentă, să se arate că acest inel este corp dacă şi numai dacă $s(x)$ este prim peste corpul C.

14. Utilizînd notaţiile din ecuaţiile precedente, fie $C = R$ şi $s(x) = x^2 + 1$. Să se arate că $R[x]/(x^2 + 1)$ este izomorf cu mulţimea numerelor complexe C.

15. Considerăm mulţimea $I = \{u, v, w, t\}$ cu operaţiile:

*	u	v	w	t
u	u	v	w	t
v	v	u	t	w
w	w	t	u	v
t	t	w	v	u

$\odot$	u	v	w	t
u	u	u	u	u
v	u	v	w	t
w	u	w	w	u
t	u	t	u	t

a) Să se arate că această mulţime are structura de inel faţă de operaţiile „*“ şi $\odot$.

b) Să se determine opusele elementelor din I.

16. Se consideră inelul din exerciţiul precedent. Să se studieze variaţia polinomului $P(x) = w \odot x^2 * v$ peste I ($x^2 = x \odot x$).

17. Să se rezolve ecuaţia $vx^2 + w = u$ în inelul definit în problema (15). (înmulţirea $\odot$ şi adunarea $*$ sînt notate obişnuit).

18. Să se arate că mulţimea $F = \left\{\frac{az + b}{cz + d};\ a,\ b,\ c,\ d \in C\right\}$ este grup faţă de operaţia de compunere a funcţiilor.

19. Să se studieze structura mulţimii $E = \{a + b\sqrt{3};\ a,\ b \in Q\}$ înzestrată cu operaţiile:

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) \oplus (a_2 + b_2\sqrt{3}) = a_1 + a_2 - 1 + (b_1 + b_2 + 1)\sqrt{3};$$
$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) \odot (a_2 + b_2\sqrt{3}) = a_1a_2 + 3b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3}.$$

20. Să se arate că matricea $B = LAL^{-1}$ are proprietatea $S(B) = S(A)$, unde $S(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots a_{nn}$, iar

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{22} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \qquad L = \begin{Vmatrix} l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & l_{2n} \\ - & - & - & - \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{nn} \end{Vmatrix}, \ \det L \neq 0$$

21. Să se rezolve şi să se discute sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 + 7x_5 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 9x_4 + 7x_5 = \lambda. \end{cases}$$

22. Să considerăm inelul M_2 al matricelor pătrate de ordinul 2 cu elementele numere complexe, faţă de operaţiile obişnuite de adunarea şi înmulţirea matricilor. Dată matricea $M \in M_2$

$$M = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix} \text{ cu } \beta \neq 0.$$

Să se arate că o condiţie necesară şi suficientă pentru ca matricea

$$B = \begin{Vmatrix} x & y \\ z & t \end{Vmatrix}$$

să satisfacă relaţia $MB = BM$, este ca să existe un număr k, astfel ca $y = k\beta$; $z = k\gamma$, $x - t = k(\alpha - \delta)$.

23. Să se demonstreze că mulţimea matricilor B din problema precedentă, care permută cu M, formează un inel.

24. Să se studieze, compatibilitatea următorului sistem de ecuaţii şi, în caz de compatibilitate, să se rezolve:

$$\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = a \\ x + y + az + t = a^2 \\ x + y + z + at = a^3 \end{cases}$$

25. Fie X o mulţime înzestrată cu o lege de compoziţie asociativă, notată multiplicativ şi e elementul neutru.

a) Să se arate că față de legea de compoziție dată, mulțimea $Y \subset X$, avînd un simetric, este grup;

b) Să se arate că mulțimea $A \subset X$ a elementelor care comută cu un element dat a, $(ax = xa)$ este închisă, adică $\forall x \in A$, $y \in A \Rightarrow xy \in A$, și că intersecția $A \cap Y$ este un subgrup al lui Y.

26. Să se găsească numărul de inversiuni al permutării

$$M = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ 1, & 3, & 5, & \ldots & 2n-1 & 2 & 4 & \ldots & 2n \end{pmatrix}$$

27. Dintre toate permutările întregilor $1, 2, \ldots n$ care este permutarea cu numărul maxim de inversiuni?

28. Fie R mulțimea numerelor reale și

$$f_1(x) = x : R \to R,\ f_2(x) = \frac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}} : R - \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \to R$$

$$\text{și } f_3(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{1 + x\sqrt{3}} : R - \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \to R.$$

Să se arate că $M = \{f_1, f_2, f_3\}$ este grup față de operația de compunere a funcțiilor. (Acțiunea celor trei funcții se consideră pe intersecția domeniilor lor de definiție) și că acest grup este izomorf cu grupul multiplicativ al rădăcinilor cubice ale unității.

29. Să se arate că mulțimea

$$M = \left\{ X = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{1}{2}a^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|;\quad a \in R \right\}$$

este un grup multiplicativ izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

30. Fie $(G_1, +)$ și $(G_2, +)$ două grupuri abeliene. Pe mulțimea $G_1 \times G_2$ se definește operația „$*$".

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in G_1 \times G_2 \Rightarrow (x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

Să se arate că, în raport cu această operație, mulțimea $G_1 \times G_2$ este grup abelian.

31. Să se arate că mulțimea

$$M = \left\{ X = \begin{Vmatrix} a & b \\ 3b & a \end{Vmatrix};\ a,\ b \in Q \right\}$$

este grup multiplicativ izomorf cu grupul multiplicativ

$$Q(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3};\ a,\ b \in Q\}.$$

8. PROBLEME DE CONCURS

1. Se consideră polinomul

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + \lambda x^2 - 2x + 1;\ \lambda \in R.$$

a) Să se determine λ astfel ca polinomul să admită o rădăcină dublă diferită de 1 sau -1;

b) Să se calculeze expresia

$$x_1^n + x_2^n,$$

unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile complexe ale polinomului.

(Electrotehnică, Craiova, 1966)

2. Să se calculeze $x^n + y^n$, unde:

$$x = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ y = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};\ n \in N.$$

3. a) Să se arate că pentru orice $a = 1 + b$; ($b > 0$, a, $b \in R$) și numărul natural $n \geqslant 2$, are loc inegalitatea

$$a^n \geqslant \frac{(a-1)^2}{4} n^2;$$

b) Să se arate, folosind rezultatul de la a), că pentru orice număr natural $n > 2$, avem:

$$\sqrt[n]{n} < \frac{2 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}}.$$

(Matematică, Craiova, 1967)

4. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}) \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}) \end{cases}$$

(Electrotehnică, Craiova, 1968)

5. Se consideră funcţia

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2$$

a) Să se arate că $f(x)$ are o rădăcină reală x_1 şi două rădăcini complexe x_2, x_3;

b) Să se determine trinomul

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

aşa fel ca să avem

$$g(x_1) = x_1,\ g(x_2) = x_3,\ g(x_3) = x_2;$$

c) Notînd $h(x) = g(g(x))$ să se arate că ecuaţia $h(x) - x = 0$ admite ca rădăcini pe x_1, x_2, x_3;

d) Să se arate că $h(x) - x$ e divizibilă prin $f(x)$ şi să se determine cîtul.

(Matematică, Craiova, 1969)

6. Să se separe rădăcinile reale ale ecuaţiei

$$2x^3 - 3x^2 + 6a(1-a)x + 4a^3 + 1 = 0$$

în funcţie de valorile lui $a \in R$.

(Electrotehnică, Craiova, 1970)

7. Să se determine trei numere pozitive, în progresie aritmetică astfel ca suma patratelor lor să fie 35 şi adăugînd 1 la primul număr şi la al doilea şi 3 la al treilea, cele trei numere obţi-

nute să fie în progresie geometrică. Ştiind că cele trei numere ce se cer a fi determinate sînt rădăcini ale polinomului.

$$P(x) = x^5 - 9x^4 + 24x^3 + mx^2 + nx + p.$$

Să se determine m, n, p și să se rezolve ecuația $P(x) = 0$

(Matematică, Craiova, 1971)

8. Să se rezolve ecuația

$$1 + \lg_x \frac{4 - x}{10} = (\lg_{10}\lg_{10} n - 1) \lg_x 10,$$ unde n este natural.

Cîte rădăcini are ecuația pentru un n dat?

(Fizică, Craiova, 1971)

9. Să se determine valorile reale ale parametrului a pentru care dubla inegalitate

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

este satisfăcută oricare ar fi x.

10. Se dă ecuația $2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$.

a) Să se arate că dacă ecuația admite ca rădăcină pe a, atunci ea admite și rădăcina $\frac{1}{a}$;

b) Să se rezolve ecuația dată.

(Electrotehnică, Automatică, subingineri, Craiova, 1971)

11. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3x - 5y}\right)^2 + (2x + y)^2 = 26 \\ 2x + y = 5(3x - 5y) \end{cases}$$

(Şt. Economice, Craiova, 1971)

12. Fie ecuația

$$\frac{2^x - a3^x}{2^x + a3^x} = 2.$$

a) Să se rezolve ecuația;
b) Pentru ce valori ale lui a rădăcina ecuației este număr întreg.

(Șt. Economice, Craiova, 1971)

13. Se consideră trinomul

$$x^2 - 2x \cos a \cos b + \cos^2 b - \sin^2 a \quad \text{cu } a, b \in R.$$

a) Să se arate că trinomul are rădăcini reale pentru orice

$$a, \; b \in R;$$

b) Să se rezolve ecuația;
c) Pentru ce valori ale lui a și b, avem $x_1^2 = x_2^2$, dacă x_1 și x_2 sînt rădăcinile trinomului.

(Șt. Economice, Craiova, 1971)

14. a) Să se formeze ecuația de gradul al doilea cu coeficienți reali pentru care:

$$x_1 = c + i \sin a; \quad (a, c \in R);$$

b) Să se găsească valorile lui a pentru care

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2. \quad \text{(Se va discuta în raport cu } c\text{).}$$

(Ec. Agriculturii, Craiova, 1971)

15. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x \sin a \,(1 + \sin a) = y \cos^2 a \\ x + y = \sin a - 1 \end{cases}$$

a) Să se rezolve sistemul;
b) Să se formeze o ecuație de gradul al doilea ale cărei rădăcini sînt valorile x, y obținute la punctul a;
c) Să se determine $a \in [0, 2\pi]$, astfel ca

$$8xy < \sin a.$$

(Ec. Agriculturii, 1970)

16. Se consideră trinomul $x^2 + mx + m^2 - 1$, $m \in R$ şi se cere să se determine valorile lui m pentru care rădăcinile lui sînt cuprinse între 0 şi 2.

(Matematică, Secţia serală, Craiova, 1971).

17. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{a} \end{cases}$$

a) Să se rezolve sistemul;
b) Fie (x_1, y_1) şi (x_2, y_2), cu $x_1 < x_2$, soluţiile sistemului. Se formează două progresii aritmetice care au primii termeni respectiv x_1, y_1 şi x_2, y_2. Dacă $S_1(n)$ şi $S_2(n)$ sînt sumele primilor n termeni ai celor două progresii, să se determine valorile lui n pentru care $S_1(n)\ S_2(n) > 0$.

(Matematică, Secţia fără frecvenţă, Craiova, 1971).

18. Fie ecuaţia $x^3 - px + q = 0$. Ştiind că $p = \lg_2 8 + 3 \lg_4 16 + 2 \lg_{1/8} 2$, să se determine $q \neq 0$, astfel ca $x_1 x_2 = -5$, unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuaţiei date. Să se rezolve apoi ecuaţia.

19. Se dă ecuaţia

$$(p^2 + 4p + 3)(1 - 2x^2) + 2(3p^2 + 5p - 4)\,x - 5p^2 + 2p - 5 =$$

şi se cer valorile lui p, astfel ca ecuaţia să admită soluţii în intervalul $[-1, 1]$.

(Fizică, Craiova, 1971).

20. Să se arate că

$$\frac{1}{\lg_2 a} + \frac{1}{\lg_3 a} + \frac{1}{\lg_4 a} + \frac{1}{\lg_5 a} = \frac{1}{\lg_{120} a}$$

(Electrotehnică, subingineri, Craiova, 1971).

21. Se consideră ecuaţia

$$(m-1)x^2 - m^2x + m + 1 \quad \text{şi se cere:}$$

a) să se rezolve;

b) să se determine valorile lui m pentru care rădăcinile x_1, x_2 ale ecuaţiei satisfac inegalitatea

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 1.$$

(Şt. Economice, Secţia serală, Craiova, 1971

22. Se dă ecuaţia

$$x^2 - 2(2 + \cos a)x + 2 = 0 \text{ şi se cere:}$$

a) pentru ce valori ale lui a rădăcinile ecuaţiei satisfac relaţia $x_1^2 + x_2^2 = 5$;

b) Să se formeze ecuaţia care are rădăcinile

$$y_1 = \frac{1}{2}x_1^2, \quad y_2 = \frac{1}{2}x_2^2.$$

(Şt. Economice, Secţia serală, Craiova, 1971).

23. Se dă trinomul $y = x^2 + 6x \cos a - 4 \cos a$, $a \in R$ şi se cere:

a) să se afle a, astfel ca $x_1^2 + x_2^2 = 5$, unde x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $y = 0$;

b) Să se arate că dacă avem $1 - 28 \cos a < 0$, atunci ecuaţia $y = 0$ are rădăcini reale.

(Şt. Economice, Secţia serală, Craiova, 1971).

24. Se dă sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{\sin a + 2}{\sin a - 2} \\ x - y = \dfrac{4 \sin a}{\sin^2 a - 4} \end{cases} \qquad a \in [0, 2\pi].$$

şi se cere:

a) să se rezolve sistemul;

b) să se determine a din condiția

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \leqslant -16, \quad (x,\ y \text{ sînt soluțiile sistemului}).$$

(Șt. Economice, Secția serală, Craiova, 1971).

25. Fie ecuația $x^2 - x\sqrt{3}\sin a + \cos a - 2 = 0$ și se cere:
a) să se afle a pentru ca $x_1 x_2 = -(x_1 + x_2)$, x_1, x_2 fiind rădăcinile ecuației;
b) Să se arate că pentru soluțiile găsite la punctul a expresia

$$E = \log A \frac{x^2 - x\cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right) + 1}{x^2 + x\cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right) + 1}, (A > 0)$$

nu depinde de x.

(Șt. Economice, Secția serală, Craiova, 1971)

26. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației

$$x^2 + mx + 1 = 0$$

și, notînd cu $S_n = x_1^n + x_2^n$, se cere să se arate că

$$\sum_{k=0}^{n} S_k = 1 - \frac{m+1}{m+2} S_{n+1} - \frac{1}{m+2} S_{n+2}.$$

Ce devine relația pentru $m = 1 - 2$?

(Fizică, Craiova, 1972).

27. Se dau polinoamele

$$y(x) = (x - 2) - \frac{3}{2}$$

$$z(x) = (x - 2)(x - 5) + \frac{3}{2} \qquad \text{și se cere:}$$

a) Să se arate că dacă x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației $z(x) = 0$, atunci $y(x_1) + y(x_2) = 0$;
b) Să se reprezinte grafic polinoamele $y(x)$ și $z(x)$;

c) Să se arate că pentru orice $k \in R$, una din rădăcinile ecuației $y(x) + kz(x) = 0$ este cuprinsă între x_1 și x_2.

(Electrotehnică, Craiova, 1971)

28. Se dă ecuația $m^2x^2 - m(3x + 1) - (x^2 + 3x + 1) = 0$, $m \in R$ și se cere:

a) Să se determine valorile lui m astfel ca o rădăcină să fie pozitivă și una negativă;

b) Să se determine valorile lui m pentru care rădăcinile verifică relația $x_1 + x_2 = 1$;

c) Pentru ce valori ale lui m ecuația are rădăcini complexe;

d) Să se formeze ecuația care admite rădăcinile

$\frac{1}{x_1^2}$, $\frac{1}{x_2^2}$, unde x_1, x_2 sînt rădăcinile determinate la punctul b).

(Electrotehnică, subingineri, Craiova, 1971).

29. Se dă ecuația $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ și se cere:

a) Să se determine relația dintre coeficienții a, b, c, d, așa fel ca rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale acestei ecuații să se verifice relația $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2x_3 = 1$;

b) Să se determine relația $P(a) = 0$ pe care trebuie s-o satisfacă a dacă în afară de condiția de la punctul a) coeficienții satisfac și relațiile $d = a^2$, $c = 1 + 2a^2$, $b = 2c$.

(Șt. Economice, Craiova, 1972).

30. Se dă ecuația $x^2 - 2(\cos a - 1)x + \cos^2 a + 1 = 0$, $a \in [0, 2\pi]$ și se cere:

a) Să se discute natura rădăcinilor ecuației în funcție de parametrul a;

b) Să se găsească valoarea parametrului a, astfel încît suma rădăcinilor ecuației date să fie maximă și să se precizeze această valoare maximă.

c) Să se găsească valoarea lui a pentru care:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_1x_2} = 1.$$

(Șt. Economice, Craiova, 1972).

31. Fie ecuația $mx^2 - 2(2m + 3)x + 3(m + 2) = 0$, $m \in R$ și se cere:

a) Să se discute natura şi semnele rădăcinilor ecuaţiei;
b) Să se arate că expresia

$$E = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2},$$ unde x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei date, are un semn constant.

(Fizică, Craiova, 1972).

32. Se consideră mulţimea M a tuturor matricilor de forma

$$\begin{Vmatrix} x + 4y & 2y \\ -7y & x - 4y \end{Vmatrix}$$ cu $x, y \in Q$. Să se arate că:

a) Dacă $y = 0$, mulţimea M formează în raport cu adunarea şi înmulţirea matricilor un corp izomorf cu Q;
b) Dacă $x \neq 0$ sau $y \neq 0$, şi A este un element dat din M atunci există un singur element $Z \in M$ pentru care $AZ = A$.

(Matematică, Craiova, 1972)

33. Se consideră ecuaţia $x^3 + px + q = 0$ şi se cere:
a) Relaţia dintre p şi q, ştiind că între rădăcinile x_1, x_2, x_3, ale ecuaţiei există relaţia

$$x_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3};$$

b) Să se rezolve ecuaţia dată ştiind că mai avem şi condiţia

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -\frac{3}{2}.$$

(Matematică, Secţia fără frecvenţă, Craiova, 1972).

34. Să se determine valorile parametrului k pentru care rădăcinile x_1, x_2 ale ecuaţiei

$$(k-3)x^2 - 2(k-6)x + k = 0$$

satisfac relaţia $x_1^2 + x_2^2 - 5(x_1 + x_2) - 1 = 0$.

Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei date după valorile lui k. Să se specifice semnele rădăcinilor pentru valorile lui k determinate mai sus.

(Fizică, Craiova, 1972).

35. Se dau polinoamele :

$$P(x) = x^5 - 7x^4 + 19x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$Q(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + m \quad \text{și se cere :}$$

a) Să se determine m și să se rezolve ecuația $Q(x) = 0$, astfel ca rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale lui $Q(x)$ să fie în relația

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2};$$

b) m fiind înlocuită cu valoarea aflată la punctul a), să se determine a, b, c, astfel ca $P(x)$ să fie divizibil cu $Q(x)$ și să se afle cîtul $P(x)/Q(x) = C(x)$;

c) Să se arate că are loc relația $\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha + 3\alpha\beta = 0$, unde α și β sînt rădăcinile ecuației $C(x) = 0$.

(Șt. Economice, Craiova, 1972).

36. Se dă polinomul

$$P(x) = (x + 1)^n + ax + b \quad \text{și se cere :}$$

a) Să se determine a și b, astfel ca $P(x)$ să fie divizibil cu $x^2 + 1$;

b) Să se particularizeze pentru $n = 4$.

(Șt. Economice, Craiova, 1972).

37. Se consideră ecuația

$x^2 - mx + 2 = 0$, $m \in R$, avînd rădăcinile x_1 și x_2 și se cere :

a) Să se afle valorile lui m, astfel încît să fie satisfăcută relația

$$x_1^3 + x_2^3 > m^2;$$

b) Să se determine m, astfel ca ecuația dată să aibă cel puțin o rădăcină cuprinsă între -1 și 1.

(Șt. Economice, Secția fără frecvență Craiova, 1972).

38. Să se rezolve ecuația

$$\frac{x - a}{b} + \frac{x - b}{a} = \frac{b}{x - a} + \frac{a}{x - b}.$$

(Electrotehnică, subingineri, Craiova, 1972).

39. Să se rezolve ecuaţia $2^{2x-1} - 2^{x-1} \cdot 3^x - 9^x = 0$

(Electrotehnică, Subingineri, Craiova, 1972).

40. Se dă polinomul $P(x) = (x + i)^n + (x - i)^n$, unde n e număr natural şi se cere:

a) Să se rezolve ecuaţia $\frac{P(x)}{(x-i)^n} = 0$;

b) Să se arate că rădăcinile lui $P(x)$ pot fi puse sub forma $x_k = -\text{ctg}\ a_k$, unde a_k sînt unghiuri compuse între 0 şi π;

c) Să se facă calculabilă prin legături expresia $E = 1 + x_k + x_k^2 + x_k^3$, unde x_k sînt rădăcinile calculate la b).

(Matematică, Craiova, 1973).

41. Se dă inecuaţia

$\lg(x + 1) > \lg(6x^2 - 5x + 1)$ şi se cere:

a) Să se determine valorile reale ale lui x pentru care ambii membrii au sens;

b) Să se transforme toţi logaritmii în baza 5 şi să se rezolve inecuaţia;

c) Să se determine soluţiile inecuaţiei în cazul general

$\lg_a (x + 1) > \lg_a (6x^2 - 5x + 1)$, unde $a \in R_+ - \{1\}$.

(Fizică, Craiova, 1973).

42. Se dă funcţia $y(x) = x^2 - 2(\sin \alpha + \cos \alpha)x - (\sin \alpha + \cos \alpha + \cos 2\alpha)$, unde $\alpha \in [0, 2\pi]$ şi se cere:

a) Să se determine valorile lui α pentru care ecuaţia $y(x) = 0$ are rădăcini reale;

b) Pentru ce valori ale lui α funcţia de gradul al doilea $y(x)$ îşi atinge valoarea maximă în punctul de abscisă $x = \sqrt{2}$;

c) Pentru ce valori ale parametrului α, ecuaţia $y(x) = 0$ are rădăcini reale şi de semne contrare.

(Fizică, Craiova, 1973).

43. În mulţimea numerelor reale se consideră legile de compoziţie

$$a \odot b = a \cdot b + a + b, \quad a * b = \frac{ab}{a+b}.$$

a) Să se arate că legile sînt asociative;
b) Să se cerceteze dacă cele două operații admit element neutru;
c) Să se găsească două elemente x și y care verifică relațiile

$$x \odot y = 5$$

$$x * y = \frac{2}{3}.$$

(Fizică-Chimie, Craiova, 1973).

44. Se dă polinomul $P(x) = x^3 - 6x^2 + mx + n$ unde m și n sînt numere reale, și se cere:

a) Să se determine m și n pentru care restul împărțirii lui $P(x)$ la $x + 1$ este egal cu -24, iar restul împărțirii la $x + 2$ este egal cu -60;
b) Pentru valorile lui m și n găsite, să se rezolve ecuația $P(x) = 0$.

(Chimie, Subingineri, Craiova, 1973).

45. Se dă ecuația $2x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ avînd rădăcinile x_1, x_2, x_3 și se cere:

a) Să se formeze ecuația de gradul al treilea care are rădăcinile

$$y_1 = \frac{x_2 + x_3}{x_1},\ y_2 = \frac{x_1 + x_3}{x_2},\ y_3 = \frac{x_1 + x_2}{x_3};$$

b) Să se aproximeze cu două zecimale rădăcina ecuației formate la punctul a) prin metoda coardei;
c) Să se arate că

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = 0.$$

(Chimie, Subingineri, Craiova, 1973).

46. Se dă ecuația $mx^2 + (m - 1)x + m - 2 = 0$ și se cere:

a) Să se determine valorile lui m, astfel ca rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației să fie cuprinse între -1 și 1;

b) Să se determine valorile lui m pentru care ecuația $m \sin^2 \alpha + (m - 1) \sin \alpha + m - 2 = 0$ nu are soluții reale.

(Electrotehnică, Subingineri, 1973).

47. Se consideră matricile

$$A = \begin{Vmatrix} a & 2 & c \\ 1 & -1 & d \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -b & 2 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$$ şi se cere:

a) Să se arate că ele se pot înmulţi;

b) Să se verifice dacă $AB = BA$;

c) Să se determine parametrii reali a, b, c, d, aşa încît să avem relaţia $AB = U_2$, unde U_2 este matricea unitate de ordinul al doilea;

d) Să se spună dacă matricea $C = BA$, calculată cu valorile determinate la punctul c), este nesingulară şi, în caz afirmativ, să se calculeze inversa ei.

(Şt. Economice, Craiova, 1973).

48. Pe mulţimea C a numerelor complexe se definesc operaţiile $x \oplus y = x + y - i$; $x \odot y = mi\,xy + m(x + y) + i\,(i - m)$, cu $m \neq 0$, fixat. Să se arate că mulţimea C înzestrată cu operaţiile $\oplus$ şi $\odot$ date mai sus, este un corp.

(Matematică, Craiova, 1973).

49. Se dă $P(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ şi se cere:

a) Să se determine a şi b, astfel încît $P(x)$ să se dividă cu $x + 3$ şi suma patratelor rădăcinilor ecuaţiei $P(x) = 0$ să fie egală cu 5;

b) Cu valorile a şi b, astfel determinate, să se calculeze expresia

$$E = \frac{(u^3 + v^3 + 8i)(u + v + i)}{2},$$

unde u şi v sînt rădăcinile complexe ale ecuaţiei $P(x) = 0$.

(Fizică, Craiova, 1973).

50. a) Să se formeze ecuaţia de gradul II ale cărei rădăcini x_1 şi x_2 satisfac relaţiile $4x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 4 = 0$, $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = \frac{1}{m}$, $m \in R$, fiind dat;

b) Să se determine m, astfel ca $x_1^2 + x_2^2 = 11$;

c) Să se verifice relația de la punctul b) cu valoarea găsită a lui m, calculînd rădăcinile.

(Fizică, Craiova, 1973).

51. Să se simplifice expresia

$$E = \frac{\frac{x}{8y^3} + \frac{1}{4y^2}}{x^2 + 2xy + 2y^2} - \frac{\frac{x}{8y^3} - \frac{1}{4y^2}}{x^2 - 2xy + 2y^2} -$$

$$- \frac{1}{4y^2(x^2 + 2y^2)} + \frac{1}{4y^2(x^2 - 2y^2)}$$

și să se calculeze valoarea ei numerică pentru $x = \sqrt[4]{2}$, $y = \sqrt[8]{3}$.

(Chimie, Subingineri, Craiova, 1973).

52. Se consideră trinomul $f(x) = (m - 1)x^2 + 2(m + 1)x + 2m - 2$, m fiind un parametru real, și se cere:

a) Să se discute natura și semnul rădăcinilor în funcție de parametrul m;

b) Să se determine valorile lui m, pentru care $f(x)$ este pozitiv pentru orice $x \in R$.

(Chimie, Subingineri, Craiova, 1973).

53. Se consideră sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x + y + z = 3(5 - m^2) \\ -x + z = 4m \\ x - 2y + z = 0, \end{cases}$$ unde $m \in R$, și se cere:

a) Să se rezolve sistemul;

b) Să se determine m, astfel ca soluția (x, y, z) găsită la punctul a) să verifice relația

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = 108;$$

c) Pentru ce valori ale lui m are loc relația $\frac{x+3}{z+3} \geqslant 1$.

(Chimie, Subingineri, Craiova, 1973).

54. Să se arate că ecuația $8mx^2 - 2(m^2 + 2m + 1)x + m^2 + 1 = 0$ are rădăcini reale, oricare ar fi m, real.
Să se determine valorile lui m, astfel ca să fie îndeplinită relația $\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \leqslant 4$.

(Chimie, Subingineri, Craiova, 1974).

55. Să se discute natura și semnul rădăcinilor ecuației $mx^2 + 2x + m + 1 = 0$ după valorile parametrului real m.

(Electrotehnică, Craiova, 1973).

56. Se dă ecuația $2x^3 + 3x^2 - 12x + m = 0$, unde m este un parametru real. Se cere:

a) Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuației după valorile parametrului m;
b) Să se determine m astfel ca ecuația să aibă o rădăcină dublă pozitivă și să se rezolve.

(Electrotehnică, Craiova, 1973).

57. Se consideră trinomul $y(x) = m^2x^2 - 2(m-1)x + 1$, unde m este un parametru real, și se cere:

a) Să se discute natura și semnul rădăcinilor trinomului, după valorile lui m;

b) Să se determine m, astfel ca rădăcinile x_1, x_2 ale trinomului să satisfacă relația $x_1^2 + x_2^2 = 0$;

c) Să se afle valorile lui m pentru care produsul rădăcinilor trinomului este mai mic decît 2.

(Electrotehnică, Subingineri, Craiova, 1973).

58. Se dă ecuația $x^2 - 2mx + 2m^2 - 1 = 0$, $m \in R$, și se cere:

a) Să se discute natura și semnul rădăcinilor ecuației, în funcție de m;

b) Să se determine m, astfel ca $x_1^2 + x_2^2 < 2$;

c) Pentru $m = \cos \alpha$, să se determine $\alpha \in [0, 2\pi]$, astfel ca ecuația să aibă rădăcini reale și egale;

d) Să se determine α, astfel ca între rădăcini să existe relația $x_1 = -x_2$;

e) Să se determine α, astfel ca $x_1 = \frac{1}{x_2}$.

(Electrotehnică, Subingineri, 1973).

59. Să se rezolve ecuația $4^x + 6^x = 9^x$

(Șt. Economice, Craiova, 1973).

60. Se consideră funcția $f(x) = (3 + 2\cos a - 2\sin a)x^2 - 2(\cos a + \sin a)x + 1$, a fiind un parametru real, și se cere:

a) Să se arate că $f(x) \geqslant 0$, oricare ar fi x real;

b) Să se determine a, astfel ca $f(x)$ să admită un minim egal cu $1/5$.

(Șt. Economice, Craiova, 1973).

61. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0 \\ x + by + b^2z + b^3 = 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0, \end{cases}$$ unde $a \neq b \neq c$.

(Șt. Economice, Secția fără frecvență Craiova, 1973).

62. Fie polinomul $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + m$, $m \in R$. Se cere:

a) Să se determine m știind că suma a două rădăcini ale ecuației $P(x) = 0$ este egală cu 3 și să se rezolve ecuația;

b) x_3 și x_4 fiind rădăcinile complexe ale polinomului $P(x)$ (pentru m determinat mai înainte), să se arate că

$$x_3^n + x_4^n = 2\cos\frac{n\pi}{3};$$

c) Să se discute, în funcție de m, numărul rădăcinilor reale ale ecuației $P(x) - 2x^2 + 5x = 0$.

(Matematică, Craiova, 1974).

63. Se notează cu x_1 și x_2 rădăcinile ecuației

$x^2 - \left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right]x + \frac{1}{2} - \sin^2\alpha = 0$ și se cere:

a) Să se arate că este verificată relația

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} = 2\sin\alpha;$$

b) Să se determine α din condiția $\dfrac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} = 2\sin\alpha.$

(Fizică, Craiova, 1974).

64. Fie x_1 și x_2 rădăcinile trinomului $f(x) = 10x^2 - x - 3$. Folosind relațiile dintre rădăcinile și coeficienții trinomului, să se calculele valoarea expresiei

$$E = \frac{(3x_1 + 1)(3x_2 + 1)}{(2x_1 - 9)(2x_2 - 9)} + x_1^2 + x_2^2.$$

(Chimie, Subingineri, Craiova, 1974).

65. Să se efectueze

$$E = \frac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 - i)^2}.$$

(Chimie, Subingineri, Craiova, 1974)

66. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ \lg x - \lg y = 2 \end{cases}$$

(Chimie, Subingineri, Craiova, 1974).

67. Se dă ecuația

$\dfrac{x^2 - m^2}{1 + m} - \dfrac{2x - 2}{m^2 - 1} + m = 1$, unde $m \in R$, și se cere:

a) Să se determine valorile parametrului m pentru care suma patratelor rădăcinilor ecuației este egală cu 5;

b) Să se determine valorile lui m pentru care rădăcinile ecuației au același semn.

(Electrotehnică, Subingineri, Craiova, 1974).

68. Fie ecuația $(m-2)x^2-(m+2)x+2(m-4)=0$, cu rădăcinile x_1 și x_2, și se cer valorile parametrului m pentru care:

a) $x_1=-x_2$; b) $x_1=\frac{1}{x_2}$; c) $x_1=x_2$; d) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$.

(Electrotehnică, Subingineri, Craiova, 1975).

69. Notînd cu x_1, x_2 rădăcinile ecuației $2x^2-3x+5=0$, să se calculeze

$$E=\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}+\frac{x_1}{1+x_2}+\frac{x_2}{1+x_1}-\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)^2,$$ fără a rezolva ecuația.

(Electrotehnică, Subingineri, Craiova, 1974).

70. Se consideră sistemul

$$\begin{cases} -m^2x+y+z=1 \\ x-m^2y+z=1 \\ x+y-m^2z=1 \end{cases}$$

unde m e un parametru real, și se cere:

a) Să se rezolve sistemul; discuție;

b) Să se determine m, astfel ca soluțiile sistemului să fie numere raționale.

(Șt. Economice, Craiova, 1974).

71. Ecuația $x^2+px+1=0$ are soluțiile $x_1=\operatorname{tg}\alpha$, $x_2=\operatorname{ctg}\alpha$ și se cere:

a) Să se scrie ecuația de gradul al doilea în y care are rădăcinile $y_1=\sin 2a$, $y_2=\cos 4a$;

b) Să se arate că între x_1, x_2, y_1, y_2, există relația

$$(1 + x_1)^2 + (1 + x_2)^2 = 8 \frac{1 + y_1}{1 - y_2}.$$

(Șt. Economice, Craiova, 1974).

72. Să se discute natura și semnele rădăcinilor trinomului $mx^2 - 2(m + 1) + m$ după valorile parametrului real m.

(Șt. Economice, Secția serală, Craiova, 1971).

73. Să se afle valorile lui x, pentru care:
$\lg \sin 2x - \lg \sin x = \lg \cos 2x - \lg \cos x + 2 \lg 2.$

(Șt. Economice, Secția serală, Craiova, 1974).

74. Pentru ce valori ale parametrului real m neegalitățile

$-3 < \dfrac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$ sînt verificate, oricare ar fi x.

(Ec. Agriculturii, Craiova, 1975).

75. Se consideră sistemul

$\begin{cases} x + y = 2m \\ xy = 1 \end{cases}$ cu m real, și se cere:

a) Să se rezolve sistemul dat;

b) Să se determine valorile lui m, astfel ca rădăcinile sistemului să fie reale;

c) Dacă $m = \cos \alpha$, să se arate că rădăcinile x și y ale sistemului verifică relația $x^p + y^p = 2 \cos p\alpha$.

(Ec. Agriculturii, Craiova, 1974).

76. Se dă sistemul de ecuații

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{m + 2}{m - 2}$, $x - y = \dfrac{4m}{m^2 - 4}$, $m \in R \setminus \{\pm 2\}$, și se cere:

a) Să se rezolve sistemul dat;

b) Să se arate că $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2$ (unde x și y sînt soluțiile sistemului) pentru orice $m \in R \setminus \{0, \pm 2\}$.

(Matematică, Secția fără frecvență, Craiova, 1974).

77. Se dă ecuația $x^3 - 6x^2 + 11x + m = 0$, $m \in R$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 și se cere:

a) Să se scrie ecuația care are ca rădăcini

$$y_1 = \frac{x_2 + x_3}{x_1}, \quad y_2 = \frac{x_1 + x_3}{x_2}, \quad y_3 = \frac{x_1 + x_2}{x_3}.$$

b) Să se determine, m astfel ca:

$x_1 + x_2 = x_3$ și, în acest caz, să se rezolve ecuația dată.

(Electrotehnică, Craiova, 1974·

78. Se dă ecuația $x^2 - (m - 1)x - 3(m + 2) = 0$ și se cere:

a) Să se discute natura și semnul rădăcinilor ecuației după valorile parametrului m;

b) Să se rezolve ecuația;

c) Să se determine valorile lui m pentru care rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației verifică inegalitatea $x_1^2 + x_2^2 < 18$;

d) Să se simplifice fracția

$$F = \frac{x^2 - (m - 1)x - 3(m + 2)}{x^2 + 2x - 3}.$$

79. Se consideră mulțimea

$Z^3 = \{\alpha \mid \alpha = (a_1, a_2, a_3), a_i$ fiind numere întregi$\}$

În Z^3 se definește operația o astfel: dacă $\alpha, \beta \in Z^3$,

$\alpha = (a_1, a_2, a_3)$, $\beta = (b_1, b_2, b_3)$, atunci:

$\alpha \, o \, \beta = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,\ a_2b_1 + a_3b_2 + a_1b_3,\ a_3b_1 +$
$+ a_1b_2 + a_2b_3)$.

a) Să se studieze asociativitatea și comutativitatea operației introduse. Admite această operație element neutru?

b) Se definește o funcție $T : Z^3 \to Z$ în modul următor:

$$T(\alpha) = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 - 3a_1a_2a_3.$$

Să se arate că $T(\alpha \, 0 \, \beta) = T(\alpha).\ T(\beta)$.

(Concurs mat., 1971, Dan Radu)

80. Fie $(R, +)$ grupul aditiv al numerelor reale și $(M_3, \cdot)$ grupul multiplicativ al matricelor pătratice nesingulare de ordinul al treilea.

a) Să se cerceteze dacă aplicația $U : (R, +) \to (M_3, .)$ dată prin

$$U(t) = \begin{Vmatrix} 1 & t & 2t + 2t^2 \\ 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

este un izomorfism al lui $(R, +)$ în $(M_3, .)$;

b) Pentru $n \geqslant 3$ și $t \in R$, are loc egalitatea

$$(-1)^k \ C_n^k U\,(t) = 0\,;$$

c) Să se determine matricea $N = \begin{Vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, astfel încît

să existe identitatea în $t \in R$:

$$U(t) = I + \frac{t}{1!} N + \frac{t^2}{2!} N^2.$$

I fiind matricea unitate de ordinul al treilea.

(Adm. Fac. Mat.-Informatică, Brașov, 1972).

81. Să se rezolve ecuația $x(1 - \log 5) = \log\,(2^x + x - 1)$

(Adm. Politehnică, Wroclaw, 1958).

Capitolul II

TRIGONOMETRIE

1. IDENTITĂȚI TRIGONOMETRICE.

A. Metodele de demonstrare a identităților trigonometrice sînt aceleași ca și în cazul identităților algebrice și toate cele expuse în primul paragraf al capitolului de algebră rămîn valabile și aici. Diferența dintre identitățile trigonometrice și cele algebrice este aceeași cu cea dintre identitățile condiționate și cele libere. Identitățile de condiție, în cazul trigonometriei, sînt cele fundamentale și cele care definesc particularitățile de operare a funcțiilor trigonometrice. Există, bineînțeles, și în trigonometrie identități condiționate în care, în afara formulelor fundamentale, se mai dau și alte relații suplimentare, fie între argumentele funcțiilor trigonometrice (o categorie vastă în acest sens o constituie identitățile adevărate pentru unghiurile unui triunghi plan), fie chiar între diferitele funcții trigonometrice.

Dintr-un anume punct de vedere identitățile trigonometrice sînt mai dificile decît cele algebrice și unul din elementele de bază ale acestui punct de vedere îl constituie faptul că cei ce au de demonstrat asemenea identități trebuie să cunoască foarte bine toate formulele trigonometriei plane. Dintre aceste formule amintim pe cele care reduc calculul funcțiilor trigonometrice ale arcelor oarecare la cele ale arcelor mai mici decît $\pi/4$, pe cele care permit calculul tuturor funcțiilor trigonometrice ale unui arc, cînd se cunoaște una singură din aceste funcții, pe cele care exprimă funcțiile trigonometrice ale multiplilor și submultiplilor unui arc, pe cele care transformă sumele în produse sau produsele în sume și, în sfîrșit, pe cele ce se verifică în orice triunghi.

B. PROBLEME PROPUSE

1. Să se arate că expresia

$E = \sin^2\left(\varphi + \frac{a}{2}\right) + \cos\varphi \cos(a + \varphi)$ este independentă de φ.

2. Să se arate că dacă $\operatorname{tg}\frac{a}{2} \operatorname{tg}\frac{b}{2} \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \pm 1$, atunci $(1+\cos a)\cdot(1 + \cos b)(1 + \cos c) = \sin a \sin b \sin c$.

3. Să se arate că $3 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tg}\frac{44}{117} = \frac{\pi}{4}$.

4. Să se arate că

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = \cos\frac{2\pi}{11} + \cos\frac{4\pi}{11} + \cos\frac{6\pi}{11} + \cos\frac{8\pi}{11} + \cos\frac{10\pi}{11}.$$

5. Să se arate că $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

6. Să se arate că dacă $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sin a_i = 0$ și dacă relația $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sin(a_i + \varphi) = 0$ este adevărată pentru o valoare unică $\varphi = \beta$, $(\beta \neq k\pi)$, atunci această ultimă relație este adevărată pentru orice φ.

Cunoscînd că $\sin 2x = \lambda$ să se calculeze:

7. $E = \sin^6 x + \cos^6 x$;

8. $E = \sin^7 x + \cos^7 x$.

9. Să se arate că

$$E = \sqrt{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + 2\sqrt{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\gamma}} + \sqrt{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - 2\sqrt{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\gamma}}$$

este independentă de γ dacă $\alpha + \beta > \gamma$ și independentă de α și β dacă $\alpha + \beta < \gamma$, cînd $\alpha, \beta, \gamma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Să se găsească relaţiile dintre α, β, γ ale căror funcţii trigonometrice satisfac relaţiile :

10. $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\lambda}{2}$;

11. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1.$

12. Să se arate că dacă

$\sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \gamma = 1$, atunci

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \beta} + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos \gamma} = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

13. Se dă funcţia $f(x) = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ şi se cere :

a) Să se exprime $f(x)$ sub forma $f(x) = A \sin (2x + \varphi) + B$;

b) Să se determine valorile extreme ale funcţiei $f(x)$.

14. Să se arate pentru ce valori ale lui x este adevărată identitatea

$$1 - \operatorname{tag} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \ldots = \frac{\sqrt{2} \cos x}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + x\right)}.$$

15. Se dă expresia

$$E_n(x) = \frac{2 \sin x}{\cos x - \cos(2n + 1)x}$$ şi se cere :

a) Să se arate că există un număr real λ, astfel încît

$E_n(x) = \lambda \operatorname{ctg} nx - \operatorname{ctg} (n + 1)x$;

b) Să se calculeze suma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} E_k(x).$$

16. Se dă expresia $E(x) = 2 \cos 4x - 4 \cos 3x + m \cos 2x + n \cos x + 4$ şi se cere să se exprime numai în funcţie de $\cos x$, iar apoi să se determine m şi n, astfel încît $E(x)$ să fie un pătrat perfect.

17. Să se arate cum trebuie să fie a și b pentru ca

$$\frac{\sin^2\alpha}{a}+\frac{\cos^2\alpha}{b}=\frac{1}{a+b}.$$

Să se demonstreze identitățile:

18. $$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}-\frac{\sec^2 x+2}{\operatorname{tg}^2 x-1}=\frac{2}{1+\operatorname{tg} x}.$$

19. $$\frac{\sum_{k=1}^{n}\sec k\alpha \sec(k+1)\alpha}{\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cosec} k\alpha \operatorname{cosec}(k+1)\alpha}=\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(n+1)\alpha.$$

20. $$\sin(a+b+c)+\sin(b+c-a)+\sin(c+a-b)-\sin(a+b-c)=4\cos a\cos b\sin c.$$

21. $$\cos(b+c-a)+\cos(c+a-b)+\cos(a+b-c)+\cos(a+b+c)=4\cos a\cos b\cos c.$$

22. $$\cos(a+b)\sin(a-b)+\cos(b+c)\sin(b-c)+\cos(c+d)\sin(c-d)+\cos(d+a)\sin(d-a)=0.$$

23. $$\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{b+c}{2}.$$

24. $$\cos a+\cos b+\cos c+\cos(a+b+c)=4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{a+c}{2}.$$

25. $$\operatorname{tg} 3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$$

Să se arate că următoarele expresii sînt independente de a, b, c:

26. $$E=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}+\frac{\sin(b-c)}{\cos b\cos c}+\frac{\sin(c-a)}{\cos c\cos a}.$$

27. $E = \frac{\sin a}{\sin(a-b)\sin(a-c)} + \frac{\sin b}{\sin(b-a)\sin(b-c)} + \frac{\sin c}{\sin(c-a)\sin(c-b)}$.

28. $E = \frac{\cos a}{\sin(a-b)\sin(a-c)} + \frac{\cos b}{\sin(b-a)\sin(b-c)} + \frac{\cos c}{\sin(c-a)\sin(c-b)}$.

29. Să se arate că expresia

$$E = \sin^6 x + \cos^6 x - \frac{3}{2}(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

este independentă de x.

30. Să se arate că dacă

$$b \sin(x-a) - a \sin(x-b) = 0$$

$$B \cos(x-a) - A \cos(c-b) = 0$$

$$aB + bA \neq 0, \text{ atunci}$$

$$\cos(a-b) = \frac{aA + bB}{aB + bA}.$$

31. Să se elimine u și v între relațiile

$$m^2 \operatorname{tg}^2 u + n^2 \operatorname{tg}^2 v = 1;$$

$$m^2 \cos^2 u + n^2 \sin^2 v = 1;$$

$$m \sin u = n \cos v.$$

32. Să se elimine a între relațiile

$$x \sin a - y \cos a = \operatorname{tg} a - \operatorname{ctg} a;$$

$$x \cos a + y \sin a = \operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} a.$$

33. Să se elimine a, b, c, între relațiile

$$\sin(b-a)\sin(c-a) = n \cos a;$$

$$\sin(c-b)\cdot\sin(a-b) = n \cos b;$$

$$\sin(a-c)\sin(b-c) = p \cos c.$$

34. Să se calculeze expresia $E = \sin^2(a+b) + p \sin(a+b) \cos(a+b) + q^2 \cos^2(a+b)$.
dacă $a = \text{Arc tg } x_1$ $b = \text{Arc tg } x_2$ iar x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$.

35. Să se elimine x, y, z din relațiile

$$a \operatorname{tg} x + c \operatorname{tg} y + b \operatorname{tg} z = 0;$$
$$c \operatorname{tg} x + b \operatorname{tg} y + a \operatorname{tg} z = 0;$$
$$b \operatorname{tg} x + a \operatorname{tg} y + c \operatorname{tg} z = 0.$$

36. Să se arate că sistemele

$$\begin{cases} a = b \cos c + c \cos B \\ b = c \cos A + a \cos C \\ c = a \cos B + b \cos A \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos c \end{cases}$$

sînt echivalente.

37. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos c \end{cases}$$

în care $a, b, c, A, B, C \in [0, \pi]$, implică relațiile

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

38. Să se arate că dacă $a, b \in [0, \pi]$ și $\cos a + \cos b = \frac{3}{2} + \cos(a + b)$, atunci a și b sînt egale și constante.

39. Să se calculeze $\operatorname{tg}(u + v)$, dacă u și v sînt date de relațiile

$$\cos u + \cos v = a;$$
$$\sin u = \sin v = b.$$

40. Să se elimine u între relațiile

$$\cos(a - 3u) = m \cos^3 u;$$
$$\sin(a - 3u) = m \sin^3 u.$$

41. Să se exprime în forma cea mai simplă

$$E = \frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha + 2}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + 2 \sin^2 \alpha}.$$

42. Să se exprime în funcție de $a = \sin x + \cos x$, expresia $E(x) = \sin x + \cos x + \sin^3 x + \cos^3 x + \sin^5 x + \cos^5 x$.

43. Să se exprime

$$E(x) = \frac{1 + m(\sin^4 x + \cos^4 x)}{\sin^6 x + \cos^6 x}$$

în funcție de $u = \sin 2x$ și în funcție de $v = \operatorname{tg} x$.
Să se arate, apoi, că există o valoare particulară a lui m pentru care E este independentă de x.

44. Să se pună sub o formă simplă expresia

$$E = \sum_{k=0}^{n} 3^k \sin^3 \frac{x}{3^k}.$$

45. Să se arate că expresia

$$E = \frac{\lambda(1 - \cos 2x - \sin 2x) - 2 \sin x + 2 \cos x}{\lambda(1 - \cos 2x + \sin 2x) - 2 \sin x - 2 \cos x}$$

nu depinde de λ.

46. Să se arate că expresia

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right)$$

poate fi pusă sub forma $C_n \sin nx$, unde C_n este o constantă care trebuie determinată.

47. Să se arate că

$$\sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$ pentru n natural, $n > 2$.

48. Să se arate pentru ce valori ale lui x este verificată egalitatea
$\sin x[\sin x + \sin(x - 2y)] = \sin(x - y)[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$.
Știind că $a + b + c = 180°$, să se transforme în produs expresiile:

49. $$\sin\left(a + \frac{b}{4}\right) + \sin\left(b + \frac{c}{4}\right) \sin\left(c + \frac{a}{4}\right) + \cos\left(a + \frac{b}{4}\right) + \cos\left(a + \frac{c}{4}\right) + \cos\left(c + \frac{a}{4}\right);$$

50. $$\sin\frac{a}{4} + \cos\frac{a}{4} + \sin\frac{b}{4} + \cos\frac{b}{4} + \sin\frac{c}{4} + \cos\frac{c}{4}$$

51. $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c$;

52. $\sin^3 a \cos (b - c) + \sin^3 b \cos (c - a) + \sin^3 c \cos(a - b)$;

53. $\sin 3a \cos^3 b - c) + \sin 3b \cos^3 (c - a) + \sin 3c \cos^3(a - b)$;
Să se transforme în produs expresiile

54. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$;

55. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \ldots \cos^2 2nx - n$;

56. $n - (\sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots \sin^2 2nx$;

57. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x$.

58. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{m\pi k}{p+1} \sin \frac{n\pi k}{p+1} = \begin{cases} -\frac{p+1}{2} & \text{dacă } m+n \text{ e divizibil cu } 2(p+1) \\ \frac{p+1}{2} & \text{dacă } m-n \text{ e divizibil cu } 2(p+1) \\ 0 & \text{dacă } m \neq n \text{ și } m+n,\ m-n \text{ nu-s divizibili cu } 2(p+1) \end{cases}$$

59. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc\,tg} \frac{2k}{k^4 + k^2 + 2} = \operatorname{arc\,tg} (n^2 + n + 1) - \frac{\pi}{4}.$$

60. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{1 + a_k a_{k+1}} = \operatorname{arc\,tg} \frac{a_{n+1} - a_1}{1 + a_1 a_{n+1}}$$

dacpă $\{a_i\}$ formează o progresie aritmetică cu rația $r > 0$ și $a_1 > 0$.

61. Să se arate că pentru orice $x > 0$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x}{1 + k(k+1)x^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{nx}{1 + (n+1)x^2}.$$

62. Se dă $E(x) = p \sin^4 x + (p - q) \cos^4 x + q \cos^2 x$ cu $0 < q < p$, şi se cere să se determine p şi q, astfel ca

$$E(x) \equiv \cos 4x.$$

Să se calculeze sumele.

63. $S_1 = \cos x \cos x + \cos^2 x \cos 2x + \ldots \cos^n x \cos nx$;

64. $S_2 = \cos x \sin x + \cos^2 x \sin 2x + \ldots \cos^n x \sin nx$.

65. Să se arate că

$$(1 + \operatorname{tg} a)^2 + (1 + \operatorname{ctg} a)^2 = \frac{4(1 + \sin 2a)}{\sin^2 2a}.$$

2. INEGALITĂŢI TRIGONOMETRICE.

A. Inegalităţile trigonometrice diferă de cele algebrice, în primul rînd, prin faptul că alături de proprietăţile de nenegativitate a unor sume de pătrate (sau alte puteri pare) pe care se fundamentează inegalităţile algebrice se adaugă inegalităţile iniţiale decurgînd din limitele domeniilor valorilor pentru funcţiile $\sin x$, $\cos x$, $\sec x$, şi $\operatorname{cosec} x$.

Inegalităţile trigonometrice se rezolvă, ca şi cele algebrice, pornind de la inegalităţile cunoscute şi operînd cu transformări identice şi *ajungînd* la inegalităţile propuse de demonstrare. Ţinînd seama de frecvenţa destul de mare a unor greşeli de natură logică ce se întîlnesc la demonstrarea unor inegalităţi trigonometrice, vom ilustra calea logică a demonstraţiei pe un exemplu simplu.

Fie de demonstrat că pentru orice $x \in R$ avem

1. $|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}$.

Cei mai mulţi candidaţi ridică această inegalitate la pătrat şi obţin

$$\sin^2 x \cos^2 x + \sin 2x \leqslant 2$$

şi deoarece $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, iar $\sin 2x \leqslant 1$, inegalitatea propusă este adevărată.

Subliniem și aici inconsistența logică a acestui procedeu care, în esență, pornind de la o inegalitate de demonstrat, ajunge la ceva care este adevărat și conchide că sursa unor rezultate adevărate nu poate fi decît adevărată.

Demonstrația corectă a acestei inegalități (una din demonstrații) se desfășoară în modul următor:

Se știe că

$\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 1$ pentru orice $x \in R$. De aici

$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sin x + \cos x\right| \leqslant 1$, sau înmulțind cu $\sqrt{2}$ ambii membrii ai inecuației (operație permisă căci $\sqrt{2} > 0$), obținem:

$|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}$ ceea ce trebuia demonstrat

B. PROBLEME PROPUSE

2. Să se arate că $\cos^n x + \sin^n x < 1$ pentru orice $n > 2$.

3. Să se arate că

$$\frac{2}{\operatorname{tg} x - 1} < \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} < \frac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1}.$$

4. Să se arate că dacă $\operatorname{tg} a = n \operatorname{tg} b$, $(n > 0)$, atunci

$$\operatorname{tg}^2 (a - b) \leqslant \frac{(n-1)^2}{4n}.$$

5. Să se arate că pentru $\forall$, $a, b, c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\sin (a + b) \sin (b + c) \sin (c + a) \geqslant \sin 2a \sin 2b \sin 2c.$$

6. Să se arate că

$\operatorname{ctg} \frac{a}{2} \geqslant 1 + \operatorname{ctg} a$, pentru orice $a \in (0, \pi)$.

7. Să se arate că dacă

$\frac{1}{\cos a \cos b} + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c$, atunci $\cos 2c \leqslant 0$.

8. Să se arate că dacă $\{a_i\}$ este un şir finit monoton crescător de numere situate între 0 şi $\frac{\pi}{2}$, atunci

$$\operatorname{tg} a_1 < \frac{\sum_{i=1}^{n} \sin a_i}{\sum_{i=1}^{n} \cos a_i} < \operatorname{tg} a_n.$$

9. Să se arate că dacă $a, b, c \in [0, \pi]$ şi $a + b + c = \pi$, atunci

$$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{c}{2} \geqslant 1\ ;$$

10. $\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \leqslant \frac{1}{8}$;

11. $\cos a + \cos b + \cos c \leqslant \frac{3}{2}$;

12. $\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

13. Să se afle valoarea maximă a sumei

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sin a_k$$

dacă $a_i > 0$, $\forall\, i$, şi $\sum_{i=1}^{n} a_i = \pi$.

Să se arate că dacă a_1, b_2, c_1 şi a_2, b_2, c_2 sînt unghiurile pe care le fac două direcţii oarecare cu trei axe perpendiculare două cîte două, atunci:

14. $\cos a_1 \cos a_2 + \cos b_1 \cos b_2 + \cos c_1 \cos c_2 \leqslant 1$;

15. $\cos a_1 + \cos b_1 + \cos c_1 \leqslant \sqrt{3}$.

16. Să se arate că pentru orice $a, b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avem

$$(\cos^3 a + \cos^3 b) \geqslant \frac{1}{4} (\cos a + \cos b)^3.$$

17. Să se arate că dacă $A, B, C \in (0, \pi)$ şi $A + B + C = \pi$, atunci

$$4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}.$$

18. Dacă $a, b, c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci

$$(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c)(\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} c) \geqslant 9.$$

19. Fie $a, b, c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ şi se cere să se afle pentru ce valori ale lui a, b, c produsul $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$ este maxim.

20. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci

$$\frac{1}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b} + \frac{1}{\operatorname{tg} c + \operatorname{tg} d} \leqslant \frac{1}{\dfrac{1}{\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} c} + \dfrac{1}{\operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} d}}.$$

Dacă $A, B, C \in (0, \pi)$ avem:

21. $\frac{1}{2}(\sin A + \sin B) \leqslant \sin\frac{A + B}{2}$;

22. $\frac{1}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) \leqslant \sin\frac{A + B + C}{3}$.

23. Să se demonstreze că

$|a \cos x + b \sin x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$, pentru $\forall\, a, b \in R$ şi $\forall x \in R$

24. Să se demonstreze că pentru $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem

$\sin a + \operatorname{tg} a < 2a$.

Să se arate că pentru orice $a \in R$:

25. $\cos(\cos a) > 0$;

26. $\cos(\sin a) > \sin(\cos a)$.

27. Să se arate că pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1.$$

28. Să se arate că pentru orice $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

se verifică inegalitatea

$$\sin a \geqslant a - \frac{a^3}{6};$$

29. Să se arate că pentru orice $n \geqslant 2$, $(n \in N)$,

$$\sin\frac{1}{n-1} - 2\sin\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n+1} > 0.$$

30. Să se arate că dacă a, $b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $a + b < \frac{\pi}{2}$, atunci

$$\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b < 1.$$

31. Se dă

$E(x) = p\sin^4 x + (p - q)\cos^4 x + q\cos^2 x$ cu $0 < q < p$
și se cere:

a) Să se arate că $E(x) \leqslant p$, $\forall x \in R$.
b) Să se precizeze pentru ce valori ale lui x, $E(x)$ ia valori maxime sau minime.

32. Să se arate că pentru $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ are loc relația

$$\operatorname{tg} a \geqslant a + \frac{a^3}{2};$$

33. Să se arate că pentru orice $a \in (0, \pi)$ are loc relația

$$\sin x > x - \frac{x^3}{4}.$$

34. Să se arate că pentru $\forall x \in R$ avem

$$1 \geqslant \cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Să se dea interpretarea geometrică.

35. Să se arate cu mijloace elementare (fără folosirea derivatei) că funcția
$f(a) = x - \sin x$, este crescătoare pentru orice x.

36. Să se demonstreze că pentru $|x| < \sqrt{2m}$ cu $m \in N$ are loc inegalitatea

$$\cos^m \frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m - x^2}$$

3. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII TRIGONOMETRICE.

A. Ținînd seama de experiența concursurilor de admitere din ultimii ani, atît din țara noastră cît și din alte țări, se poate afirma fără rezerve că în cadrul probelor de concurs, atît scrise cît mai ales orale, frecvența cea mai mare a subiectelor propuse spre rezolvare fac parte din domeniul ecuațiilor trigonometrice. Ca principiu, aceste probleme nu se deosebesc de cele legate de ecuațiile algebrice decît prin două particularități și anume prin constrîngerile impuse de identitățile trigonometrice fundamentale (inclusiv legile de acțiune a funcțiilor trigonometrice asupra operațiilor algebrice) și, mai ales, prin numărul infinit de soluții pe care-l au ecuațiile trigonometrice (în cazul că au soluții), decurgînd din caracterul periodic al tuturor funcțiilor trigonometrice. Deja, candidaților le-a intrat în obicei să scrie formulele care dau mulțimea tuturor soluțiilor și marea lor majoritate știu bine că funcțiile sinus și cosinus (și inversele lor) au perioada 2π în timp ce tangenta și cotangenta au perioada π.

Cele mai frecvente greșeli întîlnite la rezolvarea acestor ecuații constau în simplificarea ecuațiilor cu factori care conțin necunoscutele, ceea ce, ca regulă, nu este permis.

Există, totuși, situații în care asemenea simplificări nu au efecte asupra găsirii soluțiilor, dar marea majoritate a candidaților nu justifică acest fapt. Pentru a ilustra cele afirmate fie de rezolvat ecuația.

1. $\sin x + \cos x = 0.$

Aproape 90 % din candidații care întîlnesc această ecuație o rezolvă simplificînd-o cu $\cos x$ și rezolvînd apoi ecuația echivalentă $\operatorname{tg} x = -1$, fără însă să justifice această simplificare. În fapt, simplificarea nu introduce și nu elimină soluții și, de aceea, cei mai mulți examinatori nu fac obiecțiuni asupra procedeului, însă există unii dintre aceștia care țin seama de lipsa unei justificări logice a simplificării. Unii candidați, cărora li se atrage atenția că au simplificat cu un factor conținînd necunoscuta afirmă că din mulțimea soluțiilor găsite vor elimina, la sfîrșit, pe cele ale ecuației $\cos x = 0$, iar cînd trec la fapte constată că n-au ce elimina. Îndreptățirea logică a simplificării rezidă în faptul că soluțiile ecuației $\cos x = 0$ nu pot fi soluții și

pentru ecuaţia (1), întrucît mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\cos x = 0$ şi cea a soluţiilor ecuaţiilor $\sin x = 0$ sînt disjuncte şi, deci, pentru soluţiile ecuaţiei (1), $\cos x \neq 0$.

Înainte de a încheia, subliniem încă odată necesitatea de a preciza, în cazul unei ecuaţii trigonometrice, toate soluţiile, în afara cazului că se specifică în mod special, în enunţ, găsirea numai a anumitor soluţii.

B. PROBLEME PROPUSE

Să se rezolve ecuaţiile:

2. $\operatorname{ctg} 2\pi x^2 + \operatorname{ctg} 4\pi x = 0$.

3. $|\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x| = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

4. $2 \cos^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 4x}{3} = 2^x + 2^{-x}$

5. $\sin 2x \cdot \sin 5x = 1$.

6. $\sin 3x + \sin 7x = -2$.

7. $\sin^3 x + \cos^8 x = 1$.

8. $\cos x + \cos y - \cos (x + y) = \frac{3}{2}$.

9. $\cos \left(\frac{1}{5} \arcsin x\right) = 1$.

10. $8 \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$

11. $\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2} \sin y$.

12. $\operatorname{arc\,tg}(x - a) + \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(x + a) = \operatorname{arc\,tg} 3x$.

13. Pentru ce valori ale lui a ecuaţia $1 + \sin^2 ax = \cos x$ are soluţie unică.

Să se rezolve sistemele:

14. $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \sin^2 y \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin a \\ \cos x + \cos y = \cos a \end{cases}$

16. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{\lambda(1 - \cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin x + 2 \cos x}{\lambda(1 - \cos 2x + \sin 2x) - 2 \sin x - \cos x} = 2 - \sqrt{3}.$$

17. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin^2 x \sin 2x + \cos^2 x \cos 2x = \frac{1}{2}.$$

18. Să se rezolve ecuaţia $\operatorname{tg} 4x = 2\sqrt{3}\,(\cos^4 x - \sin^4 x)$.

19. Să se rezolve ecuaţia $\sin 8x - \cos 6x = 3\,(\sin 6x + \cos 8x)$.

20. Să se rezolve ecuaţia $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1 - \cos |x|}{1 - \sin |x|}$.

21. În ce condiţii ecuaţia $p \sin x + q \cos x = r$, are soluţii?

Să se rezolve ecuaţiile:

22. $\cos(10x + 12) + 4\sqrt{2} \sin(5x + 6) = 4$.

23. $\operatorname{ctg}^3 \dfrac{\pi(1 - x)}{1 + x} - \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\pi(1 - x)}{1 + x} = 6 \operatorname{ctg} \dfrac{\pi(1 - x)}{1 + x}$.

24. $\cos 3x \cos 4x + \sin 2x \sin 5x = \dfrac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)$.

25. $\cos x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 3x$.

26. $(\cos 5x + \cos 7x)^2 = (\sin 5x + \sin 7x)^2$.

27. $4 \sin 2x \sin 4x \sin 6x = \sin 4x$.

28. $\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x = \sin 3x \cos 5x$.

29. Dată $E(x) = 2 \sin 3x - 2 \cos 3x + \sin 2x - 2 \sin x - 2 \cos x - 1$, se cere să se exprime ca funcţie de $u = \cos x + \sin x$ şi să se rezolve, apoi, ecuaţia $E(x) = 0$.

30. Să se rezolve ecuaţia $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x$.

Să se rezolve sistemele

31. $x + y = \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{\sin x}{\sin y} = 2.$

32. $\sin(x - y) = 3 \sin x \cos y - 1$; $\sin(x + y) = -2 \cos x \sin y$.

33. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} z = 3, \ \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = 6, \quad x + y + z = \pi.$

34. Să se rezolve ecuația $\arcsin \frac{3x}{5} + \arccos \frac{4x}{5} = \arccos x.$

35. Să se rezolve ecuația $\arcsin(1 - x) - 2 \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

36. Să se rezolve ecuația $\arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1 - x} = \frac{\pi}{2}$.

37. Să se rezolve și să se discute ecuația $\sin 3x + \sin 2x = m \sin x$.

38. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} |\sin x|\sin y = -\frac{1}{4} \\ \cos(x + y) + \cos(x - y) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

39. Se dă ecuația
$\operatorname{tg}^2 x - 4(p + 1) \operatorname{tg} x + q(p + 1)^2 = 0$ cu $p, q \in R$ și se cere:
a) Să se discute soluțiile ecuației în funcție de p și q;
b) Să se rezolve ecuația pentru $p = \cos 2a$, $q = 4 \cos 4a$ (a, dat);

c) Să se găsească rădăcinile ecuației cînd în b), $a = \frac{\pi}{8}$.

40. Să se rezolve sistemul

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y, \quad x - y = \frac{\pi}{6}.$$

41. Să se rezolve ecuațiile

$a \cos x + b \sin x = a \cos mx + b \sin mx.$

42. $\frac{m}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x} = \frac{n(\cos x - \sin x)}{\operatorname{ctg} x - 1}$; $m, n \in R$.

43. $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$.

44. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

Să se rezolve sistemele de ecuaţii

45. $\frac{\operatorname{tg} x}{a} = \frac{\operatorname{tg} y}{b} = \frac{\operatorname{tg} z}{c}$; $x + y + z = \pi$.

46. $\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\cos z}{c}$; $x + y + z = \frac{\pi}{2}$.

4. INECUAŢII TRIGONOMETRICE

A. Inecuaţiile trigonometrice sînt prezente în concursurile de admitere, de dată relativ mai recentă, şi ele reflectă pătrunderea mai adîncă în programele analitice de liceu, a cunoştinţelor despre domeniile de definiţie şi despre periodicitatea funcţiilor. Şi în aceste probleme, ca şi în cele referitoare la ecuaţii, după o serie de transformări algebrice, identice (bineînţeles ţinînd seama şi de identităţile fundamentale ale trigonometriei) se ajunge, în esenţă, la inegalităţile trigonometrice între funcţii trigonometrice de acelaşi nume, una din ele avînd argumentul cunoscut, aşa cum sînt de pildă $\cos x \leqslant \cos a$, $\sin x \geqslant \sin a$, $\operatorname{tg} x > \operatorname{tg} a$ etc., unde în cel mai rău caz argumentul a este o valoare a funcţiei circulare inverse, corespunzătoare. Pînă în această etapă tot ce s-a spus despre inegalităţile algebrice rămîne valabil şi aici cu referire specială la faptul că înmulţirea inecuaţiilor între ele, sau ridicarea lor la pătrat necesită precauţii mai mari.

În etapa finală a studiului inegalităţilor se ţine seama de particularităţile de variaţie ale funcţiilor trigonometrice şi anume că în cadranul întîi funcţiile sinus, tangentă şi secantă sînt crescătoare (deci relaţiile de ordine se conservă), iar cosinus, cotangenta şi cosecanta sînt descrescătoare (deci relaţiile de ordine se inversează), în cadranul al doilea funcţiile sinus, cosinus, cotangentă sînt descrescătoare, iar tangenta, secanta şi cosecanta sînt crescătoare, şi aşa mai departe.

După stabilirea domeniilor de valabilitate a inecuaţiilor rezolvate pe lungimea unei perioade a funcţiei trigonometrice respective, se completează soluţia şi cu domeniile corespunzătoare din toate celelalte perioade.

B. PROBLEME PROPUSE.

Să se rezolve inecuaţiile :

1. $\sin x + \sqrt{3} \cos x \geqslant \frac{1}{2}$.

2. $2 \sin x - \cos x > -1$.

3. $5 + 2 \cos 2x \leqslant 3 | 2 \sin x - 1 |$.

4. $\lg_{\frac{\cos x}{\sqrt{2}}} \left(\frac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{2} \right) \leqslant 2$.

5. $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1} > 2$.

6. $\lg_{ctg x} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} < +1$.

7. $\lg_{tg x} \sqrt{\sin^2 x - \frac{5}{12}} < -1$.

8. $\sin 2x > \sin x + \cos x - \frac{1}{2}$.

9. $\sin x + \cos x > \sqrt{2} (1 - \sin 2x)$.

10. $\sin^3 x + \cos^3 x > \sqrt{3}$.

Să se rezolve inecuaţiile simultane

11. $\begin{cases} 2 \sin^2 x - \sin 2x < \cos x - \sin x ; \\ 2 | \cos x | > 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \sin 3x < \sin x ; \\ \cos 3x < \cos x. \end{cases}$

13. Să se rezolve inecuaţia

$$\left|\frac{\frac{3}{2}-\cos x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant 1.$$

14. Să se afle punctele din plan ale căror coordonate satisfac inegalitatea

$$\sin x\cos\left(y-\frac{\pi}{3}\right) > 0$$

15. Să se rezolve inecuaţia

$$\sin x + \cos x + 2\sqrt{\sin x\cos x} > 1.$$

16. Să se rezolve inecuaţia

$$x^2 + x + 1 > \sin x.$$

17. Să se rezolve inecuaţia

$$\sin x < \lg|x|.$$

18. Să se rezolve inecuaţia

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) < \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

19. Să se rezolve inecuaţia

$$\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x \leqslant \sin x\sin 3x.$$

20. Să se rezolve inecuaţia

$$\frac{\sin x}{\sin^2 3x} + \frac{1}{4\sin x} \geqslant 1, \text{ dacă } x \in (0, \pi).$$

Să se rezolve inecuaţiile

21. $|\sin x| + |\cos x| > 1.$

22. $\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right) > 1.$

23. $\frac{\sin x}{1+\cos x} < \sqrt{3}.$

24. $\sin^4 x + \cos^4 x < \frac{5}{8}$.

25. $$\frac{2\cos kx\cos(k+1)x\cos(k+2)x - \cos(2k+3)\cdot\cos kx}{2\cos kx + \sin(k+1)x - \sin(k-1)x} > \frac{1}{2}.$$

26. Să se rezolve sistemul de inecuaţii

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ 1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x \geqslant \frac{3}{4} \end{cases}$$

27. Să se rezolve inecuaţiile

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sec^2 x + 2}{\operatorname{tg}^2 x - 1} < 1.$$

28. $$\frac{\sum\limits_{k=1}^{3} \sec kx \sec(k+1)x}{\sum\limits_{k=1}^{3} \operatorname{cosec} kx \operatorname{cosec}(k+1)x} > 1.$$

29. $$\frac{2 + \cos 2x - \cos 4x}{2\sin^2 x + \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)} > 2.$$

30. $$\frac{\lambda(1 - \cos^2 x - \sin^2 x) - 2\sin x + 2\cos x}{\lambda(1 - \cos 2x + \sin 2x) - 2\sin x - 2\cos x} < 2 - \sqrt{3}.$$

31. Să se rezolve sistemul de inecuaţii

$$\operatorname{tg} x > 1, \ \cos 3x > -\frac{1}{2}.$$

32. Să se afle punctele din plan ale căror coordonate x şi y satisfac inecuaţia

$$\sin(x + y) > \frac{1}{2}.$$

33. Să se rezolve inecuaţia :

$$\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} > 0.$$

34. Să se rezolve inecuaţiile

$$\text{arc tg}^2\, x - 4\ \text{arc tg}\, x + 3 > 0.$$

35. $\text{arc sin}\, x < \text{arc sin}\,(1 - x)$.

36. $\text{arc sin}(x^2 + 1) < 2$.

37. arc tg > 1.

38. $\sin \pi(x^2 + y^2) < 0$.

Să se afle domeniul de definiţie al funcţiilor:

39. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \ln \sqrt{\dfrac{1 - \text{tg}\,\dfrac{x}{2}}{1 + \text{tg}\,\dfrac{x}{2}}}$.

40. $f(x) = \text{arc sin}\,\dfrac{2x}{1 + x}$.

41. $f(x) = \text{arc cos}(2 \sin x)$.

42. $f(x) = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

43. $f(x) = \lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

44. $f(x) = \lg[\cos(\lg x)]$.

5. POBLEME REFERITOARE LA TRIUNGHIURI ŞI POLIGOANE

A. Se ştie că scopul fundamental al trigonometriei plane este acela al rezolvării triunghiurilor. Pentru a răspunde acestui scop final, în afara relaţiilor generale referitoare la funcţiile trigonometrice, se mai stabilesc unele relaţii între laturile şi unghiurile unui triunghi, relaţii care intră în programele analitice ale tuturor concursurilor de admitere. Cu toate acestea, în cadrul majorităţii concursurilor apar foarte rar probleme referitoare la acest capitol de bază al trigonometriei. Explicaţia constă, în pri-

mul rînd, în faptul că pentru rezolvarea concretă a triunghiurilor sînt necesare tabele cu valorile funcţiile trigonometrice sau cu logaritmii lor, iar aceste tabele, conţin, de regulă, şi adevărate memoratoare matematice. Pe de altă parte, problemele care nu necesită calcule numerice sînt fie prea simple, soluţiile lor fiind consecinţe directe ale formulelor ce se cer învăţate, fie prea complicate, necesitînd demonstraţii în care intervin cu pondere mare chestiunile de geometrie.

Există în practica concursurilor de admitere o anumită categorie de probleme legate de proprietăţile particulare ale triunghiurilor isoscele, dreptunghice, sau echilaterale, probleme care se rezolvă prin demonstraţii pe măsura obiectivelor unui concurs de admitere în învăţămîntul superior. Rezolvarea acestor probleme se face, de obicei, prin diverse artificii de calcul, ceea ce cere candidaţilor o bună informare cu toate formulele trigonometrice şi o abilitate calculatorie peste medie. Demonstraţiile care fac, de regulă, obiectul acestor probleme se apropie foarte mult de rigorile demonstraţiilor întîlnite în geometrie, ceea ce constituie, pentru unii candidaţi, o sursă reală de neplăceri.

B. PROBLEME PROPUSE

1. Să se arate că relaţia

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1$$

nu poate fi adevărată în nici un triunghi propriu-zis, (A, B, C fiind unghiurile triunghiului).

2. A, B, C, fiind unghiurile unui triunghi, să se transforme în produs expresia

$$E = \cos\left(\frac{\pi - B}{4} - A\right) + \cos\left(\frac{\pi - c}{4} - B\right) + \cos\left(\frac{\pi - A}{4} - C\right).$$

3. Dacă într-un triunghi

$$\frac{1 + \cos A + \cos B}{\sin A \sin B} = \lambda,$$

atunci $\frac{a + b}{c}$ se poate exprima numai funcţie de λ.

4. Să se afle unghiurile unui triunghi, ştiind că sînt în progresie aritmetică şi verifică relaţia

$$\sin A + \sin C = \cos^2 B.$$

5. Notînd cu a, b, c, A, B, C respectiv laturile şi unghiurile unui triunghi, să se transforme în produs expresia

$$\frac{a\cos A + b\cos B - c\cos C}{a\cos A - b\cos B + c\cos C}.$$

6. Se consideră triunghiul ABC $(A > C)$, între unghiurile căruia avem relaţia

$$\sin\frac{B}{2} = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} \text{ şi se cere:}$$

a) Să se arate că relaţia dată este echivalentă cu relaţia $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$;

b) Să se găsească relaţia pe care o verifică laturile acestui triunghi;

c) Dîndu-se, în plus, $\sin\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, să se calculeze $\cos 2B$ şi apoi unghiul B. Să se calculeze $\cos\frac{A-C}{2}$ şi să se determine celelalte unghiuri.

7. Să se arate că în orice triunghi este adevărată identitatea

$$1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sin^2\frac{A+B}{2} + \left[\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos\frac{A+B}{2}\right]^2.$$

A, B, C, a, b, c, fiind laturile unui triunghi şi α, β, $\gamma \in [0, \pi]$ fiind definite de relaţiile:

$\cos\alpha = \frac{a}{b+c}$, $\cos\beta = \frac{b}{a+c}$, $\cos\gamma = \frac{c}{a+b}$, atunci să se demonstreze că:

8. $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} = 1$;

9. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$;

10. Trei cercuri de raze r_1, r_2, r_3 sînt tangente exterior două cîte două în punctele A, B, C. Se cere să se afle aria triunghiului ABC.

11. În triunghiul ABC se dau unghiurile B şi C diferite între ele.
Se cere cotangenta unghiului ascuţit format de mediana din vîrful A cu latura BC.

12. Să se arate că aria unui patrulater inscriptibil este dată de formula

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

unde a, b, c, d, sînt laturile patrulaterului, iar p este semiperimetrul lui.

13. Să se arate că suma cotangentelor a trei unghiuri neadiacente din cele şase formate de medianele triunghiului, cu laturile, este egală cu suma cotangentelor celorlalte trei unghiuri.

Să se arate că în orice triunghi avem :

14. $a^3 \cos(B-C) + b^3 \cos(C-A) + c^3 \cos(A-B) = 3 \cdot abc$;

15. $a^3 \sin(B-C) + b^3 \sin(C-A) + c^3 \sin(A-B) = 0.$

16. Să se arate că aria unui triunghi ABC poate fi exprimată astfel :

$$S = \frac{a^2+b^2+c^2}{4(\text{ctg } A + \text{ctg } B + \text{ctg } C)}.$$

17. Se ştie că într-un triunghi în care cu r şi R notăm respectiv raza cercului înscris şi a celui circumscris, se verifică relaţia $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$ şi se cere să i se afle unghiurile cînd se cunosc r şi R.

18. Să se demonstreze că raza cercului circumscris unui patrulater, în care a, b, c, d, sînt laturile şi p semiperimetrul, este dată de formula

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

19. Să se demonstreze că în orice triunghi are loc relaţia

$$\frac{a^2 \sin(B-C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2 \sin(C-A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2 \sin(A-B)}{\sin A + \sin B} = 0.$$

20. Să se calculeze aria triunghiului format de punctele de tangență ale cercului înscris într-un triunghi.

21. Să se arate că într-un paralelogram care are laturile a, b și unghiul lor A, unghiul diagonalelor α este dat de formula

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2ab \sin A}{(a+b)(a-b)}.$$

22. Să se demonstreze că în orice patrulater circumscris unui cerc cu laturile $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ și $d = DA$ și unghiurile A, B, C, D au loc relațiile:

$$a \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = c \sin \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2};$$

$$b \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = d \sin \frac{D}{2} \sin \frac{A}{2}.$$

23. Să se demonstreze că dintre toate patrulaterele cu laturile $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, date, patrulaterul inscriptibil are aria maximă.

24. Să se demonstreze că în orice triunghi

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \begin{cases} > 2 \text{ dacă triunghiul e ascuțitunghi;} \\ < 2 \text{ dacă triunghiul e optuzunghi;} \\ = 2 \text{ dacă triunghiul e dreptunghic.} \end{cases}$$

25. Să se arate că în orice triunghi

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c},$$

unde r este raza cercului înscris, iar h_a, h_b, h_c sînt înălțimile.

26. Să se demonstreze că suprafața S a unui triunghi este dată de

$$S = \sqrt{r\, r_a\, r_b\, r_c},$$

unde r este raza cercului înscris, iar r_a, r_b, r_c sînt razele cercurilor exînscrise.

27. Să se afle laturile, unghiurile și aria unui triunghi oarecare cînd se dau, unghiul A, și raportul dintre diferența laturilor adiacente $b - c$ și înălțimea h_a și un alt element liniar al triunghiului.

28. Să se afle laturile, unghiurile şi aria unui triunghi în care se dau semiperimetrul p, raza cercului înscris r şi unghiul A.

29. Să se afle laturile, unghiurile şi aria unui triunghi cînd se dau medianele m_a, m_b şi unghiul C.

30. Să se calculeze laturile, unghiurile şi aria unui triunghi în care se dau două laturi şi bisectoarea unghiului lor.

31. Să se calculeze laturile, unghiurile şi aria unui triunghi în care se dau lungimile înălţimilor.

6. PROBLEME DE CONCURS

1. Să se rezolve ecuaţia $\sin(\pi \cos x) - \cos(\pi \sin x) = 0$

(Electrotehnică, Craiova, 1966).

2. Să se rezolve $\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) = 1$.

(Electrotehnică, Craiova, 1968)

3. Dacă a, b, c, A, B, C sînt respectiv laturile şi unghiurile unui triunghi, iar R raza cercului său circumscris, să se arate că

$$4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A) = 2bc \cos A.$$

(Matematică, Craiova, 1969).

4. Să se arate pentru ce valori întregi n, funcţia

$$\cos nx \sin \frac{5}{n} x \text{ are perioada } 3\pi\,?$$

(Fizică, Craiova, 1971).

5. Să se rezolve ecuaţia $\sin x = a \sin 3x$, unde a este un parametru real.

(Electrotehnică, Subingineri, 1971).

6. Să se rezolve ecuaţia $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

(Economia agriculturii, Craiova, 1971).

7. Fie funcţia $f(x) = \frac{\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x}{\sin 2x}$ şi se cere să se exprime ca funcţie de $y = \sin x - \cos x$.

(Matematică, Craiova, 1971).

8. Să se rezolve ecuaţia

$$tg\ x + \text{tg}\ 2x = \text{tg}\ 3x.$$

(Electrotehnică, Subingineri, 1971).

9. Să se demonstreze identitatea

$$\frac{\cos^3 ka - \cos^3\left(\frac{2\pi}{3} - ka\right)}{\cos k\ddot{a} + \cos\left(\frac{\pi}{3} + ka\right)} = \frac{3}{4}.$$

(Matematică, Craiova, 1972).

10. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza egală cu 2 şi aria egală cu $\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi se cere:

a) Să se afle lungimile catetelor.
b) Să se afle unghiurile triunghiului.

(Electrotehnică, Subingineri, Craiova, 1972).

11. Să se arate că triunghiul în care

$$a\ \text{tg}\ A + b\ \text{tg}\ B = (a + b)\text{ctg}\frac{c}{2}$$

este isoscel (a, b, c, A, B, C sînt respectiv, laturile şi unghiurile triunghiului).

(Fizică, Craiova, 1972).

12. Se dă ecuaţia

$4\cos^3 x + \sqrt{2}\cos 2x - 4\cos x - \sqrt{2} = 0$ şi se cere:

a) Să se rezolve ecuaţia dată.
b) Să se scrie toate soluţiile din intervalul $[-2\pi, 2\pi]$.

(Studii Economice, Craiova, 1972).

13. a) Să se afle valorile unghiului x pentru care

$$(\sin x + i \cos x)(\sin 2x + i \cos 2x)(\sin 3x + i \cos 3x) = \frac{1+i}{\sqrt{2}};$$

b) Să se calculeze $\sin 2x$ pentru valorile lui x obținute la punctul a, cuprinse în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(Fizică, Craiova, 1972).

14. Să se arate că expresia

$E = \frac{1 - \cos 2x + a \operatorname{tg}^2 x}{a + 1 + \cos^2 x}$, unde $2 \cos^2 x + a \neq 0$, nu depinde de ea.

(Studii Economice, Craiova, 1972).

15. Se dă ecuația

$$2(m+1)\cos 2x + 4m \sin x - 3m - 1 = 0 \text{ și se cere:}$$

a) Să se transforme într-o ecuație de gradul al doilea în raport cu $\sin x$ și să se afle cele două valori ale lui $\sin x$;
b) Să se determine valorile lui m pentru care valorile corespunzătoare ale lui $\sin x$ există;
c) Să se calculeze valoarea lui x pentru

$$m = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

(Studii Economice, Craiova, 1972).

16. Să se transforme în produs expresia

$$\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C},$$

A, B, C, fiind unghiurile unui triunghi oarecare.

(Studii Economice, Craiova, 1972).

17. Se dă relația

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = m \quad \text{și se cere:}$$

a) Să se calculeze în funcţie de m expresia

$$E = \sin 2x + \cos 2x;$$

b) Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 1$.

(Studii Economice, Secţia fără frecvenţă) Craiova, 1972).

18. Să se discute rădăcinile ecuaţiei trigonometrice

$$(p + 1)\cos 2x + 2p^2 \sin x + 1 - 3p = 0$$

pentru diferitele valori ale parametrului p şi să se calculeze valorile lui x cînd $p = 1,5$.

(Studii Economice, Secţia fără frecvenţă, Craiova, 1972).

19. Se dă expresia

$$E = \frac{\operatorname{tg}(a + b) - \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg}(a - b) - \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}$$ şi se cere:

a) Să se transforme în produs.

b) Să se calculeze valoarea lui E pentru $a = \frac{\pi}{3}$, $b = \frac{\pi}{4}$.

c) Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{3} \sin p^x + \cos p^x = q$.

(Matematică, Craiova, 1973).

20. Să se determine domeniul de definiţe al funcţiei

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x^2 - 5x + 4)}{x^2 - 3x + 3} & \text{pentru } x \neq 1 \\ 0 & \text{pentru } x = 1 \end{cases}$$

(Matematică, Craiova, 1973).

21. Se consideră ecuaţia trigonometrică

$$1 - \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin 2x - \cos 2x \operatorname{tg} x) \cos^2 x = \cos^4 x - \sin^4 x$$ şi se cere:

a) Să se rezolve ecuaţia dată.

b) Să se arate că dacă x este soluţia din primul cadran a ecuaţiei date, atunci:

$$\sin(\alpha + 2x) + \cos(\alpha + x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$$ pentru orice α real.

(Electrotehnică, Craiova, 1973).

22. Să se determine valorile lui m pentru care ecuaţia $m \sin^2 x + (m - 1)\sin x + m - 2 = 0$ nu are rădăcini reale.

(Electrotehnică, Subingineri, Craiova, 1973),

23. Să se afle pentru ce valori ale lui a şi b este adevărată egalitatea: $\sin a + \sin b = \sin(a + b)$.

(Electrotehnică, Subingineri, Craiova, 1973).

24. Să se rezolve ecuaţia $|\sin x| - \sin x = 2$.

(Şt. Economice, Craiova, 1973).

25. Se dă funcţia $y = f(x)$ definită de relaţia:

$$y = \frac{x^2 \cos a - 2x + \cos a}{x^2 - 2x \cos x + 1},$$ cu $a \in (0, \pi)$ şi se cere:

a) Să se arate că pentru orice $x \in R$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$;

b) Să se arate că există $z \in (0, \pi)$ al cărui cosinus este y;

c) Să se exprime x în funcţie de z cu ajutorul unor formule calculabile prin logaritmi.

(Şt. Economice, Craiova, 1973).

26. Se dă polinomul $P(x) = x^8 \sin a - x \sin 8a + \sin 7a$ şi se cere:

a) Să se arate că $P(x)$ este divizibil cu $I(x) = x^2 - 2x \cos a + 1$ şi să se afle cîtul $Q(x)$;

b) Notîndu-se $E(a)$ expresia ce se obţine din $Q(x)$ prin înlocuirea lui x^k prin $\cos ka (k = 1, 2, \ldots 6)$, să se arate că $E(a) = 4 \sin 7a$.

c) Să se transforme în produs suma $S(a)$ a coeficienţilor polinomului $Q(x)$.

(Matematică, Craiova, 1973).

27. Se dă expresia $E = \cos 3x - \sin 3x + 6 \sin 2x(\sin x + \cos x) - 4 \sin 2x - 5 \sin x - 5 \cos x + 4$ şi se cere:

a) Să se exprime E în funcţie de $y = \sin x + \cos x$;

b) Să se afle soluţiile x ale ecuaţiei

$y^3 - y^2 - 2y + 2 = 0$, unde y este expresia de la punctul a.

(Fizică, Craiova, 1973).

28. Fiind dată egalitatea $(1 - \cos A \cos B)^2 - \sin^2 A \sin^2 B = (\cos A - \cos B)^2$, se cere:

a) Să se arate că este identitate;

b) Ţinînd seama de punctul *a)*, să se rezolve ecuaţia în x

$$x^2 \sin^2 A - 2x(1 - \cos A \cos B) + \sin^2 B = 0:$$

c) Notînd cu x_1 şi x_2 rădăcinile de la punctul b), să se calculeze expresia:

$E = \dfrac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}$ şi apoi să se găsească valoarea ei pentru

$$A = 2\pi/3, \; B = \pi/3.$$

(Fizică, Craiova, 1973).

29. Să se arate că triunghiul ale cărui unghiuri A, B, C satisfac relaţia

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$, este dreptunghic.

(Electrotehnică, Craiova, 1973).

30. Se dă ecuaţia $2(1 - p)\cos^2 x - (3p - 1)\sin x + 3p - 2 = 0$ şi se cere:

a) Să se rezolve ecuaţia dată;

b) Să se determine valorile lui $p \in R$ pentru care ecuaţia are rădăcini reale în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(Electrotehnică, Craiova, 1973).

31. a) Să se calculeze tg 15°.

b) Să se afle unghiurile unui triunghi dreptunghic care are raportul catetelor egal cu $2 - \sqrt{3}$.

(Electrotehnică, Subingineri, 1973).

32. a) Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex

$$z = 1 + \sin a + i \cos a.$$

b) Să se scrie numărul complex $z = \frac{z^2}{\bar{z}}$.

(Ec. agriculturii, Craiova, 1973).

33. Să se arate că dacă $a + b + c = 0$, atunci

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c = 1.$$

(Șt. Economice, Craiova, 1973).

34. Să se rezolve și să se discute sistemul

$$\begin{cases} x \cos a + y \sin a = \cos b \\ x \cos 2a + y \sin 2a = \cos(a + b). \end{cases}$$

(Ec. agriculturii, Craiova, 1973).

35. Se dă expresia

$$E = \frac{4 \cos 2kx \cos(k+1)x \cos(k+2)x - 2 \cos^2 2kx \cos 3x + \sin 4kx \sin 3x}{2[2 \cos 2kx + \sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x]}$$

unde $\cos 2kx \neq 0$, și se cere:

a) Să se arate că E nu depinde de k.
b) Să se rezolve ecuația $2E - \text{tg } 5x = 0$.

(Matematică, Craiova, 1974).

36. Să se rezolve ecuația $\sqrt{2}(\cos x + \sin x) - \cos 2x = 0$.

(Electrotehnică, Subingineri, Craiova, 1974).

37. Să se calculeze $\text{tg}(a + b)$ știind că $\sin a = \frac{-2}{3}$ și $\cos b = \frac{3}{4}$, unde $a \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $b \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

(Electrotehnică, Subingineri, Craiova, 1974).

38. Fie $E(x) = 1 + \cos x + \cos 2x$ şi se cere:

a) Să se transforme $E(x)$ în produs;
b) Să se rezolve ecuaţia $E(x) = 0$.

(Şt. Economice, Craiova, 1974).

39. Să se rezolve ecuaţia

$$\begin{vmatrix} \cos x & 7 \\ \sin x & 2 \cos x \end{vmatrix} = 5$$

(Şt. Economice, fără frecvenţă, Craiova, 1974).

40. Să se rezolve ecuaţia $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$.

(Ec. agriculturii, Secţia fără frecvenţă, Craiova, 1974).

41. Se dă expresia $E = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - 2x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)$ şi se cere:

a) Să se arate că $E = \cos 2x - \cos x$;
b) Să se transforme în produs;
c) Să se rezolve ecuaţia $E + 1 = 0$.

(Matematică, Secţia fără frecvenţă, Craiova, 1974).

42. Să se verifice identitatea

$$\frac{\sin a - 2 \sin 2a + \sin 3a}{\cos a - \cos 3a} = -\operatorname{tg} \frac{a}{2}.$$

(Electrotehnică, Craiova, 1974).

43. Se dă expresia $E(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$ şi se cere:

a) Să se pună sub formă de produs;
b) Să se rezolve ecuaţia $E(x) = 0$.

(Electrotehnică, Subingineri, Craiova, 1974).

44. Se consideră expresia $E(x) = \sin x + \cos x + \sin^3 x + \cos^3 x + \sin^5 x + \cos^5 x$, se notează $\sin x + \cos x = a$ şi se cere:

a) Să se exprime $E(x)$ ca funcţie de a;
b) Să se determine valorile lui a pentru care ecuaţia $\sin x +$

$$+ \cos x = a \text{ admite soluţii};$$

c) Să se rezolve ecuaţia $E(x) = 0$.

(Matematică, Craiova, 1975).

45. a) Să se rezolve triunghiul dreptunghic $ABC(A = 90°)$ cunoscînd

$$b + c = 6;$$
$$\operatorname{tg} B = 2 + 2 \cos 2c.$$

b) Să se calculeze $\sin\frac{B}{2}$.

(Fizică, Craiova, 1975).

Capitolul III

GEOMETRIA

1. GEOMETRIA PLANĂ

A. Problemele de geometrie plană, în cadrul concursurilor de admitere în învățămîntul superior din țara noastră ca și din alte țări au drept scop principal să testeze aptitudinile peste medie, ale candidaților pentru matematică, sau pentru disciplinele puternic matematizate. Din acest motiv, aria de testare este mult mai restrînsă decît în cazul algebrei, sau trigonometriei, specialitățile la care se susțin probe de geometrie plană fiind doar matematica, fizica și o bună parte a științelor tehnice.

Dificultățile principale ale problemelor de geometrie plană constau în caracterul lor nonstandard. Fiecare problemă de geometrie plană comportă un studiu specific în care sînt implicate, în afara informațiilor obținute în liceu, o anumită obișnuință de a rezolva probleme, o gîndire logică bine conturată, ca și o anumită creativitate.

Experiența concursurilor de admitere a demonstrat că probele de geometrie plană constituie principalul factor de triere a candidaților și, deci, pentru o bună pregătire de concurs este necesar să li se acorde o atenție deosebită, bineînțeles, în cazul facultăților unde aceste probe intră în programa de concurs.

În cadrul acestor probe există o bună parte din candidați care nu reușesc să demonstreze nici unul din punctele cerute, deoarece nu știu cum să abordeze asemenea probleme, ceea ce atestă o slabă pregătire liceală la geometrie. Mulți dintre acești candidați demonstrează tot felul de lucruri, însă nu cele ce se cer, deoarece nu au obișnuința de a se orienta și descoperi calea dintre ipoteză și concluzie. În acest sens este necesar să se facă simultan „pași“ dinspre ipoteză spre concluzie ca și dinspre con-

cluzie spre ipoteză cu ajutorul întrebărilor: Ce anume consecinţe rezultă nemijlocit din ipoteze (în baza teoremelor cunoscute) şi ce anume demonstraţii sînt necesare pentru ca concluzia să rezulte nemijlocit. În acest mod, făcînd cîte un „pas" înainte de la ipoteze şi alt un „pas" înapoi de la concluzie, se poate ajunge, prin etape succesive, să se găsească elementul de sudură dintre ipoteze şi concluzii.

Mulţi candidaţi, bazîndu-se pe o anumită experienţă anterioară, în conformitate cu care unele probleme se rezolvă foarte uşor printr-o construcţie suplimentară în figura dată, duc tot felul de drepte paralele sau perpendiculare pe cele date, în speranţa că „adevărul" li se va releva de la sine. Este foarte adevărat că o dreaptă ajutătoare simplifică enorm unele demonstraţii însă, pe de o parte ele nu-s necesare în orice problemă, iar pe de altă parte chiar în problemele care beneficiază de asemenea „tratament" este extrem de important să se ştie ce anume construcţie ajutătoare trebuie făcută. În acest ultim sens, experienţa de rezolvitor de probleme de geometrie este determinantă şi ea este aceea care distinge candidaţii buni şi bine pregătiţi de cei mai puţin pregătiţi. Ca principii generale se pot recomanda doar acele construcţii ajutătoare care întrunesc mai mult decît o singură proprietate faţă de figura dată. De exemplu, este în general util să se ducă o paralelă la o dreaptă a figurii date dacă ea se întîlneşte cu o altă dreaptă sau cu un cerc, al figurii date, într-un punct deja existent în figură.

De asemenea, un mare număr de candidaţi comit greşeli grave lăsîndu-se „furaţi" de figura (cu totul particulară) pe care ei au construit-o. Dacă, de exemplu, pe figura pe care au făcut-o, în mod aparent două drepte sînt paralele sau două segmente sînt egale, ei, candidaţii, se fac „luntre şi punte" să demonstreze aceste fapte chiar şi în cazurile extreme în care aceste fapte nu le folosesc la nimic pentru atingerea scopului propus, de a demonstra concluzia problemei. Unii dintre aceşti candidaţi utilizează chiar faptele aparente din figură ca pe nişte evidenţe („Aşa cum rezultă din figură, este evident că...") deşi o analiză logică destul de succintă a acestor „evidenţe" i-ar aduce în faţa unor contradicţii cu totul edificatoare asupra faptului că nu numai că nu-s evidente acele fapte, dar nici măcar nu-s adevărate.

Este adevărat că o figură bine făcută (şi asta înseamnă că dacă-i vorba de un triunghi oarecare nu trebuie desenat unul isoscel sau echilateral) poate fi de mare ajutor în rezolvarea pro-

blemei, dînd o orientare bună a căii de urmat în acest sens, însă aceasta numai cu condiţia ca orice „aparenţă“ din figură să fie supusă unei analize logice riguroase.

Cum de la început am subliniat caracterul nonstandard al problemelor de geometrie, rezultă că reţete, în sensul rezolvării lor, nu se pot da, aşa încît vom trece fără alte comentarii la:

B. PROBLEME PROPUSE.

1. Se duc în triunghiul ABC cercurile de diametre AB şi AC. În primul cerc se duce un diametru EF paralel la AC şi al doilea cerc un diametru GH paralel la AB (punctele F şi H sînt în interiorul unghiului BAC). Să se demonstreze că:

   a) Al doilea punct de intersecţie al celor două cercuri este pe latura BC;

   b) Punctele A, H, F sînt coliniare;

   c) Punctele E, A, G sînt coliniare;

   d) Dreapta AHF e bisectoarea unghiului A.

2. Se prelungeşte latura BC a unui triunghi ABC cu segmentele $BB' = BA$ şi $CC' = CA$ şi se cere să se arate că:

   a) Raza cercului (C) circumscris triunghiului $AB'C'$ este bisectoarea unghiului BAC.

   b) Cercul (C) este concentric cu cercul exînscris triunghiului ABC, relativ la latura BC.

   c) Să se calculeze unghiurile AOC' şi AOB'.

3. Într-un triunghi ABC $(AB < AC)$, bisectoarea exterioară a unghiului A întîlneşte latura BC în D. Notînd cu E simetricul punctului B faţă de dreapta AD şi cu B' simetricul aceluiaşi punct faţă de punctul A, se cere.

   a) Să se indice ce poziţie specială are dreapta AD pentru triunghiurile CDE şi CBE.

   b) Să se calculeze unghiurile $BB'C$ şi BCB' (utilizînd şi noştinţe de trigonometrie) în funcţie de unghiurile triunghiului dat.

4. Să se demonstreze că triunghiul în care două bisectoare au lungimile egale este isoscel.

5. Să se arate că în orice triunghi o mediană este mai mică decît media aritmetică a laturilor dintre care pleacă și suma medianelor este mai mică decît perimetrul triunghiului.

6. Se dă un triunghi ABC și medianele sale AD, BE, CF și se cere:

a) Să se arate că există un triunghi avînd laturile egale cu AD, BE și CF.

b) Să se calculeze aria triunghiului cu laturile egale cu medianele triunghiului dat, ca funcție de aria triunghiului ABC.

7. Fie I intersecția bisectoarelor în triunghiul ABC. Paralele prin I la BC întîlnește pe AB în M și pe AC în N. Să se demonstreze:

a) $\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{NC}$;

b) Mediatoarele segmentelor $\overline{BI}$ și $\overline{CI}$ și bisectoarea AI sînt concurente.

8. Fie triunghiul isoscel ABC și O mijlocul bazei BC. O tangentă variabilă la cercul cu centrul în O și tangent la laturile triunghiului dat taie pe AB în M și pe AC în N. Să se arate că:

$$\overline{MB} \cdot \overline{NC} = \text{constant}.$$

9. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($A = 90°$), D simetricul lui A față de bisectoarea exterioară a unghiului B și E situat pe perpendiculara în C pe BC, astfel ca $CE = CA$. Să se demonstreze că:

a) Punctele D, A, E sînt coliniare.

b) Raza cercului circumscris patratului de latura DE este medie geometrică între ipotenuza BC și segmentul DC.

10. Într-un triunghi ABC ($A = 90°$) se duce bisectoarea AD și perpendiculara DE pe ipotenuză, care intersectează catetele în E și F (F pe prelungirea lui AB). Să se demonstreze că:

a) Triunghiurile DBE şi DCF sînt isoscele.

b) Unghiurile ADB şi ACF sînt complementare.

11. Fiind date două perechi de drepte paralele, să se ducă printr-un punct oarecare o dreaptă pe care cele două perechi de paralele să intercepteze segmente egale.

12. Pe mediatoarele laturilor AB şi AC, se iau segmentele $\overline{EM}$ şi $\overline{FN}$ $(E \in AB,\ F \in AC)$ egale respectiv cu $\frac{\overline{AB}}{2}$ şi $\frac{\overline{AC}}{2}$ şi se cere să se arate că:

a) $\overline{MD} = \overline{ND}$, D fiind mijlocul lui $\overline{BC}$.

b) $\sphericalangle MDN = 90°$.

13. Pe laturile unui triunghi oarecare ABC se construiesc spre exterior pătratele $ABMN$, $ACPQ$, şi $BCRS$. Să se demonstreze că:

a) Mediana AD a triunghiului ABC, prelungită este înălţime în $\triangle ANQ$, iar înălţimea AA' a triunghiului ABC prelungită e mediana în $\triangle ANQ$.

b) $\overline{NQ} = 2\overline{AD}$.

c) $\overline{CM} = \overline{AS}$, $\overline{CM} \perp \overline{AS}$, $\overline{BP} = \overline{AR}$, $\overline{BP} \perp \overline{AR}$.

d) T fiind intersecţia înălţimii triunghiului ABC cu perpendiculara din B pe MC, $\triangle MBC = \triangle ABT$.

e) dreptele AT, BP şi MC sînt concurente.

14. În paralelogramul $ABCD$, se iau pe latura CD segmentele $\overline{CM} = \overline{CM'} = \overline{CB}$ (M' spre D), iar pe $\overline{AD}$ segmentele $\overline{AN} = \overline{AN'} = \overline{AB}$ (N' spre D). Să se demonstreze că:

a) Punctele M, B, N sînt coliniare.

b) Punctele M' BN' sînt coliniare.

c) $MN \perp M'N'$.

15. Fie în cercul de centru O un diametru $\overline{AB}$ şi o coardă $\overline{MN}$, şi fie $P = AM \cap BN$, $Q = AN \cap BM$. Să se arate că $PQ \perp AB$.

16. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC și înălțimea sa $\overline{AD}$. Din mijlocul I al segmentului $\overline{AD}$ se duce o perpendiculară pe $\overline{BC}$ care taie cercul de diametru $\overline{AB}$ în M și M_1; dreptele MB și BM_1 taie pe AC în N și N_1. Să se arate că:

a) $\overline{NC} = \overline{N_1C} = \overline{BC}$.

b) Punctele N, N_1 sînt fiecare egal depărtate de punctul A și de perpendiculara în B pe BC.

c) $AM_1 \| BN$, $AM \| BM_1$.

17. Se consideră un triunghi ABC înscris în cercul (C) și notăm cu D mijlocul arcului BAC. Să se demonstreze că $\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$.

18. Fie I un punct oarecare pe diagonala $\overline{BD}$ a pătratului $ABCD$ și $\overline{IE} \| \overline{AB}$, $\overline{IF} \| \overline{AD}$, $E \in \overline{AD}$, $F \in \overline{AB}$. Să se demonstreze că $CI \perp EF$.

19. Fie d și I o dreaptă și un punct în plan și A, B, $C \in d$. Construim dreptele $a \perp \overline{IA}$, $b \perp \overline{IB}$ și $c \perp \overline{IC}$ și notăm $A' = b \cap c$, $B' = c \cap a$, $c' \cap a$, $c' = a \cap b$. Să se demonstreze că patrulaterul $A'B'C'I$ e inscriptibil.

20. Fie ABC un triunghi oarecare și cercul Γ descris pe $\overline{BC}$ ca diametru. Să se arate că patrulaterul $AB'C'H$, unde $C' = \overline{AB} \cap \Gamma$, $= B'$ $\overline{AC} \cap \Gamma$ și H este ortocentrul triunghiului ABC, este inscriptibil și că, în plus, cercul Γ și cel circumscris patrulaterului $AB'C'H$ sînt ortogonale.

21. Se consideră două cercuri Γ_1, Γ_2 tangente în punctul A și fie d tangenta lor comună și $B \in d$; diametrul comun intersectează pe Γ_1 în C și pe Γ_2 în D. Notăm $P = \overline{BC} \cap \Gamma_1$, $Q = \overline{BD} \cap \Gamma_2$. Perpendiculara din C pe BD intersectează pe Γ_1 în M, iar perpendiculara din D pe BC intersectează Γ_2 în N. Să se arate că N, M, P, Q sînt coliniare.

22. În paralelogramul $ABCD$ se duc $\overline{EF} \| \overline{AB}$, $(E \in \overline{AD}$, $F \in BC)$, $\overline{GH} \| \overline{AD}$ $(G \in AB$, $H \in \overline{CD})$. Fie M mijlocul lui GH și N mijlocul lui EF și $P = EM \cap GN$, $Q = HN \cap FM$. $R = EM \cap HM$, $S = GN \cap FM$. Să se arate că P, $Q \in \overline{AC}$, R, $S \in \overline{BD}$.

23. Fie $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, înălţimile triunghiului ABC şi $A'E\perp AB$, $A'D\perp AC$, $I' = AA' \cap \overline{B'C'}$, $I = DE \cap \overline{AA'}$. Să se arate că I e mijlocul segmentului $\overline{A'I'}$.

24. Fie Γ şi Γ' două cercuri tangente exterior în I şi o secantă comună variabilă prin I care intersectează Γ şi Γ' respectiv în A şi A'. Să se arate că tangentele la Γ şi Γ' în A şi A' sînt paralele şi să se găsească locul geometric al mijlocului lui AA'.

25. Se dau cercurile Γ_1 şi Γ_2 şi $\{A, B\} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, se duce o secantă d, variabilă comună şi se notează $I = d \cap \Gamma_1$, $J = d \cap \Gamma_2$. Să se arate că tangentele în I şi J la cele două cercuri formează un unghi constant între ele şi să se găsească locul geometric al punctului M care împarte segmentul IJ într-un raport constant, dat.

26. În cercul Γ de rază R coardele $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sînt perpendiculare.

Să se arate că: a) $\overline{AD^2} + \overline{BC^2} = \overline{AC^2} + \overline{BD^2} = 4R^2$;

b) Notînd cu $I = AB \cap CD$, avem $\overline{AB^2} + \overline{CD^2} + 4\overline{OI^2} = 8R^2$.

27. Să se găsească locul geometric al punctelor care au raportul distanţelor la două puncte date constant.

28. Să se găsească în planul unui triunghi ABC punctul ale cărei distanţe la A, B şi C sînt proporţionale cu trei segmente date.

29. Să se găsească locul geometric al punctelor care au suma pătratelor distanţelor la trei puncte fixe, constantă.

30. Să se construiască un triunghi, asemenea cu altul dat, astfel încît vîrfurile lui să se afle pe trei cercuri concentrice, date.

31. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd că $\overline{BC} = a$, că medianele BB' şi CC' sînt perpendiculare şi că $AB^2 - AC^2 = \frac{3}{2}a^2$.

Să se calculeze $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ în funcţie de a.

32. Să se construiască un cerc tangent unui cerc dat într-un punct dat şi unei drepte date.

33. Să se construiască un cerc tangent la o dreaptă dată, într-un punct dat şi care să intercepteze pe altă dreaptă un segment capabil de un unghi dat.

34. Să se construiască un cerc tangent la un cerc dat şi la o dreaptă dată într-un punct dat.

35. Fie punctele A, B, C, D formînd o diviziune armonică pe o dreaptă $\left(\frac{\overline{CA}}{CB} = \frac{\overline{DA}}{DB}\right)$ şi O şi O' mijloacele lui $\overline{AB}$, respectiv $\overline{CD}$. Cercurile Γ_{AB}, Γ_{CD} cu diametrele $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ se intersectează în I şi I'. Să se demonstreze că $\overline{OC} \cdot \overline{OD} = \overline{OB}^2$, $\overline{O'A} \cdot \overline{O'B} = \overline{O'C}^2$, că cercurile Γ_{AB} şi Γ_{CD} sînt ortogonale şi că IC e bisectoarea $\sphericalangle AIB$, iar IB e bisectoarea $\sphericalangle CID$.

36. Dacă distanţele de la un punct M situat în unghiul ACB, la vîrfurile unui triunghi echilateral ABC sînt în relaţia $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MC}$, atunci punctul M se află pe cercul circumscris triunghiului ABC.

37. Fie în triunghiul ABC, $\overline{BC} = a$ şi $\overline{AB} + \overline{AC} = b + c$ (a şi $b + c$ date) şi se cere să se arate că:
a) Proiecţia bisectoarei AD pe una din laturile unghiului BAC nu depinde decît de a şi $b + c$.
b) Produsul perpendicularelor coborîte din B şi C pe bisectoarea exterioară a unghiului A depinde şi el tot de a şi de $b + c$.

38. Să se demonstreze că în orice trapez $ABCD$ ($\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sînt bazele este adevărată relaţia

$$\frac{\overline{AC}^2 - \overline{BD}^2}{\overline{BC}^2 - \overline{AD}^2} = \frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{\overline{DC} - \overline{AB}}.$$

39. Să se demonstreze că produsul distanţelor de la un punct M de pe cercul circumscris unui patrulater $ABCD$ înscris în cerc, la două laturi opuse ale acestuia, este egal cu produsul distanţelor de la M la celelalte două laturi.

40. Să se arate că în orice patrulater circumscris unui cerc, raportul dintre pătratele distanţelor de la centrul cercului la două vîrfuri opuse este egal cu raportul produselor laturilor care se intersectează în aceste vîrfuri.

41. Să se arate că în orice patrulater circumscris unui cerc dreapta care unește mijloacele diagonalelor trece prin centrul cercului.

42. Într-un cerc de centru O se duc două coarde AB și CD care se intersectează în punctul E. Prin E se duce o perpendiculară la dreapta $\overline{OE}$ care taie pe AC în M și pe BD în N. Să se demonstreze că $\overline{EM} = \overline{EN}$.

43. Fie cercul de centru O, două puncte fixe A și B pe el și o coardă DG a acestui cerc. (A și B sînt de aceeași parte a coardei). Pe arcul DG (cel pe care nu se află A și B) se ia un punct arbitrar C și se notează cu E și F intersecțiile dreptelor CA și CB cu DG. Să se demonstreze că

$$\frac{\overline{DE} \cdot \overline{FC}}{EF} = \text{constant.}$$

44. Se dă un cerc de centru O și un diametru AB al său; prin A și B se duc tangente la cerc care sînt tăiate de o coardă MN a cercului în E și F. Dreapta BM taie tangenta AE în D. Să se demonstreze că

$$\frac{\overline{AD}^2}{DE} = \frac{AB^2}{BF}.$$

45. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC, picioarele E, F a două bisectoare interioare și piciorul D al bisectoarei exterioare a celui de-al treilea unghi sînt în linie dreaptă.

46. Se dă triunghiul ABC și cercul său circumscris. Prin A, B și C se duc tangente la cerc pînă la întîlnirea cu laturile opuse, obținîndu-se astfel trei puncte. Să se demonstreze că aceste trei puncte sînt coliniare.

47. Fie Γ_B și Γ_C cercurile de centru B și C și de raze BI și CI, unde I este intersecția bisectoarei din A cu latura $\overline{BC}$ în triunghiul ABC. Să se demonstreze relația $\overline{AE} \cdot \overline{AF} = \overline{AI}^2$, unde $\overline{AE}$ și $\overline{AI}$ sînt tangentele din A la Γ_B și Γ_C.

48. Fie AI_1, BI_2, CI_3 trei ceviene concurente în I, în triunghiul ABC. Să se demonstreze că dreptele $A'M_1$, $B'M_2$ și $C'M_3$ sînt concurente; M_1, M_2, M_3 sînt mijloacele cevienelor, iar A', B', C', mijloacele laturilor opuse vîrfurilor A, B, C.

49. Se consideră două cercuri concentrice, Γ_R, Γ_r de raze R și r și două puncte A, B în planul lor. Se cere să se ducă o tangentă la Γ_r pe care Γ_R taie coarda $\overline{MN}$, astfel ca $\overline{AM} \parallel \overline{BN}$.

50. Se consideră două cercuri concentrice Γ_R, Γ_r de raze R și $r(r < R)$, două tangente oarecare t_1 și t_2 la Γ_r și d o dreaptă în plan.
Notăm $\{M_1, N_1\} = t_1 \cap \Gamma_R$, $\{M_2, N_2\} = t_2 \cap \Gamma_R$, $\{A\} = M_1M_2 \cap d$, $\{B\} = N_1N_2 \cap d$, $\{I_1\} = M_1N_1 \cap d$, $I_2 = M_2N_2 \cap d$. Din I_1 și I_2 se duce o tangentă la Γ_r pe care Γ_R taie segmentele $\overline{M_3N_3}$, și $\overline{M_4N_4}$. Să se arate că $\overline{M_1M_2} \parallel \overline{N_1N_2}$, $\overline{M_3M_4} \parallel \overline{N_3N_4}$ și că punctele A_1, M_3, M_4 și B, N_3, N_4 sînt coliniare.

51. Să se demonstreze că ortogonalitatea diagonalelor unui patrulater și egalitatea sumelor pătratelor laturilor opuse sînt proprietăți echivalente.

52. Condiția necesară și suficientă ca un patrulater să fie paralelogram este ca suma pătratelor laturilor să fie egală cu suma pătratelor diagonalelor.

53. Să se arate că singurul punct din interiorul unui triunghi care împarte cevienele ce trec prin el în același raport, este baricentrul triunghiului.

54. Se proiectează M și N pe laturile unghiului XOY în M' și M'', respectiv N', N''. Să se arate că o condiție necesară și suficientă pentru ca OM și ON să fie simetrice față de bisectoarea $\sphericalangle XOY$ este ca $\overline{MM'} \cdot \overline{MM''} = \overline{NN'} \cdot \overline{NN''}$ și să se deducă, de aici, că dacă într-un triunghi ABC dreptele AA', BB', CC' sînt concurente, atunci simetricele lor față de bisectoare sînt de asemeni concurente.

55. Fie $\triangle ABC$ și $M \in BC$, $N \in CA$, $P \in AB$. Să se arate că perpendicularele în M, N, P pe BC, CA, AB sînt concurente dacă și numai dacă $\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 + \overline{NC}^2 - \overline{NA}^2 + \overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 0$.

56. Fie $\triangle ABC$ și $\triangle A'B'C'$. Să se arate că perpendicularele din A, B, C pe $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ sînt concurente dacă și numai dacă perpendicularele din A', B', C' pe BC, CA, AB sînt concurente.

57. Fie A', B', C' picioarele bisectoarelor interioare în $\triangle ABC$ ($A' \in BC$ etc.). Să se arate că perpendicularele în A', B', C' pe BC, CA, AB sînt concurente dacă și numai dacă $\triangle ABC$ e isoscel.

58. În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) se ia $P \in AD$ și $Q \in BC$, astfel ca $AQ \parallel CP$. Să se arate că $PE \parallel DQ$.

59. Fie paralelogramul $ABCD$. Se consideră cercul circumscris triunghiului ABD care taie pe BC în E, pe CD în E și pe CD în F. Fie $G \in BF \cap AD$ și $H \in DE \cap AB$, $I \in BF \cap DE$, iar paralela prin G la AB taie paralela prin H la AD în K. Să se arate că $\Delta BIE \sim \triangle BIF$, $\triangle BIH \sim \triangle DIG$, $EF \parallel GH$, punctele I, C, K sînt colineare și că B, D, G și H sînt conciclice.

60. Pe laturile AB, AC ale $\triangle ABC$ se construiesc în exterior paralelogramele arbitrare $ABDE$ și $A \in FG$. Fie $H \in DE \cap \overline{FG}$ și $\overline{BI}$, $\overline{CJ}$ egale și paralele cu AH și de aceeași parte cu A față de BC. Să se arate că aria patrulaterului $BIJC$ este egală cu suma ariilor paralelogramelor construite. Ce se întîmplă cînd $\sphericalangle A = 90°$?

61. Un triunghi isoscel BCM ale cărui unghiuri de la bază B și C sînt egale și constante, se deformează, cu condiția că B și C să rămînă pe un cerc fix dat și latura BM se rotește în jurul unui punct fix A. Se cere locul lui M.

62. Să se arate că dreapta lui Simpson (determinată de proiecțiile unui punct M al circumferinței circumscrise $\triangle ABC$ pe laturile triunghiului) este la egală distanță de punctul M și de ortocentrul triunghiului.

63. Dacă prin vîrfurile unui triunghi se duc trei drepte făcînd, în același sens de rotație, unghiuri de 60° cu laturile opuse, să se arate că aceste drepte formează un triunghi egal cu primul.

64. Să se arate că două coarde AB și AC ale unui cerc de centru O determină pe diametrul perpendicular pe BA două puncte conjugate armonic față de capetele diametrului.

65. Să se demonstreze că în triunghiul ABC în care $\hat{A} = 2\hat{B}$, laturile satisfac relația $a^2 - b^2 = bc$ și reciproc (a, b, c sînt lungimile laturilor).

66. Se dă cercul (C) şi un triunghi isoscel ABC, $(\overline{AB} = \overline{AC})$ înscris în el; prin vîrful A se duce o secantă variabilă care întîlneşte cercul (C) în E şi baza BC a triunghiului în D. Să se demonstreze că:

a) $\overline{AB}$ este media geometrică a segmentelor $\overline{AE}$ şi $\overline{AD}$;

b) Simetricul F al lui C faţă de AE este pe dreapta EB;

c) Să se găsească locul geometric al punctului F cînd punctul E descrie cercul (C).

67. Să considerăm un diametru $\overline{AB}$ şi o coardă $\overline{MN}$ în cercul de centru O. Dreptele AM şi BN se intersectează în P, iar dreptele BM şi AN în Q. Să se demonstreze că $PQ \perp AB$.

68. Se prelungeşte mediana AE a triunghiului ABC cu o lungime $\overline{ED} = \overline{AE}$ şi latura BC cu o lungime $\overline{CM} = \overline{CB}$ şi se cere:

a) Să se afle punctul de intersecţie al medianelor triunghiului ADM;

b) Să se afle rapoartele dintre laturile triunghiului ABC şi medianele triunghiului ADM;

c) Să se compare laturile triunghiului ADM cu medianele triunghiului ABC;

d) Să se arate că perimetrul unui triunghi este cuprins între suma lungimilor medianelor şi dublul acestei sume şi că suma lungimilor medianelor este cuprinsă între semiperimetrul şi perimetrul triunghiului.

69. Fie AB şi CD două segmente egale. Să se arate că dreapta care uneşte mijloacele segmentelor AC şi BD este paralelă cu bisectoarea dreptelor suport ale argumentelor date.

70. Se dă un cerc de centru O şi de diametru AB şi un punct oarecare C pe cerc. Notînd cu D şi E centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AOC şi COB şi cu $M = AD \cap BE$, se cere să se demonstreze că:

a) Punctul M se află pe cercul dat;

b) $MC \parallel AB$;

c) Poligonul $OECDM$ este inscriptibil.

71. Se dă un cerc și un punct fix B pe el. O tangentă mobilă la cerc, în C, întîlnește tangenta din B în punctul A. Se cere:

a) Locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului ABC;

b) Locul centrului înscris în același triunghi și al cercului exînscris corespunzător punctului A.

c) Locul geometric al ortocentrului triunghiului ABC.

72. Să se găsească locul geometric al intersecției medianelor în triunghiul ABC cînd vîrful A descrie o dreaptă a din planul său.

73. Se dau, un cerc de centru O, două puncte A și B diametral opuse pe el, un punct variabil D pe cerc și un punct C fix pe dreapta AB, exterior cercului. Prin A se duce o paralelă la BD care intersectează pe CD în M, iar prin B se duce o paralelă la AD care intersectează pe CD în P. Se cere:

a) Să se arate că paralelele prin M și P la OD intersectează dreapta AB în două puncte fixe;

b) Să se afle locul geometric al punctelor M și P.

74. Se notează cu D piciorul bisectoarei interioare a unghiului A pe latura BC în $\triangle ABC$ și cu E intersecția aceleiași bisectoare cu cercul circumscris $\triangle ABC$. Se cere să se demonstreze că EB este tangenta la cercul circumscris $\triangle ABD$ și EC tangentă la cercul circumscris $\triangle ACE$.

75. Într-un patrulater oarecare se duc paralele prin mijloacele fiecărei diagonale la diagonala cealaltă, care se întîlnesc în O. Unind O cu mijlocul fiecărei laturi, să se arate că patrulaterul dat se împarte în patru părți echivalente.

76. Se dă un paralelogram $ABCD$ și un punct interior P și se cere să se demonstreze:

a) $S_{PAB} + S_{PCD} = S_{PAD} + S_{PBC}$;

b) $S_{PAC} = |S_{PAB} - S_{PAD}|$;

c) Ce devin rezultatele de la a) și b) cînd punctul P este exterior?

77. Să se găsească într-un triunghi ABC un punct interior M, astfel ca triunghiurile MBC, MCA, MAB:

a) Să fie echivalente;

b) Să aibă ariile proporționale cu trei numere date m, n, p.

78. Să se împartă un hexagon regulat în trei părți echivalente prin două drepte paralele cu o latură.

79. Să se arate că suma distanțelor unui punct interior unui poligon regulat, la laturile acestuia, este constantă.

80. Pe o dreaptă (d) se iau două segmente AN și MB, consecutive de lungimi a, b, și pe ele (ca laturi) se construiesc, de aceeași parte a dreptei, triunghiurile echilaterale AMC și BMD. Se cere să se afle aria patrulaterului $ABCD$.

2. GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

A. În principiu, problemele de geometrie în spațiu ar trebui să aibă un grad de dificultate în plus în raport cu cele de geometrie plană, datorită, în primul rînd, structurii mai complexe a figurilor bidimensionale și datorită faptului că desenul figurilor în spațiu este îngreunat de reducerea unei dimensiuni de la original la imaginea de pe foaia de hîrtie. Astfel, de exemplu, figurile care conțin drepte neconcurente și neparalele (strînse) reprezentate prin mijloacele desenului perspectiv, apar foarte deformate și, mai ales, nu se pot desena nemijlocit unghiurile lor.

În practica concursurilor de admitere, dificultatea problemelor de geometrie în spațiu nu este mai mare ca a celor de geometrie plană, întrucît, de regulă, nu se cere demonstrarea de proprietăți ale figurilor tridimensionale, ci evaluarea măsurilor diferitelor elemente ale figurilor (lungimi de segmente, arii, volume). Numărul teoremelor care trebuie să constituie „bagajul" de cunoștințe ale candidaților este mai mic decît în cazul geometriei plane, iar proprietățile de demonstrat, puține, cîte se cer, se reduc la studiul lor într-un plan al figurii.

Cu toate acestea, și această categorie de probleme constituie un factor puternic de triere a candidaților, întrucît tendința de utilizare a observațiilor „pe figură" semnalată și mai înainte constituie, aici, o sursă și mai importantă de erori.

În majoritatea problemelor de concurs din acest domeniu rezultatele se obțin prin utilizarea relațiilor metrice din triunghiul dreptunghic și a teoremei celor trei perpendiculare. O mare atenție

trebuie acordată însușirii corecte a noțiunilor și definițiilor elementelor fundamentale, cum sînt: cele de definire a planului, unghiul planelor, unghiul dreptelor necunoscute, perpendicularitatea, paralelismul etc.

Ținînd seama de specificul problemelor de concurs, la geometria în spațiu, o pondere însemnată o are cunoașterea „pe dinafară" a formulelor care dau ariile și volumele diferitelor corpuri geometrice și, în special, a acestor elemente pentru corpurile de rotație. În rest, aceste probleme, ca și cele de geometrie plană, implică aceeași forță de analiză și aceeași rigoare în demonstrație.

B. PROBLEME PROPUSE

1. Fie un triunghi ABC și un plan P fixe și un punct S mobil, neaparținînd nici planului P nici celui în care se află $\triangle ABC$. Să se arate că dreptele ab, ac, bc, unde a, b, c, sînt intersecțiile dreptelor SA, SB, SC cu planul P, trec prin trei puncte fixe.

2. Fie un triunghi ABC cu vîrfurile B și C fixe, iar vîrful A mobil pe o dreaptă oarecare D în spațiu. Să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ABC.

3. Să se determine proiecția unui punct P egal depărtat de vîrfurile $\triangle ABC$, pe planul acestui triunghi, dacă:

   a) $\triangle ABC$ este echilateral;

   b) $\triangle ABC$ este isoscel;

   c) $\triangle ABC$ este dreptunghic în A.

4. Să se determine unghiurile fețelor unui tetraedru regulat și distanța de la centrul tetraedrului la fețele lui.

5. Se consideră un triedru dreptunghic $OABC$ și o dreaptă OP în interiorul acestui triedru. Se cere să se arate că:

   a) Suma unghiurilor drepte OP cu OA și OB este mai mare ca $90°$;

   b) Suma unghiurilor dintre OP și planele triedrului este cel mult egală cu $90°$.

6. Să se arate că dacă o sferă este tangentă la toate muchiile unei piramide triunghiulare, atunci această piramidă este regulată dacă centrul sferei se află pe înălțimea piramidei.

7. $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ fiind două segmente în spațiu, iar M și N mijloacele lor, să se arate că $\overline{MN} \leqslant \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$, $\overline{MN} \leqslant \frac{1}{2}$ $(\overline{AD} + \overline{BC})$.

8. Se consideră prisma dreaptă $ABCDEFGH$ cu raza unui romb $ABCD$ avînd diagonalele $AC = 2a$ și $BD = a$. Pe muchiile laterale de lungime $AE = 4a$ se iau segmentele $AA' = 3a$, $CC' = a$. Să se arate că $\triangle A'FC'$ este dreptunghic, că planul $A'FC'$ trece prin D și să se calculeze aria totală și volumul prismatoidului avînd bazele $ACBD$ și $A'FC'D$.

9. Fie prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ avînd baza un triunghi echilateral de latură a. Pe muchiile BB' și CC' se iau segmentele $BD = x$, $CE = y$. Se cere determinarea condiției pentru ca $\triangle ADE$ să fie dreptunghic în D; în această condiție să se determine, ca funcție de x, volumul limitat de suprafața laterală a prismei și de suprafețele ABC și ADE.

10. Fie $OABC$ un tetraedru și $A_1 \in OA$, $B_1 \in OB$, $C_1 \in OC$, $A_2 \in BC_1 \cap CB_1$ etc. Să se arate că dreptele AA_2, BB_2 și CC_2 sînt concurente.

11. Pe muchiile laterale ale prismei triunghiulare regulate de latură a și înălțime b se iau punctele M, N, P, astfel ca $A_1M = \overline{MA}$, $3\,\overline{B_1N} = \overline{NF}$ și $\overline{C_1P} = 3\,\overline{PC}$. Să se determine unghiul planelor ABC și MNP, distanțele de la A, B, C la planul MNP, aria $\triangle MNP$ și să se arate că planul MNP taie sfera circumscrisă prismei date după un cerc mare al sferei.

12. Considerăm piramida dreptunghiulară $VABCD$ în care muchia VA este și înălțime. Se duce $AM \perp VB$ și $AN \perp VD$. Notînd $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{AV} = c$ se cere să se arate că $CV \perp$ planul (AMN), să se calculeze perimetrul secțiunii în piramidă prin planul (AMN) și să se calculeze unghiul planelor $ABCD$ și AMN, în cazul $a = c$, $b = c\sqrt{2}$.

13. Să se calculeze volumul unui tetraedru în funcție de laturile bazei și unghiurile făcute de fețele laterale cu planul bazei.

14. Pe piramida triunghiulară regulată ca latura bazei a și unghiul dintre fețe și bază α. Să se calculeze volumul și aria laterală a piramidei.

15. Într-o piramidă patrulateră regulată, unghiul fețelor cu baza este α și latura bazei a. Prin muchia bazei se duce un plan înclinat cu unghiul β față de planul bazei. Să se calculeze aria secțiunii determinată de acest plan în piramidă.

16. Fie piramida $SABC$ avînd baza unui triunghi echilateral ABC de latura a și muchie $\overline{SA} = 2a$ perpendiculară pe planul bazei și se cere să se calculeze volumul și aria totală a piramidei și la ce distanță $SA' = x$ de S trebuie secționată piramida cu un plan paralel cu baza, astfel ca volumul triunghiului de piramidă obținut să fie $\frac{19}{8}$ din volumul piramidei mici.

17. Se consideră piramida triunghiului $VABC$ cu baza ABC triunghi isoscel $(\overline{AB} = \overline{AC} = a)$ și $\overline{VA}$ pe $\overline{ABC}$, $\overline{VB} = a$. Pe muchiile $\overline{BC}$ si $\overline{AV}$ se iau punctele $\overline{M}$ și $\overline{N}$ așa fel ca $\overline{BM} = \frac{1}{3}BC$ și $\overline{AN} = \frac{1}{3}\overline{AV}$. Să se calculeze muchiile piramidei și segmentul MN și să se demonstreze că $MN \perp AV$, $MN \perp AV$.

18. Un tetraedru e secționat cu un plan paralel cu două muchii opuse. Să se arate că secțiunea e un paralelogram și să se determine modul de secționare așa fel ca aria paralelogramului să fie maximă.

19. Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vîrful S și M, N, P mijloacele segmentelor DA, AB și SC. Să se determine aria secțiunii determinată în piramidă de planul MNP în funcție de latura bazei a și înălțimea piramidei h și să se arate că planul MNP secționează piramida în două corpuri de volum egale.

20. Să se calculeze aria laterală, aria totală și volumul unei piramide regulate cu n laturi cunoscînd raza ρ a sferei înscrise în piramidă și unghiul α de la vîrf al unei fețe laterale.

21. Să se calculeze aria laterală, aria totală și volumul unei piramide regulate cu n laturi cunoscînd raza ρ, a sferei circumscrise piramidei și înclinarea α a feței laterale pe bază.

22. Într-o sferă se înscrie un cilindru circular drept avînd aria laterală egală cu jumătate din aria sferei. Se cere raportul între înălțimea cilindrului și raza lui, raportul dintre volumul cilindrului și al sferei, precum și raza sferei cînd se dă aria totală a cilindrului (caz particular $S_t = 24\pi$ cm^2).

23. Unei sfere de rază R i se circumscrie un con circular drept ale cărei generatoare fac cu planul bazei unghiul de $60°$. Să se calculeze raza cercului de contact dintre con și sferă și raportul dintre ariile celor două calote în care acest cerc împarte sfera.

24. Unei sfere de rază r i se circumscrie un trunchi de con și acestuia o sferă de rază R. Știind că razele bazelor trunchiului de con sînt R_1 și R_2 ($R_1 < R_2$), să se exprime R ca funcție de r, R_1, R_2, să se calculeze distanțe între cercurile celor două sfere și să se arate că raza ρ a cercului de contact dintre sfera mică și suprafața laterală a trunchiului de con este medie armonică între R_1 și R_2.

25. Într-un paralelipiped dreptunghic aria bazei este 4 cm^2, iar suma dintre semiperimetrul bazei și înălțime este cu 10 cm mai mare decît înălțimea. Se cere să se afle dimensiunile paralelipipedului, astfel ca aria lui totală să fie maximă.

3. GEOMETRIE ANALITICĂ

1. Să se scrie ecuația cercului trecînd prin mijloacele laturilor unui triunghi. Să se arate că acest cerc trece prin picioarele înălțimilor și mijloacele segmentelor cuprinse între vîrfuri și ortocentru (Cercul Euler).

2. Două culturi A și B ale unui C.A.P. trebuie să ocupe cel mult 400 ha, astfel încît cultura B să nu depășească cu mai mult de 100 ha dublul culturii A. Știind că beneficiul realizat pe un hectar din cultura A este un milion lei, iar cel realizat pe un hectar din cultura B este de două milioane lei, să se planifice cele două culturi astfel, încît să se realizeze beneficiul maxim.

3. Se cere ecuația unui cerc care să fie tangent la bisectoarea întîia în punctul I (2,2) și care să taie pe OX un segment de lungime egală cu 2.

4. Se cere locul geometric al centrelor cercurilor față de care un punct dat are o putere dată și care taie ortogonal un cerc dat.

5. Se cere ecuația cercului ortogonal cercurilor $x^2 + y^2 - 6x - 15 = 0$, $x^2 + y^2 + 2y - 15 = 0$ și care trece prin punctul de coordonate $(5, -4)$.

6. Se cere ecuația tangentelor comune cercurilor

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 \; ; \; (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 9.$$

7. Se consideră un cerc de diametru AB. Prin punctul C, luat arbitrar pe AB, se duce o perpendiculară d pe dreapta AB. Prin A se duce o dreaptă variabilă care întîlnește pe d în P și cercul în H. Dreapta BH întîlnește pe d în Q, iar dreapta QA întîlnește cercul în K.
Se cere:

a) Să se arate că produsul $\overline{CP} \cdot \overline{CQ}$ este constant;

b) Să se arate că P, K, B sînt coliniare;

c) Să se arate că dreapta HK trece printr-un punct fix.

8. Printr-un punct O al unui cerc se duc coardele OA, OB, OC la întîmplare. Să se arate că cercurile construite pe OA, OB, OC ca diametri se taie două cîte două în trei puncte coliniare.

9. Se dau punctele $A\,(0,7)$, $B(-2, 0)$, $C(4, 0)$ și fie $D(\lambda, 0)$ variabil.

a) Să se scrie ecuația cercului ABC;

b) Să se scrie ecuațiile cercurilor care trec prin B și D tangent în B la AB, respectiv prin C și D tangent la AC în C;

c) Să se găsească locul geometric al intersecției cercurilor de la b) cînd λ este variabil.

10. Fie cercurile de ecuație $x^2 + y^2 - 6x = 0$ și $x^2 + y^2 - 10x = 0$. O dreaptă variabilă care trece prin origine intersectează cele două cercuri în punctele P și Q.

a) Să se arate că tangentele în P și Q la cele două cercuri sînt paralele;

b) Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului PQ.

11. Se consideră o hiperbolă și un punct P în planul acesteia. Să ducem prin P paralele la asimptotele hiperbolei. Fie M și N punctele de intersecție ale acestora, paralele cu hiperbola.

a) Care este locul geometric al punctelor P care au proprietatea că dreapta MN trece prin centrul O al hiperbolei ;

b) Care este locul geometric al punctelor P pentru care dreapta MN este paralelă cu una din axele hiperbolei.

12. Fie date un punct O și o dreaptă (Δ), fixe, iar punctul B fix pe (Δ). Punctele A și C sînt variabile pe dreapta (Δ), astfel ca OB să fie bisectoare a unghiului AOC.

a) Să se găsească locul geometric al intersecției paralelei prin A la OB cu perpendiculara lui C pe OB ;

b) Să se găsească locul geometric al intersecției paralelei prin C la OA cu paralela prin A la OC.

13. Pe parabola $y^2 - 2px = 0$ se iau punctele mobile M și N. Normalele la parabolă în aceste puncte se intersectează în punctul P. Se cere : a) Să se arate că dacă dreapta MN trece printr-un punct fix I situat pe axa parabolei, atunci locul geometric al punctului P este o parabolă ; b) Cum trebuie luat punctul I pentru ca parabola lor geometrică să treacă prin focarul primei parabole ?

14. Să se determine locul geometric al punctului care are proprietatea că tangentele duse din el la o parabolă determină pe tangenta în vîrful parabolei un segment de lungime dată.

15. Prin focarul parabolei $y^2 - 2px = 0$ se duce o coardă AB care face unghiul α cu axa Ox. Se cere :

a) Să se demonstreze relația $AB \sin^2 \alpha = 2p$;

b) Dacă prin focar se mai duce și coarda CD perpendiculară pe AB, să se arate că $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{2p}$;

c) Dacă CD are o direcție arbitrară, să se găsească locul geometric al punctului de intersecție a dreptelor AD și BC.

16. În triunghiul ABC notăm cu H_1, H_2, H_3, A', B', C' și M_1, M_2, M_3 respectiv picioarele înălțimilor duse toate din A. Să se demonstreze că dreptele $A'M_1$, BM_2, $C'M_3$ sînt concurente.

17. Prin punctul $A(0, -a)$ se duce o dreaptă variabilă d și se cere simetrica δ a axei Ox față de d și locul geometric al intersecției dintre δ și perpendiculara din P pe d.

18. Prin $A(0, -a)$ se duce o dreaptă variabilă Δ și notăm $I = Ox \cap \Delta$. Fie $d \perp AI$, $I \in d$, $\delta \parallel IA$, $O \in \delta$ și d' matricea lui δ față de prima bisectoare a sistemului de coordonate xoy'. Se cere să se demonstreze că $\{X\} = d \cap d'$.

19. Dreptunghiul $ABCD$ are perimetrul constant și AB, AD fixe ca direcție. Se cere locul lui C și să se arate că perpendiculara din C pe diagonala BD rece printr-un punct fix.

20. In $\triangle ABC$ se duce dreapta variabilă D prin A și se consideră $K \in AB$ arbitrar $\{I\} = D \cap CK$, $\{L\} = BC \cap IM$, $IM \parallel AB$, $\{M\} = D \cap KL$. Se cere $\{M\}$.

21. Considerăm $\triangle ABC$ și I un punct în planul său, $\{A'\} = BC \cap IK$, $IK \perp IA$. $\{B\}' = CA \cap IL$, $IL \perp IB$, $\{C'\} = AB \cap IM$, $IM \perp IC$. Să se demonstreze că A', B', C' sînt coliniare.

22. Fie D_1, D_2, D_3 trei drepte paralele și $A, B \in D_3$, fixe. O dreaptă oarecare D taie pe D_1 în Q și pe D_2 în P. Se cere: $\{X\} = AP \cap BQ$ cînd D se deplasează paralel cu o poziție a ei.

23. Într-un punct al diametrului AB al unui cerc Γ se duce o perpendiculară D și considerăm $M \in D$, $\{N\} = \Gamma \cap AM$, $\{P\} = \Gamma \cap BM$. Să se arate că $\overline{AM}, \overline{AN} =$ const., $BM \cdot \overline{BP} =$ const., $\{X\} = \overline{PN} \cap \overline{AB}$ e constituită dintr-un singur punct și că $AP \cap BN \in D$.

24. Se dă cercul Γ de diametru AM și o dreaptă $D \perp AB$, $C \in D \cap AB$, $C \notin AB$ și o secantă variabilă δ ($A \in \delta$), $M \in \delta \cap D$, $P \in \delta \cap \Gamma$, $N \in BP \cap D$, $Q \in AN \cap \Gamma$.
Să se arate că CM, $CN =$ const., că N, Q, B sînt coliniare și că dreptele PQ (cînd δ variază), trece printr-un punct fix [$\delta \cap PQ$ are un singur punct].

25. Se consideră dreptele paralele D_1, D_2, D_3 și D o secantă a lor. Notăm $P \in D_1 \cap D$, $Q \in D_2 \cap D$, A, $B \in D_3$, $A_1 \in D_1 \cap AK$, $A_2 \in D_2 \cap AK$ ($AK \parallel D$), $B_1 \in D_1 \cap B <$, $B_2 \in D_2 \cap BL$ ($BL \parallel D$). Să se demonstreze că dreptele AQ, BP, A_1B_2 sînt concurente, la fel ca și AP, BQ, A_2B_1.

26. Fie punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $E\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, I mijlocul lui OE și G baricentrul $\triangle OAB$. Să se demonstreze că $8(AI^2 + BI^2) = 9(\overline{AG}^2 + \overline{EG}^2) = 5\overline{AB}^2$, să se afle $X = \{IM \cap GN \mid IM$ Ox, GN $Oy\}$ cînd a, b variază cu restricția $a^2 + b^2 =$ constant și să se calculeze aria S generată de AB prin rotirea în jurul axei OP ($OP \perp OE$) din planul xOy, în funcție de a, b și să se calculeze, de asemenea, în funcție de a, b, volumul cuprins între aria S și două plane paralele duse prin A și B perpendiculare pe OP.

27. Se consideră pătratul $OABC$ cu O fix și A descriind o dreaptă D. Să se găsească $\{B\}$, $\{C\}$ și $\{O_1\}$ (O_1 fiind centrul pătratului), să se scrie ecuația cercului Γ circumscris pătratului, să se afle locul intersecției tangentelor în O și A la Γ și să se calculeze volumul corpului generat prin rotirea pătratului $OABC$ în jurul unei axe din planul său, perpendiculară în O pe diagonala lui.

28. Se consideră punctul $A(0, a)$ și o secantă variabilă prin A, care taie pe OX în P. Se ia pe Oy punctul Q, astfel ca $OQ = OP$ și se cere să se arate că perpendiculara QN din Q pe AP taie pe Ox într-un punct fix. Să se calculeze $\{QN \cap AP\}$.

29. Se dau pe o axă punctele $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$. Se cere $M(x)$ din condiția $\overline{MA}''$, $\overline{BC} + MB''\cdot\overline{CA} + \overline{MC}''\cdot\overline{AB} = 0$.

30. Într-un triunghi se duc, din piciorul unei înălțimi, perpendiculare pe laturi și pe celelalte înălțimi. Să se arate că cele patru puncte obținute sînt coliniare.

31. Se dau punctele $A(0, 7)$, $B(-2, 0)$, $C(4, 0)$, $D(\lambda, 0)$. Să se scrie ecuația cercului ce trece prin A, B și C, ecuațiile cercurilor Γ_1 și Γ_2 care trec prin B și D, tangente în B la AB și respectiv prin C și D, tangent la AC în C și să se găsească $\{\Gamma_1 \cap \Gamma_2\}$ cînd λ variază.

32. Se dă $\triangle ABC$ și $D \in \overline{BC}$, $E \in \overline{BC}$ și se duce $FG \parallel BC$ și se duc dreptele DG și EF. Se cere $\{DG \cap EF\}$.

33. Se dă cercul Γ de centru O și o coardă AB a acestui cerc. Se duce tangenta CG la cerc și bisectoarea CM a unghiului ACG format de coardă și tangentă, apoi din O, se duce $OM \perp CM$. Se cere locul geometric al lui M.

34. Să se găsească locul intersecțiilor diagonalelor dreptunghiurilor înscrise într-un triunghi.

35. Un triunghi variabil ABC care rămîne asemenea cu el însuşi, se roteşte în jurul lui A în timp ce B parcurge dreapta fixă XY. Se cere locul geometric al lui C.

36. Fiind date puncte A şi B, numerele m şi n şi o lungime constantă K, se cere locul geometric al punctului C, astfel ca $m\,\overline{CA}^2 \pm n\,CB^2 = K^2$.

4. PROBLEME DE CONCURS

1. Se dă dreapta D de ecuaţie $4x - 3y = 12$, care intersectează axa Ox în punctul A.

   a) Să se găsească ecuaţia cercului tangent axei Oy şi dreptei D în punctul A, cu centrul în primul cadran;

   b) Să se găsească lungimea corzii care uneşte punctele de tangenţă ale cercului cu axa Oy şi dreapta D;

   c) Sistemul format de dreapta D şi cerc se roteşte în jurul diametrului cercului care trece prin punctul B de concurenţă al dreptei D cu axa Oy. Să se calculeze volumul cuprins între sferă şi conul tangent sferei, generat de tangenta la sfera ce trece prin B.

2. Fiind date în plan punctul M şi dreptele D_1 şi D_2, să se construiască un triunghi echilateral MAB la care A să fie pe D_1, iar B pe D_2. Discuţie.

(Matematică, Craiova, 1966).

3. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc trei triunghiuri echilaterale ABF, BCD, ACF, cărora se circumscriu cercurile O_1, O_2, O_3. Se se arate că:

   a) Cele trei cercuri au punct comun O şi unghiurile AOB, BOC, COA sînt egale;

   b) Punctele C, O, E respectiv A, O, D sînt coliniare şi $AD = CE$;

   c) B, C fiind fixe, iar A variabil în plan, să se determine locul geometric al punctului O;

d) Razele cercurilor O_1, O_2, O_3 sînt egale atunci și numai atunci cînd ABC este echilateral.

4. Într-un sistem rectangular de coordonate se dau punctele fixe $A(a, 0)$, $B(b, c)$ și punctul $I(k, 0)$ care parcurge axa Ox. Se cere:

a) Ecuația cercului tangent în O la OB și care trece prin I; ecuația cercului tangent în A la AB și care trece prin I;

b) M fiind al doilea punct de intersecție al celor două cercuri de la a), să se arate că dreapta IM trece printr-un punct fix;

c) Să se regăsească locul de la punctul c) pe cale de geometrie elementară.

5. Se dă dreapta d perpendiculară pe planul P și o dreaptă k din plan.

a) Să se arate că orice punct de pe d se proiectează pe k în același punct B;

b) Să se găsească locul geometric al punctului B cînd dreapta k se rotește în jurul unui punct fix A al său.

(Matematică, Craiova, 1967)

6. Triunghiul ABC are unghiul A de $60°$. BD și CE sînt înălțimi, iar AI este bisectoare interioară. Dreptele BD, CE și AI formează triunghiul $A_1B_1C_1$. Fie S un punct de pe latura A_1C_1 (între A_1 și C_1). Din S se duce perpendiculara SQ pe A_1B_1 care intersectează prelungirea lui B_1C_1 în T. Se cere:

a) Să se arate că triunghiul SC_1T este isoscel;

b) Să se demonstreze că $a(A_1Q + MC_1) = A_1B_1$, unde M este mijlocul lui ST;

c) Să se găsească locul geometric al lui M cînd S descrie interiorul segmentului A_1C_1.

7. Se dau punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$ și dreapta $y = mx$. Se cere:

a) Să se scrie ecuația unei drepte d care trece prin A, a unei drepte d' ce trece prin B;

b) Să se scrie condiţia ca dreptele de la punctul a) să fie concurente cu dreapta $y = mx$;

c) Dreapta d tăind pe Oy în A' şi d' tăind pe Ox în B', să se arate că dreptele $A'B'$ formează un fascicol, condiţia de la punctul b) fiind îndeplinită;

d) Să se găsească locul geometric al vîrfului fascicolului de la punctul c), cînd dreapta $y = mx$ se roteşte în jurul originii.

(Matematică, Craiova, 1968).

8. Într-un punct exterior A al unui cerc de rază r se duce o tangentă AB la cerc şi o secantă ADC. Ştiind că secanta se află la distanţa d de centrul cercului, iar unghiul dintre secantă şi tangentă este α, să se afle aria triunghiului ABC.

(Electrotehnică, Craiova, 1966).

9. Se dă un cerc de diametru AB. Prin punctul C, simetricul lui B faţă de A, se duce o perpendiculară d pe dreapta AB. Prin A se duce o dreaptă variabilă, care întîlneşte pe d în P şi cercul în N. Dreapta întîlneşte pe d în Q, iar dreapta OA întîlneşte cercul în K. Se cere:

a) Să se arate, prin geometria elementară, că produsul $CP \cdot CQ$ este constant;

b) Să se arate, prin geometrie analitică, că:
— P, K, B sînt coliniare;
— Dreapta NK trece printr-un punct fix.

(Matematică, Craiova, 1969).

10. Un dreptunghi, avînd perimetrul de 24 cm, este înscris într-un triunghi cu laturile de 10 cm, 17 cm, 21 cm. Să se determine laturile dreptunghiului, ştiind că două din vîrfurile sale se află pe latura cea mai mare a triunghiului.

(Electrotehnică, Craiova, 1970).

11. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$ cu dimensiunile $AB = 16$ cm, $BC = 12$ cm, $AE = 3{,}2$ cm. Pe AB se ia $AI = 4$ cm, pe AD se ia $AL = 3$ cm şi se taie paralelipipedul cu planul EIL. Se cere:

a) Volumul paralelipipedului rămas;

b) Aria totală a paralelipipedului rămas.

(Electrotehnică, Craiova, 1971).

12. 1. Fie ABC un triunghi oarecare și AD mediana corespunzătoare laturii BC. Dacă printr-un punct E al laturii BC se duce o paralelă la AD, care taie pe AB în M și AC în M, atunci:

a) Să se arate că $EM + EN < P$ (P fiind perimetrul triunghiului ABC);

b) Dacă celelalte două mediane sînt perpendiculare, să se arate că $EM + EN = 3BC$;

c) Să se găsească (analitic) locul geometric al vîrfului A cînd vîrfurile B și C sînt fixe și este îndeplinită condiția de la punctul b.

13. O piramidă are baza un triunghi dreptunghic isoscel ABC ($AB = AC = a$), iar muchia AV perpendiculară pe bază are lungimea b. Se cere:

a) Aria totală a piramidei;

b) Valoarea unghiului diedru format de fața VBC cu baza în cazul $B = \frac{a}{\sqrt{2}}$;

c) Aria secțiunii făcută în această piramidă cu un plan care trece prin A, este perpendicular pe fața VBC și o taie pe aceasta după o paralelă la BC.

(Matematică, Craiova, 1971).

14. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor trapezului $ABCD$ cu baza mare AB. Să se arate că triunghiurile AOD și BOC au aceeași arie.

(Fizică, Craiova, 1971).

15. Un trapez un unghiurile alăturate bazei mari de 45° este înscris într-un cerc de rază R. Știind că baza mică a trapezului este văzută din centrul cercului sub un unghi de 60°, să se calculeze:

a) Unghiurile sub care se văd din centrul cercului celelalte laturi ale trapezului;
b) Perimetrul trapezului.

(Electrotehnică, Subingineri seral, Automatică, Craiova, 1971).

16. Să se arate că punctele M, de pe cercul de rază R circumscris unui pătrat $ABCD$, care au proprietatea că suma pătratelor distanțelor lor la două vîrfuri ale pătratului este o constantă (C_1), au și proprietatea că suma pătratelor distanțelor lor la celelalte două vîrfuri este constantă (C_2).
Discuție. Să se exprime C_2 în funcție de C_1. Să se obțină soluția și prin geometrie analitică.

17. O piramidă are ca bază un dreptunghi $ABCD$ cu $AB = a$ $AD = b$. Muchia $VA = c$ este perpendiculară pe bază. Să se afle:
a) Lungimile muchiilor VB, VD, VC;
b) Aria totală a piramidei;
c) Să se arate că perpendicularele din A pe VD și VB sînt perpendiculare, respectiv, pe planele VDC și VBC.

18. Pe bisectoarea exterioară a unghiului A, a triunghiului oarecare ABC se ia un punct M.
Se cere:
a) Să se arate că $BM + MC > BA + AC$;
b) Să se arate pentru ce poziții ale lui M avem $BA^2 + AC^2 > BM^2 + MC^2$.

19. Se dă piramida triunghiulară $VABC$ în care muchia VA e perpendiculară pe planul ABC.
Știind că $VA = a$, $VB = b$ și înălțimea $AD = c$ a triunghiului ABC verifică relația $AD^2 = BD \cdot DC$, ($D \in BC$), se cere:
a) Să se arate că triunghiul ABC e dreptunghic;
b) Să se calculeze lungimile muchiilor piramidei;
c) Să se calculeze aria totală a piramidei.

(Matematică, Craiova, 1971).

20. Pe baza BC a unui triunghi ABC ascuțitunghi ca diametru se construiește cercul de centru O, ce taie pe AB și AC în punctele D, respectiv E. Fie F intersecția lui BE cu CD. Să se arate că:
a) OD este tangent cercului circumscris triunghiului ADE;
b) AO este perpendicular pe DE atunci și numai atunci cînd $AB = AC$.

(Fizică, Craiova, 1971).

21. Pe un cerc se consideră punctele fixe B şi C şi punctul mobil A. Să se găsească locul geometric al centrului cercului înscris în triunghiul ABC.

(Electrotehnică, Subingineri zi, Craiova, 1971).

22. AB fiind diametrul unui cerc şi d o dreaptă perpendiculară pe AB, iar AM o coardă variabilă, se notează cu P intersecţia dintre AM şi d, cu Q intersecţia dintre BM şi d, cu N intersecţia dintre AQ şi cu C intersecţia dintre AB şi d. Se cere:
a) Să se arate că patrulaterul $MQNP$ este inscriptibil;
b) Să se arate că B, P, N sînt coliniare;
c) Să se arate că $CP \cdot CQ =$ constant.

23. Un paralelipiped $ABCDA'B'C'D'$ are toate feţele egale. Se cere:

a) Să se demonstreze că paralelipipedul are toate muchiile egale;

b) Să se calculeze volumul în funcţie de $a = AB$ şi unghiul $ABC = x$;

c) Dacă paralelipipedului i se poate circumscrie o sferă, atunci unghiul ABC este drept.

24. Să se arate că o coardă ce trece prin focarul unei parabole este de 4 ori mai mare decît distanţa de la focar la punctul de contact al tangentei paralelă cu coarda.

(Matematică, Craiova, 1972).

25. Se dă un cerc cu diametrul AB. În A se duce tangenta la cerc şi se iau două puncte M şi N de o parte şi de alta a lui A. Se duce dreapta BM care taie cercul în P şi dreapta BN care taie cercul în Q. Să se demonstreze că:

a) $\sphericalangle MBA = \sphericalangle PQB$;

b) $MP \cdot MB - NQ \cdot NB = MB^2 - NB^2$.

(Fizică, Craiova, 1972).

26. Se consideră un triedru tridreptunghic şi se duc bisectoarele interioare ale feţelor lui. Ele formează un nou triedru. Se cer unghiurile formate de muchiile acestui al doilea triedru.

(Electrotehnică, Automatică, Craiova, 1972).

27. $ABCD$ fiind un paralelogram, se iau pe CD segmentele $CM = CM' = CB$ (N, pe prelungirea lui DC), iar pe AD segmentele $AN = AN' = AB$ (N, prelungirea lui DA). Să se arate că punctele M, B, N precum și punctele B, N, N' sînt coliniare, iar dreptele MBN și $BM'N'$ sînt ortogonale.

28. Se consideră o piramidă patrulateră regulată. Prin mijloacele a două laturi alăturate ale bazei și prin mijlocul muchiei laterale, opusă punctului de intersecție al celor două laturi, se duce un plan. Să se determine aria suprafeței de secțiune în funcție de înălțimea piramidei și de latura bazei.

29. ABC fiind un triunghi oarecare și AA', BB', CC' cele trei înălțimi ale lui din A', se duce $A'E$ perpendiculară pe AB și AD perpendiculară pe AC. Dreapta $B'C'$ taie pe AA' I' și dreapta DE taie pe AA' în I. Să se arate (analitic) că I este mijlocul lui $A'I'$.

(Matematică, Craiova, 1972).

30. Fie (D_1) și (D_2) două drepte paralele, A un punct pe (D_1), B un punct pe (D_2), astfel încît dreapta AB este perpendiculară pe dreptele date. Fie M un punct pe segmentul AB. Se consideră unghiul drept EMF, E fiind pe (D_1) și F pe (D_2). Perpendiculara din M pe EF o taie pe aceasta în P.

a) Să se arate că unghiul APB este drept;

b) Să se găsească locul geometric al punctului P cînd unghiul drept EMF se rotește în jurul punctului M.

31. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia a. Se cere:

a) Să se arate că proiecțiile vîrfurilor $BCDA'B'D'$ pe diagonala AC' coincid trei cîte trei;

b) Să se determine raportul în care aceste proiecții împart segmentul AC'.

32. Fie ABC un triunghi și P un punct oarecare. Notăm cu A', B' și C' simetricele lui P față de mijloacele laturilor BC, CA și respectiv AB. Să se arate că AA', BB' și CC' sînt concurente și să se determine coordonatele punctului de concurență (se va trata analitic).

(Matematică, Curs F.F., Craiova, 1972).

33. Prin vîrfurile A, B ale pătratului $ABCD$ se duc în interiorul pătratului două drepte care fac cu latura AB unghiuri de 15°. Să se arate că triunghiul format de punctele CD şi punctul de intersecţie al celor două drepte este echilateral.

(Fizică, Craiova, 1972).

34. Intr-un cerc cu centrul O se ia un punct interior M din care se duc două corzi: AB cu mijlocul în P şi CD cu mijlocul în Q.

a) Să se arate că punctele O, P, M, Q se află pe un cerc avînd diametrul egal cu OM;

b) Ştiind că raza cercului iniţial este egală cu 3 cm, iar $AB = 4$ cm şi $CD = 5$ cm, să se determine lungimile segmentelor OP şi OQ.

(Electrotehnică, Subingineri, Craiova, 1972).

35. Fie ABC triunghi dreptunghic. Se notează cu D piciorul înălţimii din A şi cu E, respectiv F, proiecţiile lui D pe catetele AB şi AC.

Să se arate că au loc egalităţile:

a) $\frac{BE}{CF} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$; b) $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$; c) $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{BD} \cdot \frac{CD}{CF}$.

36. Într-o piramidă $SABC$ se cunosc: $SA = SB = SC = a$, $ASB = 60°$, $ASC = 90°$ şi $BSC = 120°$. Să se calculeze:

a) Celelalte muchii ale piramidei;

b) Aria totală;

c) Înălţimea SS' a piramidei.

37. Fie C un punct mobil pe axa OX, iar OBC un triunghi isoscel cu $OB = BC = a$ dat. Se cere:

a) Locul geometric al mijlocului M al segmentului BC;

b) Poziţia punctului C pentru care dreapta BC e tangentă locului geometric determinat la a).

(Matematică, Craiova, 1973).

38. Fie G punctul de intersecţie al medianelor triunghiului ABC.

a) Să se calculeze (în funcţie de laturile $a = DC$, $b = AC$, $c = AB$), segmentele AG, BG, CG care unesc vîrfurile cu centrul de greutate al triunghiului ABC;

b) Să se demonstreze că dacă medianele duse din B şi C sînt perpendiculrea, atunci $5a^2 = b^2 + c^2$.

39. Să se afle locul geometric al punctelor din plan care au suma pătratelor distanţelor la două puncte ixe constantă.

(Electrotehnică, Automatică, Craiova, 1973).

40. În triunghiul ABC unghiul B este dublul unghiului A; mediatoarea laturii AB intersectează pe AC în D. a) Să se arate că BC este tangenta cercului circumscris triunghiului ABD; b) Să se arate că $CB^2 = CD \cdot CA$.

(Electrotehnică, Subingineri, Craiova 1973).

41. Fie AB un segment fix şi M un punct mobil pe el. De aceeaşi parte a lui AN se construiesc triunghiurile echilaterale ACM şi BCM.

a) Să se afle lungimea segmentului CC' în funcţie de $AB = a$, $AM = x$;

b) Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului CC'.

42. Într-o sferă de rază R se introduc trei sfere egale. Să se găsească raza acestor sfere, astfel ca volumul ocupat de ele să fie maxim.

43. Fie M un punct valabil pe parabola $y^2 = 2px$. Tangenta în M taie axa Ox în T, normala în M taie axa Ox în N, iar perpendiculara dusă din M pe (MO) taie pe Ox în P.

a) Să se arate că $2OP - TB =$ constant;

b) Să se găsească locul geometric al centrului de greutate al triunghiului TMN.

(Agronomie, Craiova, 1973).

44. Se consideră patrulaterul $ABCD$ inscriptibil şi cu diagonalele perpendiculare. Fie K, L, M, N, proiecţiile punctului P, în care se întîlnesc diagonalele, pe laturile AB, BC, CD, DA. Să se demonstreze că:

a) PK, PL, PM, PN sînt bisectoarele unghiurilor patrulaterului $KLMN$;

b) Patrulaterul $KLMN$ e inscriptibil.

(Fizică, Craiova, 1973).

45. Fie $ABCD$ un paralelogram, perpendiculare din A pe AB intersectează perpendiculara din C pe CB în F. Să se arate că:

a) DE e perpendiculară pe diagonala AC a paralelogramului;

b) Unghiul AFD este egal cu unghiul BEC, sau cu suplimentul lui.

46. Unei sfere de rază R i se circumscrie un con circular drept ale cărui generatoare fac cu planul bazei unghiul 2α. Se cere:

a) Să se calculeze raza cercului de contact dintre suprafaţa conului şi a sferei;

b) Să se afle raportul dintre ariile celor două catete sferice formate de acest cerc pe sferă.

47. Fie A şi B două puncte fixe în plan. Printr-un punct M se duc dreptele AM şi BM, pe care se ridică, respectiv în A şi B, două perpendiculare care se întîlnesc în P.

a) Se cere locul geometric al punctului P cînd M se deplasează pe un cerc ce trece prin A şi B;

b) Să se determine locul geometric al punctului P cînd punctul M descrie o dreaptă oarecare (d) dată prin ecuaţia

$$ax + by + c = 0;$$

c) Să se afle locul geometric al punctului M cînd punctul P descrie dreapta (d).

(Matematică-informatică, Craiova, 1974).

48. Tangentele în punctele A şi B la cercul O se intersectează în C. Prin A se duce o paralelă la BC care taie, din nou, cercul în D. Dreapta CD întîlneşte, a doua oară, cercul în E, iar AE întîlneşte pe BC în F. Să se demonstreze că:

a) Triunghiurile AFC şi CPE sînt asemenea;

b) $FC^2 = FE \cdot FA$;

c) $CF = FB$.

(Fizică, Craiova, 1974).

49. Se consideră un triunghi isoscel $ABC(AB = AC)$, astfel încît $\widehat{BAC} = 120°$. Notînd cu r raza cercului înscris în triunghiul ABC, se cere să se calculeze laturile triunghiului ABC în funcţie de r.

(Electrotehnică, Subingineri, Craiova, 1974).



50. Se consideră triunghiul ABC și înălțimea AD a triunghiului pe perpendiculara în B pe latura AB. Se consideră segmentul $BF = DC$ și pe perpendiculara în C pe AC se ia segmentul $CE = BD$. Se cere :

a) Să se demonstreze că triunghiul AEF este isoscel ;

b) Dacă B' și C' sînt, respectiv, proiecțiile lui B și C pe laturile AE și AF, să se demonstreze că

$$\frac{AB'}{AC'} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

51. Fie piramida regulată $QABCD$, de înălțime h, avînd bază pătratul $ABCD$ și fețele triunghiuri echilaterale. Se cere :

a) Lungimile muchiilor ;

b) Apotema piramidei în funcție de h ;

c) Să se arate că muchiile laterale ale piramidei $QABCD$, corespunzînd vîrfurilor opuse ale bazei, sînt perpendiculare.

52. Fie $A(-a, -a)$, $B(a, -a)$, $o(a, s)$, $d(-s, a)$ vîrfurile pătratului $ABCD$. Prin A se duce o dreaptă care întîlnește pe BC în E și pe CD în F. Se cere :

a) Ecuația cercului înscris în pătratul $ABCD$;

b) Să se verifice că dreapta care unește punctul F cu mijlocul I al segmentelor BE este tangenta cercului dela punctul *a)* ;

c) Dreapta DE întîlnește dreapta IF într-un punct M aparținînd cercului circumscris pătratului $ABCD$.

(Matematică, Cursuri F.F., Craiova 1974).

Capitolul IV

ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. FUNCȚII

A. DEFINIȚII

Definiția 1. Fie X și Y două mulțimi. Prin „funcție definită pe X și cu valori în Y" înțelegem o corespondență care asociază fiecărui element x din X un șir (numai unul!) element y din Y.

Scrierea $f : X \to Y$ semnifică faptul că funcția f este definită pe X și are valori în Y.

Dacă elementului $x \in Xi$ se asociază, prin funcția f, elementul $y \in Y$, simbolizăm aceasta prin $y = f(x)$, y numindu-se imaginea lui x prin funcția f. X se numește domeniu.

Mulțimea $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ a imaginilor prin f a tuturor elementelor lui X, se numește codomeniul funcției f. Să remarcăm faptul că scrierea $f : X \to Y$ nu semnifică și faptul că $f(X) = Y$.

Dacă A este o submulțime a mulțimii X, atunci, prin definiție, $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$, iar dacă B este o submulțime a mulțimii Y, atunci $f^{\leftarrow}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$; $f(A)$ se numește imaginea prin f a mulțimii A, iar $f^{\leftarrow}(B)$ se numește contraimaginea prin f a mulțimii B (sau preimaginea lui B prin f).

Definiția 2. Funcțiile $f_1, f_2 : X \to Y$, definite pe X și cu valori în Y se numesc egale dacă $f_1(x) = f_2(x)$ pentru orice x X. Este, credem, instructiv următorul exemplu.

Fie $X = \{0, 1)\}$, $Y = R$ și funcțiile $f_1, f_2 : X \to Y$ definite astfel:

$$f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = x^2 + 1,\ x \in X.$$

Conform definiției 2 funcțiile f_1 și f_2 sînt egale (!!); Să nu confundăm, deci, egalitatea funcțiilor polinoame cu egalitatea polinoamelor (!).

Exemple și exerciții rezolvate

1. Fie $X = 1, 2, \ldots, m$; $Y = 1, 2, \ldots, n$; m și n fiind două numere naturale. Să se găsească numărul de funcții ce se pot defini pe X și cu valori în Y.

2. Fie X, Y două mulțimi și $f : X \to Y$ o funcție; $A_1, \ldots, A_m$ submulțimi în X; $B_1, \ldots B_n$ submulțimi în Y. Arătați că:

a) $f(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \bigcup_{i=1}^{m} f(A_i)$;

b) $f(\bigcap_{i=1}^{m} A_i) \subset \bigcap_{i=1}^{m} f(A_i)$.

Dați exemple în care în relația a doua incluziunea este strictă;

c) $f^{\leftarrow}(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} f^{\leftarrow}(B_i)$;

d) $f^{\leftarrow}(\bigcap_{i=1}^{n} B_i) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{\leftarrow}(B_i)$;

3. Fie $f : R \to R$ definită prin $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Să se găsească $f(R)$. Să se găsească $f^{\leftarrow}((-\infty, 1))$;

4. Fie $f : R \to Y$ o funcție definită pe X și cu valori în Y. Arătați că următoarele afirmații sînt echivalente:
a) $f^{\leftarrow}(f(A)) = A$, pentru orice $A \subset X$;
b) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, pentru orice $A_1, A_2 \subset X$;
c) $f(A_1) \cap (A_2) = \varnothing$ (mulțime vidă) pentru orice $A_1, A_2 \subset X$, pentru care $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Soluții

1. Să considerăm la început $m = 2$; $n = 3$; $X = 1,2$; $Y = 1, 2, 3$, atunci pe X și cu valori în Y putem defini următoarele funcții:

$$f_1\begin{cases}1\to 1\\ 2\to 1\end{cases}\quad f_2\begin{cases}1\to 2\\ 2\to 2\end{cases}\quad f_3\begin{cases}1\to 3\\ 2\to 3\end{cases}$$

$$f_4\begin{cases}1\to 1\\ 2\to 2\end{cases}\quad f_5\begin{cases}1\to 1\\ 2\to 3\end{cases}\quad f_6\begin{cases}1\to 2\\ 2\to 1\end{cases}\quad f_6\begin{cases}1\to 2\\ 2\to 2\end{cases}$$

$$f_7\begin{cases}1\to 2\\ 2\to 3\end{cases}\quad f_8\begin{cases}1\to 3\\ 2\to 1\end{cases}\quad f_9\begin{cases}1\to 3\\ 2\to 2\end{cases}$$

Așadar, $9 = 3^2$ funcții. Luînd, de pildă, $m = 3$; $n = 2$, cititorul se poate convinge că putem defini pe $X = \{1, 2, 3\}$ cu valori în $Y = \{1, 2\}$, exact $8 = 2^3$ funcții.

De aici se desprinde ideea că există n^m funcții definite pe o mulțime de m elemente și avînd valori într-o mulțime de n elemente. Demonstrăm aceasta prin inducție relativă la m (pentru n fixat, altfel arbitrar). Este clar că pentru $m = 1$ pe mulțimea $\{1\}$ și cu valori în $Y = \{1, 2, \ldots n\}$ putem defini exact $n = n^1$ funcții: $f_k(1) = k$ $(k = 1, 2 \ldots n)$.

Să presupunem că putem defini exact n^m funcții pe mulțimea $\{1, 2, \ldots, m)$ cu valori în mulțimea $\{1, 2, \ldots n\}$. Fie f o funcție definită pe $\{1, 2, \ldots, m, m + 1\}$ și cu valori în $\{1, 2, \ldots, n\}$. Această funcție determină unic o funcție $\bar{f}$ pe mulțimea $\{1, 2, \ldots, m)$ și cu valori în $\{1, 2, \ldots, n\}$ prin $\bar{f}(k) = f(k)$; $k = 1, 2, \ldots, m$. Este clar că există n funcții care determină, ca mai sus, o aceeași funcție $\bar{f} : \{1, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, anume acele funcții f pentru care $f_j(k) = \bar{f}(k)$; $k = 1, 2, \ldots, m$ și $f_j(m + 1) = j (j = 1, 2, \ldots n)$.

Prin urmare, orice funcție $\bar{f} : \{1, 2, \ldots m\} \to \{1, 2, \ldots n\}$ determină exact n funcții definite pe $\{1, 2, \ldots, m + 1\}$ și cu valori în $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Rezultă că există exact $n^m \cdot n = n^{n+1}$ funcții definite pe $\{1, 2, \ldots, m + 1\}$ și cu valori în $\{1, 2, \ldots n\}$.

2. a) Fie $y \in f(\bigcup_{i=1}^{m} A_i)$; Atunci există $x \in \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, astfel ca $y = f(x)$.

Din definiția reuniunii rezultă că există $i_x \in \{1, \ldots, m\}$, astfel ca $x \in A_{i_x}$, ceea ce implică $f(x) = y \in f(A_{i_x})$ și, deci,

$y \in \bigcup_{i=1}^{m} f(A_i)$. Am arătat că $f(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) \subset \bigcup_{i=1}^{m} f(A_i)$. La fel de

simplu se demonstrează incluziunea reciprocă.

b) Incluziunea se demonstrează ca mai sus.

Să considerăm exemplul: X, $Y = R$; $f : X \to Y$ definită prin $f(x) = x^2$, $x \in R$; $A_1 = (-\infty, 0]$; $A_2 = [0, \infty)$. Atunci, $A_1 \cap A_2 = \{0\}$; $f(A_1 \cap A_2) = \{0\}$; $f(A_1) = [0, \infty) = f(A_2)$ și, deci, $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

c) și d) se rezolvă după modelul de la a) ținînd seama de definiția contraimaginii.

3. Deoarece $f(x) = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$, rezultă că $f(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ și,

prin urmare, $f(R) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$.

$$\overleftarrow{f}(-\infty, 1) = \{x \in R : f(x) \leqslant 1\} = \{x \in R : x^2 + x \leqslant 0 =$$

$$= [-1, 0].$$

4. Afirmația (a) implică afirmația (b).

Fie A_1, $A_2 \subset X$. Cum știm, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. Arătăm în ipoteza (a) că $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$. Fie $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$; există $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, astfel ca $y = f(x_1)$, $y = f(x_2)$. Să punem $A = \{x_1\}$. Atunci $f(A) = \{y\}$;

$\overleftarrow{f}(f(A)) \supset \{x_1, x_2\}$ evident, dar prin ipoteză $\overleftarrow{f}(f(A)) = \{x_1\}$. Deci $\{x_1\} \supset \{x_1, x_2\}$, ceea ce implică $x_2 = x_1$, și, prin urmare, $x_1 \in A_1 \cap A_2$ ceea ce implică $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

Afirmația (b) implică afirmația (c). Evident

Afirmația (c) implică afirmația (a).

Fie $A \subset X$. Deoarece $A \subset \overleftarrow{f}(f(A))$, pentru orice A rămîne

să arătăm în ipoteza (c) că $\overleftarrow{f}(f(A)) \subset A$. Fie $x \in \overleftarrow{f}(f(A))$, deci $f(x) \in f(A)$. Să admitem că $x \notin A$; atunci $\{x\} \cap A = \varnothing$ și, conform lui (c) rezultă $f(\{x\}) \cap f(A) = \varnothing$, ceea ce revine la $f(x) \notin f(A)$ — contradicție cu ipoteza. Rezultă $x \in A$.

B. FUNCȚII INJECTIVE, SURJECTIVE, BIJECTIVE

Definiția 2. Funcția $f : X \to Y$, definită pe X și cu valori în Y se numește injectivă dacă din $x_1, x_2 \in X$ și $f(x_1) = f(x_2)$ rezultă $x_1 = x_2$ (echivalent cu $x_1, x_2 \in X$ și $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definiția 3. Funcția $f : X \to Y$, definită pe X și cu valori în Y se numește surjecție dacă $f(X) = Y$.

Definiția 4. Funcția $f : X \to Y$, definită pe X și cu valori în Y se numește bijectivă dacă f este injectivă și surjectivă.

Exerciții

5. Funcția $f : X \to Y$ este injectivă dacă și numai dacă $\overleftarrow{f}(f(A)) = A$ pentru orice $A \subset X$.

6. Funcția $f : X \to Y$ este surjectivă dacă și numai dacă $\overleftarrow{f}(B) \neq \varnothing$ pentru orice $B \subset Y$.

C. COMPUNEREA FUNCȚIILOR

Definiția 5. Fie X, Y, Z trei mulțimi și $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funcții definite pe X și cu valori în Y, respectiv pe Y și cu valori în Z. Atunci, există (dovediți !) o funcție $h : X \to Z$, astfel ca $h(x) = g(f(x))$, pentru orice $x \in X$.

Funcția h, astfel definită, se numește compunerea funcțiilor g și f și se notează prin $g \circ f$.

Exemple și exerciții.

7. Fie $X = Y = Z = \{1, 2, 3, 4\}$ și

$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ definită prin $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{array}$

$g : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ definită prin $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}$

Să se găsească $g \circ f$.

8. Fie d o dreaptă și o un punct fix pe d.
Numim simetrica în raport cu o, funcția S_o care asociază fiecărui punct A de pe d punctul B de pe d, astfel încît o este mijlocul segmentului AB.
Să se afle $S_o^2 = (S_o \cdot S_o)$

9. Arătați că prin compunerea a două injecții (surjecții, bijecții) se obține o injecție (surjecție, bijecție). Dacă f este injectivă, atunci pentru $x \in X$, $y \in f(X)$ afirmațiile „$f(x) = y$" și „$f(y) = x$" sînt echivalente.

D. FUNCȚII INVERSE

Fie X o mulțime oarecare. Funcția $1_X : X \to X$ definită prin $1_X(x) = x$ pentru orice $x \in X$ se numește funcția identitate pe X.

Definiția 6. Fie $f : X \to Y$ „funcție definită pe X și cu valori în Y. Spunem că f este inversabilă dacă există o funcție $g : f(X) \to X$, astfel ca $g \circ f = 1_X$ (adică $g(f(x)) = x$ pentru orice $x \in X$). În acest caz notăm $g = f^{-1}$, funcția f^{-1} fiind numită inversa funcției f.

Teoremă. Condiția necesară și suficientă pentru ca funcția $f : X \to Y$ să fie inversabilă este ca f să fie injectivă.

E. RESTRICȚIA UNEI FUNCȚII

Definiția 7. Fie $f : X \to Y$ o funcție definită pe X și cu valori în Y, iar A o submulțime a mulțimii X.
Funcția $g : A \to Y$ definită prin

$$g(x) = f(x), \text{ pentru orice } x \in A,$$

se numește restricția funcției f la mulțimea A și se notează prin f/A, iar despre f se spune că este o prelungire a funcției f/A.

Exerciții

10. Fie $f : X \to Y$ o funcție și A o submulțime a lui X. Dacă f este injectivă, atunci f/A este injectivă.

11. Fie $f : X \to Y$ o funcție și A_1, A_2 două submulțimi fixate ale lui X, astfel ca $A_1 \cup A_2 = X$; $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
Arătați că f este injectivă dacă și numai dacă f/A_1, f/A_2 sînt injective și $f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$.

Definiția 8. Fie X, Y două mulțimi oarecare. Mulțimea $\{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ a tuturor perechilor ordonate (x, y) cu $x \in X$, $y \in Y$ se numește produsul cartezian al mulțimii X cu mulțimea Y.

Definiția 9. Fie $f : X \to Y$ o funcție definită pe X și cu valori în Y. Mulțimea $\{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$ se numește graficul funcției f.

Exerciții

12. Să se scrie produsul cartezian $X \times Y$, dacă $X = \{1, 2, 3\}$; $Y = \{a, b; c, d\}$. Să se verifice pe acest exemplu că, în general, $X \times Y \neq Y \times X$.

13. Fie X și Y două mulțimi și $G \subset X \times Y$. Fie $A = \{x \in X\}$, pentru care există $y \in Y$, astfel ca $(x, y) \in G$. Să se arate că G este graficul unei funcții definite pe A și cu valori în Y dacă și numai dacă pentru orice $x \in X$ există *un singur* $y \in Y$, astfel ca $(x, y) \in G\}$.

14. Să se construiască într-un reper ortogonal graficele funcțiilor:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1, \quad x \in R$;

b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3, \quad x \in R$;

c) $f(x) = 2^x, \quad x \in R$;

d) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad x \in R$.

În cele ce urmează vom avea în vedere numai funcții definite pe anumite părți ale mulțimii numerelor reale și cu valori reale (funcții reale de variabilă reală).

F. FUNCȚII MONOTONE

Definiția 10. Fie $f : A \to R$ $(A \subset R)$ o funcție reală definită pe A. Spunem că f este monoton crescătoare (descrescătoare) pe $B \subset A$ dacă, pentru orice $x_1, x_2 \in B$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (respectiv $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).
Dacă $x_1, x_2 \in B$; $x_1 < x_2$ implică $f(x_1) < f(x_2)$ (respectiv $f(x_1) > f(x_2)$) funcția f se numește strict crescătoare (descrescătoare) pe B.

Exerciţii

15. Să se studieze monotonia funcţiilor din exerciţiul 14).

16. Să se studieze monotonia funcţiei.

$$f : R \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to R \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\},\ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

2. ŞIRURI

A. DEFINIŢII

Definiţia 1. *O funcţie definită pe mulţimea numerelor naturale, N, şi cu valori în mulţimea A se numeşte şir de elemente din A.*

Notaţii consacrate pentru şir sînt:

$$n \to a_n\ (n \in N),\ \{a_n : n \in N\},\ (a_n)_n \in N.$$

Este obişnuită denumirea de *termen general* al şirului $(a_n)_n \in N$ pentru a_n.

În această lucrare vom considera numai şiruri de numere reale.

Şir monoton

Definiţia 2. Şirul $(a_n)_n \in N$ de numere reale se numeşte şir monoton crescător (descrescător) dacă pentru orice număr natural n este satisfăcută proprietatea $a_n \leqslant a_{n+1}$ (respectiv $a_{n+1} \leqslant a_n$).

De exemplu, şirul dat prin $a_n = \frac{n-1}{n}$, $n \in N$ este un şir crescător, iar şirul dat prin $a_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in N$ este un şir descrescător.

Şir mărginit

Definiţia 3. Şirul $(a_n)_{n \in N}$ de numere reale se numeşte mărginit dacă există numărul real, astfel ca $|a_n| \leqslant a$ pentru orice număr natural n. Evident, şirul $(a_n)_{n \in N}$ de numere reale este mărginit dacă şi numai dacă există două numere reale a, b, astfel ca $a \leqslant a_n \leqslant b$ pentru orice număr natural n.

Şirul $(a_n)_{n\in N}$ se numeşte mărginit la dreapta (stînga) dacă există numărul real α, astfel ca $a_n \leqslant \alpha$ (respectiv $\alpha \leqslant a_n$) pentru orice număr natural n.

Un şir care nu este mărginit (la dreapta, la stînga) se spune că este şir nemărginit (la dreapta, la stînga). De exemplu, şirul dat prin $a_n = \sin n!$, $n \in N$, este un şir mărginit deoarece $|a_n| \leqslant 1$ pentru orice n natural; şirul dat prin $a_n = \operatorname{tg} n$, $n \in N$ este un şir nemărginit.

A arăta că un şir este nemărginit revine la a demonstra că pentru orice număr real pozitiv α există un număr natural n, astfel ca $|a_n| > \alpha$.

Demonstraţi:

Propoziţia 1. Şirul crescător (descrescător) $(a_n)_{n\in N}$ este mărginit dacă şi numai dacă este mărginit la dreapta (la stînga).

Şir convergent

Definiţia 4. Şirul de numere reale $(a_n)_{n\in N}$ se numeşte convergent către numărul a dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul natural $n(\varepsilon)$ (depinzînd de ε), astfel ca $|a_n - a)| < \varepsilon$, pentru orice număr natural n, pentru care $n > n(\varepsilon)$.

Considerăm util să dăm cîteva exemple care să ilustreze definiţia.

Exemplul 1. Să arătăm că şirul dat prin $a_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2+3}$ este convergent către $\dfrac{1}{2}$.

Fie $\varepsilon > 0$, altfel arbitrar. Problema este: putem determina numărul $n(\varepsilon)$ astfel încît

$$\left|\frac{n^2+1}{2n^2+3} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon, \text{ pentru } n > n(\varepsilon)\ ?$$

Efectuînd calculul, aceasta revine la a determina pe $n(\varepsilon)$, astfel ca $\dfrac{1}{2n^2+3} < \varepsilon$ pentru orice n, $n > n(\varepsilon)$.

Aşadar, problema se reduce la rezolvarea inecuaţiei $\dfrac{1}{2n^2+3} < \varepsilon$ în mulţimea numerelor naturale şi răspunsul problemei depinde de soluţia acestei inecuaţii. Inecuaţia $\dfrac{1}{2n^2+3} < \varepsilon$ este echivalentă

cu $2n^2 + 3 > \frac{1}{\varepsilon}$ a cărei soluție în N este $\{n : n \in N\}$, dacă $\frac{1}{\varepsilon} - 3 < 0$ și $\left\{n : n \in N, n > \sqrt{\frac{1-3\varepsilon}{2\varepsilon}}\right\}$ dacă $\frac{1}{\varepsilon} - 3 \geqslant 0$. De aici rezultă că luînd $n(\varepsilon) = 1$ în cazul $\frac{1}{\varepsilon} - 3 < 0$ și $n(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{1-3\varepsilon}{2\varepsilon}}\right] + 1$, inegalitatea

$$\left|\frac{n^2+1}{2n^2+3} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

este satisfăcută pentru orice număr natural n superior lui $n(\varepsilon)$.

Exemplul 2. Folosind definiția, să se arate că șirul definit prin $a_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n}$ este convergent către 1.

Fie $\varepsilon > 0$ un număr real pozitiv arbitrar; să determinăm (dacă va fi posibil) numărul natural $n(\varepsilon)$, astfel ca $n > n(\varepsilon)$ să implice $\left|\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n} - 1\right| < \varepsilon$.

În mulțimea N inecuația de mai sus este echivalentă cu inecuația $n^2(\varepsilon^2 + 2\varepsilon) - n - 1 > 0$ a cărei soluție este $\left\{n : n \in N, n > \frac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon^2 + 8\varepsilon}}{2(\varepsilon^2 + 2\varepsilon)}\right\}$. Este, deci, suficient să luăm $n(\varepsilon) = \left[\frac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon^2 + 8\varepsilon}}{2(\varepsilon^2 + 2\varepsilon)}\right] + 1$ pentru ca $n > n(\varepsilon)$ să implice

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n} - 1\right| < \varepsilon.$$

Exemplul 3. Să se arate că șirul dat prin $a_n = \frac{n^2+2n+2}{n^2+n+1}$ nu este convergent către 2. Pentru aceasta vom arăta că există $\varepsilon > 0$, astfel încît inecuația $\left|\frac{n^2+2n+2}{n^2+n+1} - 2\right| < \varepsilon$ să nu aibă ca soluție în N o mulțime de forma $\{n : n \in N, n > n_0$ (mulțimea soluției să fie finită sau vidă). În adevăr, în N, inecuația de mai sus este echivalentă cu $\frac{n^2}{n^2+n+1} < \varepsilon$ și, deci, cu $n^2(\varepsilon -$

$-1)+\varepsilon n+\varepsilon>0$. În ipoteza $0<\varepsilon<1$ această inecuaţie are soluţia $\left\{n\in N: \frac{\varepsilon-\sqrt{4\varepsilon-3\varepsilon^2}}{2(1-\varepsilon)}<n<\frac{\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon-3\varepsilon^2}}{2(1-\varepsilon)}\right\}$.

În fapt, şirul dat este convergent către 1.

Exemplul 4. Să se demonstreze că şirul dat prin $a_n=\frac{n^2+2}{n+1}$, $n\in N$ nu este convergent.

Se demonstrează fără dificultate că, în N, inecuaţia $\left|\frac{n^2+2}{n+1}-a\right|<\varepsilon$ are, pentru orice $a\in R$ şi $\varepsilon>0$, o mulţime finită de soluţii.

Că şirul $(a_n)_{n\in N}$ este convergent către a se exprimă şi în forma „şirul $(a_n)_{n\in N}$ are limita a", sau în „a este limita şirului $(a_n)_{n\in N}$", sau „a_n tinde către a". Se notează aceasta prin: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, sau prin $\lim\limits_{n} a_n=a$, sau încă prin $\lim a_n=a$; Uneori prin $a_n\to a$.

Atragem atenţia că exprimarea „limită din a_n *cînd n tinde către* infinit..." nu este corectă, ci mai degrabă derutantă; pentru că în definiţia convergenţei expresia aceasta nu apare şi adausul acesteia ar părea s-o facă incompletă, ceea ce nu este adevărat. În acest context am opta pentru notaţia $\lim\limits_{n} a_n=a$, iar cînd nu există ambiguitate pentru simpla $\lim a_n=a$.

Exerciţii

1. Dacă $(a_n)_{n\in N}$ este un şir convergent atunci $(a_n)_{n\in N}$ este mărginit.
2. Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir convergent. Dacă $|a_n|\leqslant M$ pentru orice $n\in N$ atunci $|\lim\limits_{n} a_n|\leqslant M$.
3. Dacă şirul $(a_n)_{n\in N}$ este convergent către a, atunci şirul $(|a_n|)_{n\in N}$ este convergent către $|a|$. Reciproca este adevărată?

Soluţii

1. Fie $\varepsilon>0$; atunci $|a_n-a|<\varepsilon$ pentru orice $n>n(\varepsilon)$ şi deci $|a_n|\leqslant|a_n-a|+|a|<|a|+\varepsilon$ pentru orice $n>n(\varepsilon)$
Fie $M=\max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n(\varepsilon)}|, |a|+\varepsilon\}$ atunci $|a_n|\leqslant M$ pentru orice $n\in N$.

2. Fie $\varepsilon > 0$; există $n(\varepsilon)$ astfel ca $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru $n > n(\varepsilon)$. Rezultă

$$|a| < |a_n| + \varepsilon \leqslant M + \varepsilon$$

şi cum ε este arbitrar rezultă $|a| \leqslant M$.

3. Fie $\varepsilon > 0$; există $n(\varepsilon)$ astfel ca $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru $n > n(\varepsilon)$. Dar $||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a|$ şi prin urmare $||a_n| - |a|| < \varepsilon$ pentru $n > n(\varepsilon)$.
Reciproca nu este adevărată : există şiruri $(a_n)_{n \in N}$, astfel că şirul $|a_n|_{n \in N}$ este convergent, dar $(a_n)_{n \in N}$ nu este convergent. De exemplu $a_n = (-1)^{n-1}$, $n \in N$.

O clasă importantă de şiruri convergente este descrisă de teorema următoare.

Teorema 1. *Orice şir monoton şi mărginit este convergent.*

Să remarcăm că orice şir convergent este mărginit (exerciţiu 1), dar că nu orice şir mărginit este convergent. Şirul dat prin $a_n = (-1)^n$, $n \in N$, este un şir mărginit, dar nu este convergent (exerciţiu !).

De asemenea, nu orice şir convergent este monoton ; şirul dat prin $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ este convergent către zero, dar nu este monoton.

Importantă pentru aplicaţii este teorema 2.

Teorema 2. *Fie $(a_n)_{n \in N}$ şi $(b_n)_{n \in N}$ două şiruri de numere reale convergente şi astfel ca $\lim a_n = \lim b_n$. Dacă şirul $(c_n)_{n \in N}$ este astfel că $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, pentru orice $n \in N$, atunci şirul $(c_n)_{n \in N}$ este convergent şi $\lim c_n = \lim a_n = \lim b_n$.*

O variantă mai slabă, dar eficientă, este următorul corolar :

Corolar. Dacă $(a_n)_{n \in N}$ este un şir de numere reale care are limita zero, iar şirul $(b_n)_{n \in N}$ satisface condiţia

$$|b_n - b| \leqslant a_n \text{ pentru orice } n \in N,$$

b fiind un anumit număr real, atunci şirul $(b_n)_{n \in N}$ este convergent şi $\lim b_n = b$.

Subşir

Definiţia 5. Fie $(a_n)_{n \in N}$ un şir de numere reale. Fiind dat şirul strict crescător $(k_n)_{n \in N}$ de numere naturale ($k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$) aplicaţia $n \to a_{k_n}$, $n \in N$ se numeşte subşir al şirului (a_n).

De exemplu, luînd pentru fiecare n $k_n = 2n$ se obține subșirul termenilor de rang par $(a_{2n})_{n \in N}$: $a_2, a_4, a_6, \ldots$, și luînd $k_n = 2n - 1$ se obține subșirul termenilor de rang impar $(a_{2n-1})_{n \in N}$: $a_1, a_3, a_5, \ldots$

Teorema 3. Dacă șirul $(a_n)_{n \in N}$ este convergent către a, atunci orice subșir $(a_{kn})_{n \in N}$ al șirului $(a_n)_{n \in N}$ este convergent către a.

Demonstrație. Să observăm la început că dacă $(a_{k_n})_{n \in N}$ este un subșir al șirului $(a_n)_{n \in N}$, rezultă după definiția 5, că $n < k_n$.

Fie acum $\varepsilon > 0$, oarecare ; există $n(\varepsilon)$ astfel încît $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant n(\varepsilon)$. Cu observația de mai sus rezultă că pentru orice $n \geqslant n(\varepsilon)$ avem $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$, deci subșirul $(a_{k_n})_{k \in N}$ converge către a.

Limite infinite

Definiția 6. Șirul $(a_n)_{n \in N}$ de numere reale are limita $+\infty$, dacă pentru orice număr real α există numărul natural $n(\alpha)$, astfel că $n > n(\alpha)$ implică $a_n > \alpha$. Notăm aceasta prin $\lim a_n = +\infty$, sau $a_n \to +\infty$.

Șirul $(a_n)_{n \in N}$ de numere reale are limita $-\infty$ dacă pentru orice număr real α există numărul natural $n(\alpha)$, astfel că $n > n(\alpha)$ implică $a_n < \alpha$.

Notăm aceasta prin $\lim a_n = -\infty$, sau $a_n \to -\infty$.

Observație. Dat fiind că există diferențe esențiale între șirurile convergente și cele care au limită $+\infty$ $(-\infty)$, pentru a nu se produce erori este necesar să se evite ambiguitățile în formulare. În acest sens, formularea „$(a_n)_{n \in N}$ este converegnt“ conține și informația că limita lui este un număr real (adică convergent în sensul definiției 4).

Exemple

1. Șirul $(a_n)_{n \in N}$ definit prin $a_n = 2^n$, $n \in N$ are limita $+\infty$. În adevăr, este suficient să observăm că $2^n > n$ pentru orice număr natural n.

2. Șirul $(a_n)_{n \in N}$ definit prin $a_n = -n^2 + n$ are limita $-\infty$. În adevăr, pentru $n > 2$, $-n^2 + n < -n$.
Fie acum α un număr real oarecare ; Atunci există, conform propoziției 1, numărul natural $n(\alpha)$, astfel ca $-n(\alpha) < \alpha$; evident, atunci, că dacă $n > n(\alpha)$ avem și $-n < \alpha$ și prin urmare $-n^2 + n < \alpha$ pentru $n > n(\alpha)$ ceea ce încheie demonstrația afirmației.

Şirul $(a_n)_{n \in N}$ definit prin $a_n = (-1)^n \cdot n$, $n \in N$ nu are limita $+\infty$ şi nici limita $-\infty$, dar subşirul termenilor de rang impar are limita $-\infty$, iar subşirul termenilor de rang par are limita $+\infty$.

B. OPERAŢII CU ŞIRURI

Fie $(a_n)_{n \in N}$ şi $(b_n)_{n \in N}$ şiruri de numere reale. Şirul $n \to a_n + b_n$ se numeşte suma şirurilor date. Şirul $n \to a_n \cdot b_n$ se numeşte produsul şirurilor.

Dacă α este un număr real, şirul $n \to \alpha a_n$ se numeşte produsul dintre α şi şirul $(a_n)_{n+N}$.

Exemple şi exerciţii rezolvate

1. Suma a două şiruri crescătoare (descrescătoare) este un şir crescător (descrescător).
2. Suma a două şiruri mărginite este un şir mărginit.
3. Produsul a două şiruri mărginite este un şir mărginit.
4. Produsul a două şiruri crescătoare (descrescătoare) nu este, în general, un şir crescător. Formulaţi condiţii suficiente pentru ca produsul a două şiruri crescătoare (descrescătoare) să fie şir crescător (descrescător).
5. Suma (produsul) a două şiruri convergente este un şir convergent şi limita sumei (produsului) a două şiruri convergente este suma (produsul) limitelor celor două şiruri.

Soluţii

1. Din $a_n \leqslant a_{n+1}$ şi $b_n \leqslant b_{n+1}$ pentru orice $n \in N$ se obţine $a_n + b_n \leqslant a_{n+1} + b_{n+1}$ pentru orice $n \in N$.
2. Din $|a_n| \leqslant A$ şi $|b_n| \leqslant B$ pentru orice $n \in N$ se obţine, via $|a_n + b_n| \leqslant |a_n| + |b_n|$, $|a_n + b_n| \leqslant A + B$ pentru orice $n \in$ $\in N$.
3. Din $|a_n| \leqslant A$ şi $|b_n| \leqslant B$ se obţine $|a_n \, b_n| \leqslant A \cdot B$.
4. Fie $a_n = -1 + \frac{1}{2n}$, $n \in N$ şi $b_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in N$.

Evident, cele două şiruri sînt crescătoare, în timp ce şirul produs este descrescător. Dacă, însă, şirurile $(a_n)_{n\in N}$ şi $(b_n)_{n\in N}$ sînt crescătoare (respectiv descrescătoare) şi $0 < a_n$, $0 < b_n$ pentru orice $n \in N$ atunci $(a_n b_n)_{n\in N}$ este crescător (descrescător).
Demonstraţia nu prezintă dificultate.

5. Fie $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$. Atunci, din

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|,$$

ţinînd seama că $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, pentru $n > n_1(\varepsilon)$ şi $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, pentru $n > n_2(\varepsilon)$, rezultă $|a_n + b_n - (a + b)| < 2$ pentru $n > \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. Pentru cazul produsului, să utilizăm faptul că orice şir convergent este mărginit. Putem, deci, presupune că pentru orice $n \in N$ rezultă $|a_n| \leqslant M$, $|b_n| \leqslant M$.
Fie $\varepsilon > 0$; există $n_1(\varepsilon)$, astfel ca

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ pentru } n > n_1(\varepsilon)$$

şi există $n_2(\varepsilon)$ astfel ca

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ pentru } n > n_2(\varepsilon).$$

Din $|a_n b_n - ab| \leqslant |a_n b_n - a_n \cdot b| + |a_n b - ab| = |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b|$

rezultă

$$|a_n b_n - ab| < M \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

pentru orice $n > \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$.

Încheiem această scurtă incursiune prin a enunţa cîteva proprietăţi deosebit de importante ale mulţimii numerelor reale, cu observaţia că aceste afirmaţii nu pot fi demonstrate la nivelul cunoştinţelor de şcoală medie.

Propoziţia 1. Dacă a şi b sînt două numere raţionale, astfel încît $a < b$, atunci există cel puţin un număr iraţional c astfel ca $a < c < b$; dacă a şi b sînt două numere iraţionale astfel ca $a < b$ atunci există un număr raţional c, astfel ca $a < c < b$.

Propoziția 2. Pentru orice număr real a (rațional sau irațional) există cel puțin un șir monoton crescător de numere raționale convergent către a; pentru orice număr real a există cel puțin un șir monoton descrescător de numere raționale convergent către a. În aceste formulări, șirurile de numere raționale pot fi înlocuite cu șiruri de numere iraționale, propozițiile obținute fiind adevărate.

Propoziția 3. Dacă α și β sînt două numere pozitive, atunci există numărul natural n, astfel ca $n\alpha > \beta$.

C. EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE

Să se găsească a_n în funcție de n, știind că:

1. $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $a_1 = 1$
2. $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta$, $a_1 = a$, a, α, β — numere date
3. $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ pentru $n \geqslant 3$, $a_1 = a$, $a_2 = b$
4. $a_{n+1} = a_n^2 - 1$, $a_1 = 1$
5. $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n^2}$, $a_1 = 1$
6. $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, $n \geqslant 2$ $a_1 = 0$, $a_2 = 3$.

Demonstrați folosind definiția convergenței unui șir că

7. $\lim\limits_{n} \frac{a}{n} = 0$, a fiind un număr real oarecare
8. $\lim\limits_{n} \frac{n^3 + 2n^2}{2n^3 + n + 1} = \frac{1}{2}$
9. $\lim\limits_{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$
10. $\lim\limits_{n} (\sqrt{4n^2 + 3n + 1} - 2n) = 0$
11. Demonstrați că orice șir nu poate avea mai mult decît o limită.
12. Demonstrați că dacă șirul $(a_n)_{n \in N}$ nu este convergent către zero, atunci există numărul real pozitiv a și numărul natural n_0, astfel ca pentru orice $n > n_0$, $|a_n| \geqslant \alpha$.
13. Demonstrați că dacă toate subșirurile unui șir sînt convergente, atunci toate au aceeași limită, iar șirul este convergent către limita comună tuturor subșirurilor.

14. Demonstrați că dacă $(a_n)_{n\in N}$ este un șir convergent către zero și $(b_n)_{n\in N}$ este un șir mărginit, atunci $(a_n \cdot b_n)_{n\in N}$ este convergent către zero.

Demonstrați că șirurile de mai jos nu au limită

15. $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{2n+1}$, $n \in N$

16. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1} + (-1)^n \cdot n}{n}$, $n \in N$

17. $a_n = \sin\ (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in N$.

18. Demonstrați că dacă șirul $(a_n)_{n\in N}$ este convergent, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul natural $n(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi numărul natural n, $n \geqslant n\ (\varepsilon)$, și oricare ar fi p natural $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

19. Folosind exercițiul precedent să se arate că șirul $(a_n)_{n\in N}$ cu $a_n + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ nu este convergent.

Deduceți, apoi, că a_n este nemărginit și, deci, $\lim\limits_n a_n = +\infty$.

20. Fie $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ două șiruri de numere, astfel ca $b_n > 0$ pentru orice n, iar șirul $(b_n)_{n\in N}$ definit prin $S_n = b_1 + \ldots + b_n$ să aibă limita $+\infty$.

Să se arate că dacă $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$ există, atunci există și

$\lim \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$ și cele două limite sînt egale.

21. Să se deducă din exercițiul precedent că dacă $\lim\limits_n a_n = l$, atunci

$$\lim_n \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = l$$

22. Fie $(a_n)_{n\in N}$ un șir de numere pozitive astfel că există $\lim\limits_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Să se arate că există

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} \text{ și } \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

23. Folosind rezultatul precedent să se arate că dacă $(a_n)_{n\in N}$ este un șir de numere pozitive convergent, atunci șirul avînd termenul general $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ este convergent și $\lim\limits_n \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = \lim\limits_n a_n$.

24. Să se arate că şirul avînd termenul general

$a_n = \frac{\sqrt{1+1^2} + \sqrt{1+2^2} + \ldots + \sqrt{1+n^2}}{n^2}$ este convergent şi să se calculeze $\lim a_n$ (se poate aplica ex. 21).

25. Să se arate că şirul $(a_n)_{n \in N}$ definit prin $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n}$ este convergent şi că $\frac{1}{2} < \lim a_n < 1$.

26. Fie a un număr real, $a > 0$. Să se studieze monotonia, mărginirea şi convergenţa şirului

$$(a_n)_{n \in N}, \quad a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}$$

în a_n a fiind scris de n ori. Să se calculeze $\lim a_n$.

27. Fie a şi b două numere reale pozitive şi k un număr natural.

Fie $a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a + \sqrt{b + \ldots \sqrt{b}}}}}$

în a_n, a fiind scris de n ori, iar b de k ori.
Să se arate că şirul $(a_n)_{n \in N}$ este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n} a_n$.

28. Fie a şi b două numere reale pozitive. Definim recursiv şirurile $(a_n)_{n \in N}$ şi $(b_n)_{n \in N}$ prin $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = \sqrt{ab}$

$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, $b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$, ..., $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

Să se studieze monotonia şi convergenţa şirurilor $(a_n)_{n \in N}$ şi $(b_n)_{n \in N}$.

29. Să se arate că dacă şirul $(a_n)_{n \in N}$ satisface condţiia $a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} = k$ pentru orice n, p fiind număr întreg şi k o constantă reală, atunci el este periodic.

30. Fie $(a_n)_{n \in N}$ un şir de numere reale care satisface condiţia $a_n + 2a_{n+1} + \ldots + p\, a_{n+p-1} = k$ pentru orice $n \in N$, p fiind un număr natural, iar k o constantă reală.
Să se arate că şirul este mărginit şi convergent. Calculaţi $\lim a_n$.

31. Se dă şirul $(a_n)_{n\in N}$ definit recursiv astfel : $a_1 = \sin x$, $a_{n+1} = \sin a_n$; $n \in N$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Să se arate că şirul este monoton descrescător.

32. Să se studieze monotonia şirului $(a_n)_{n\in N}$ cu $a_1 = a$ $a_{n+1} = a^{a_n}$, $n \in N$, a fiind un număr real pozitiv.

33. a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in N}$ cu $a_n = \frac{\log_a n}{n}$ ($a > 1$) este monoton şi mărginit ;

b) Fie p un număr natural oarecare. Să se arate că

$$a_{n+p} = \frac{1}{p}\left(a_n + \frac{\log_a p}{n}\right)$$

şi apoi să se deducă $\lim\limits_n a_n$.

34. Fie $a \in (0, 1)$ şi (a_n) şirul definit prin $a_1 = a$, $a_{n+1} = \sqrt{1 - a_n}$, $n \in N$. Să se studieze monotonia şi convergenţa şirului $(a_n)_{n\in N}$.

35. Fie şirul $(a_n)_{n\in N}$ definit prin

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}, \quad n \in N.$$

a) Să se arate că $-2 < a_n \leqslant -1$;

b) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in N}$ este convergent ;

c) Fie p un număr natural, $p > 1$; fie

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} - \alpha\sqrt{n}.$$

Să se determine α, astfel ca şirul (b_n) să fie convergent şi să se precizeze limita şirului $(b_n)_{n\in N}$.

36. Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir de numere reale definit prin $a_1 = a$, $a_2 = b$, $2a_n = a_{n-1}$ pentru $n \geqslant 3$, a şi b fiind numere date.

a) Să se găsească a_n în funcţie de n, a şi b ;

b) Să se găsească $\lim\limits_n a_n$.

37. Şirul de numere reale (a_n) este definit prin $a_1 = a$, $a_2 = b$, $(\alpha + \beta)\, a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ pentru $n \geqslant 3$, a, b, α, β fiind numere reale ($\alpha > 0$, $\beta > 0$).

a) Să se găsească a_n în funcţie de n, a, b, α şi β ;

b) Să se găsească $\lim\limits_n a_n$.

38. Să se determine limita şirului $(a_n)_{n\in N}$ unde

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha k + \beta}{\gamma^k}, \quad \gamma > 1.$$

39. Să se arate că $\lim\limits_n \sqrt[n]{n} = 1$.

40. Să se arate că $\lim\limits_n \frac{a^n}{n!} = 0$ pentru orice număr real a.

41. Să se calculeze

$$\lim_n \frac{n!}{n^n}.$$

42. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in N}$ definit prin

a) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$;

b) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[p]{n^n + k^{p-1}}}$ $(p \in N,\ p \geqslant 2)$

este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_n a_n$.

43. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in N}$ dat prin $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1\right)$

este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_n a_n$.

44. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in N}$ dat prin

$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k^2}{n^3}} - 1\right)$, $n \in N$, este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_n a_n$.

45. Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir de numere reale pozitive descrescător la zero. Pentru fiecare $n \in N$ fie $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k$. Să se arate că şirul $(S_n)_{n\in N}$ este convergent.

46. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in N}$, $a_n = \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$, p fiind un număr real pozitiv, este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_n a_n$.

47. Fie a un număr real pozitiv şi $(a_n)_{n\in N}$ şirul definit prin $a_1 = a$, $a_{n+1} = a^{a_n}$, $n \geqslant 1$.
Să se studieze monotonia şi convergenţa şirului $(a_n)_{n\in N}$.

48. Să se deducă α şi β, astfel ca şirul $(a_n)_{n\in N}$ cu $a_n = \sqrt{2n^2 + 4n + 1} - \alpha n - \beta$ să fie convergent şi $\lim a_n = 2\sqrt{2}$.

49. Să se deducă α şi β, astfel ca şirul $(a_n)_{n\in N}$ definit prin $a_n = \sqrt[3]{3n^3 + 2n^2 + n + 1} - \alpha n - \beta$ să fie convergent şi $\lim a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

50. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_n \sqrt[3]{n^3 + n} - n$;

b) $\lim\limits_n \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}$;

c) $\lim\limits_n n(\sqrt[n]{n} - 1)$;

d) $\lim\limits_n \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$;

e) $\lim\limits_n \dfrac{(n^2+1)\sin(n^2)}{n^3}$;

f) $\lim\limits_n \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2} + \cos\dfrac{\pi}{n+1} + \ldots + \cos\dfrac{\pi}{2n}}{n+1}$;

g) $\lim\limits_n n \sin\dfrac{\pi}{n}$;

h) $\lim\limits_n \sin^2\dfrac{\pi}{n} + \sin^2\dfrac{\pi}{n+1} + \ldots + \sin^2\dfrac{\pi}{2n}$;

i) $\lim\limits_{n} \dfrac{\cos^2 \dfrac{\pi}{n} + \cos^2 \dfrac{\pi}{n+1} + \ldots + \cos^2 \dfrac{\pi}{2^n}}{n}$;

j) $\lim\limits_{n} \left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$, $a > 0$, $b > 0$;

k) $\lim\limits_{n} \left(\dfrac{1 + \sin^2 \dfrac{\pi}{2}}{1 - \sin^2 \dfrac{\pi}{n}}\right)^{\frac{1}{1 - \cos \frac{\pi}{n}}}$;

l) $\lim\limits_{n} \sqrt[n]{\sin \dfrac{\pi}{2} \sin \dfrac{\pi}{2} \sin \dfrac{\pi}{3} \ldots \sin \dfrac{\pi}{n}}$;

m) $\lim\limits_{n} \dfrac{\sin \dfrac{\pi}{2} + \ldots + \sin \dfrac{\pi}{2}}{1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}}$;

n) $\lim\limits_{n} \dfrac{1}{2 + \sqrt{1}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \ldots \dfrac{\sqrt{n}}{2 + \sqrt{n}}$;

p) $\lim\limits_{n} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}$;

q) $\lim\limits_{n} \left(n - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2 + 4k + 1}{k^3 + 4k + 3}\right)$;

r) $\lim\limits_{n} (1 + a)(1 + a^2)\ldots(1 + a^2)^n$, unde $|a| < 1$;

s) $\lim\limits_{n} \left(\dfrac{1}{C_n^0} + \dfrac{1}{C_n^1} + \ldots + \dfrac{1}{C_n^n}\right)$;

t) $\lim\limits_{n} x_n$ unde $x_n = ax_{n-1} + b$ pentru orice $n \geqslant 2$, $|a| < 1$;

u) $\lim\limits_{n} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{kn}\right)$;

v) $\lim_{n} \prod_{k=1}^{n} a^{\frac{1}{k(k+1)}}, \quad a > 1$;

w) $\lim_{n} \left(\frac{1}{1+2^{n+1}} + \frac{1}{2+2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^n+2^{n+1}} \right)$;

x) $\lim_{n} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \right)$;

y) $\lim_{n} \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \arcsin \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$;

z) $\lim \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) \ldots \left(1 + \frac{n}{n^2} \right)$.

3. LIMITE DE FUNCȚII

A. Definiția 1. Fie a un număr real. Mulțimea $V \subset R$ se numește vecinătate a punctului a dacă există $\delta > 0$, astfel ca $(a-\delta, a+\delta) \subset V$.

Exerciții

1. Fie $a \in R$ și $V(a)$ mulțimea tuturor vecinătăților punctului a. Arătați că:

V_1] pentru orice $V \in V(a)$, $a \in V$;

V_2] dacă $V \in V(a)$ și U este o submulțime a lui R astfel ca $V \subset U$, atunci $U \in V(a)$;

V_3] dacă $V_1 \in V(a)$ și $V_2 \in V(a)$ atunci $V_1 \cap V_2 \in V(a)$;

V_4] dacă $V \in V(a)$ atunci există $W \in V(a)$ astfel ca pentru orice $b \in W$ $(V \in V(b)$.

Definiția 2. Mulțimea $V \subset R$ se numește vecinătate pentru $+\infty(-\infty)$ dacă există numărul real a astfel ca $\{x \in R : x > a\} \subset V$ (respectiv $\{x \in R : x < a\} \subset V$).

Notînd prin $V(+\infty)$, respectiv $V(-\infty)$ mulţimea vecinătăţilor lui $+\infty$, respectiv $-\infty$, atunci proprietăţile $V_1 - V_4$ se menţin.

Definiţia 3. Fie A o mulţime de numere reale. Elementul $x \in R$ se numeşte punct de acumulare pentru mulţimea A dacă pentru orice $V \in V(x)$ există $x_V \neq x$ $x_V \in V \cap A$.

Exerciţii

1. Mulţimea $A \subset R$ are pe $+\infty$ $(-\infty)$ punct de acumulare dacă şi numai dacă A nu este mărginită la dreapta (la stînga).

2. Să se găsească punctele de acumulare ale mulţimilor

   a) $A = [a, b]$, b) $A = [a, b]$ c) $A = (a, b) \cdot (a < b)$; d) $A = \{-2\} \cup (0, 1)$ e) $A = (-\infty, a)$ f) $A = [b, \infty]$.

3. Pentru orice $a, b \in R \cup \{-\infty, \infty\}$ $a \neq b$ există $V \in V(a)$, $U \in V(b)$ astfel ca $V \cap U = \emptyset$.

Definiţia 4. Fie $f: A \to R$ o funcţie definită pe $A \subset R$ şi cu valori reale şi fie a un punct de acumulare pentru mulţimea A.

Elementul $l \in R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ este limita funcţiei f în punctul a dacă pentru orice vecinătate $V \in V(l)$ există vecinătatea $U \in V(a)$ astfel ca pentru orice $x \in U \cap Ax \neq a$ să avem $f(x) \in V(l)$. În acest caz scriem $l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A,\, x \neq a}} f(x)$ sau simplu, $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Remarcăm faptul că o funcţie poate avea limită în puncte în care ea nu este definită. De asemenea, limita unei funcţii într-un punct în care funcţia este definită nu este în mod necesar egală cu valoarea funcţiei în acel punct.

Comentarii şi exerciţii rezolvate

1. Limita unei funcţii într-un punct, dacă există (finită sau infinită), este unică.

2. Fie $f: A \to R$ o funcţie definită pe $A \subset R$ o funcţie definită pe $A \subset R$ şi cu valori reale şi fie a un punct de acumulare al mulţimii A. Dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A,\, x \neq a}} f(x) = l$ şi $l > 0$ $(l < 0)$ atunci există o vecinătate a punctului a, $V \in V(a)$ astfel că $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ pentru orice $x \in V \cap A$, $x \neq a$.

3. Fie $f: A \to R$ o funcţie definită pe A şi cu valori reale şi a un punct de acumulare al mulţimii A. Funcţia f are limita l în punctul a dacă şi numai dacă pentru orice şir $(a_n)_{n \in N}$ de elemente din A, care are limita a, şirul $\{f(a_n)\}_{n \in N}$ are limita l.

Soluţii

1. Fie $f: A \to R$, a un punct de acumulare şi să presupunem că există elementele $l_1, l_2 \in R \cup \{+\infty, -\infty\}$ astfel ca

$$l_1 = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A,\ x \neq a}} f(x), \quad l_2 = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A,\ x \neq a}} f(x)$$

Fie $V_i' \in v(l_i)$; există atunci (definiţia 4) $U_i \in V(a)$ astfel ca pentru $x \in U_i \cap A$, $x \neq a$, $f(x) \in V_i$ $(i = 1, 2,)$.
Fie $U = U_1 \cap U_2$. Atunci $f(x) \in V_1 \cap V_2$ pentru orice $x \in U \cap A$, $x \neq a$. Prin urmare oricare ar fi $V_1 \in V(l_1)$ şi $V_2 \in V(l_2)$ $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ (deoarece $U \cap A$ conţine puncte diferite de a) ceea ce arată, conform exerciţiului 3, pag. 157, că $l_1 = l_2$∎

2. Fie $\alpha \in R$ astfel ca $0 < \alpha < l$. Atunci $(\alpha, \infty) \in V(l)$ şi, prin urmare, există $U \in V(a)$ astfel ca $x \in U \cap A$, $x \neq a$ să implice $f(x) \in (\alpha, \infty)$ şi deci $f(x) > 0$ pentru orice $x \in U \cap A$, $x \neq a \cdot R$ Demonstraţie similară pentru $l < 0$.

3. Demonstrăm la început partea „numai dacă" (necesitatea). Fie deci $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ şi fie $(a_n)_{n \in N}$ un şir din A, $x_n \neq a$ pentru orice a astfel ca $\lim\limits_{m} a_n = a$. Fie $V \in V(l)$ o vecinătate arbitrară a lui l, există $U \in V(a)$ astfel ca $x \in U \cap A$, $x \neq a$ să implice $f(x) \in V$. Deoarece $\lim\limits_{n} a_n = a$, rezultă că, dat fiind U, există numărul natural n_0 (care depinde de U şi deci de V) astfel ca $n > n_0$ să implice $a_n \in U$. Atunci pentru $n > n_0$ $f(a_n) \in V$. Recapitulînd, pentru orice $V \in V(l)$ există $n_0 \in N$ astfel că $n > n_0$ implică $f(a_n) \in V$ ceea ce demonstrează că $\lim\limits_{n} f(a_n) = l$.

Demonstrăm acum partea „dacă". Pentru aceasta vom arăta că dacă l nu este limita funcţiei f în punctul a atunci există un şir $(a_n)_{n \in N}$ $a_n \in \Lambda$, $a_n \neq a$ pentru orice $n \in N$ astfel încît $(f(a_n))_{n \in N}$ nu are limita l. În adevăr, ipoteza se traduce în: există $V \in v(l)$ astfel că oricare ar fi $U \in V(a)$ există $a_U \in U \cup A$ $a_U \neq a$ astfel încît $f(a_U) \notin V$. Să admitem că a

este finit; atunci $\left(a-\frac{1}{n},\ a+\frac{1}{n}\right)\in V(a)$ şi deci există $a_n\in\left(a-\frac{1}{n},\ a+\frac{1}{n}\right)\cap A$. $a_n\neq a$ astfel ca $f(a_n)\in V$ pentru $n\in N$. Deoarece $|a_n-a|<\frac{1}{n}$ rezultă că $\lim a_n=a$, dar $f(a_n)\notin V$ oricare ar fi $n\in N$ arată că şirul $(f(a_n))_{n\in N}$ nu poate avea limita l.

Definiţia 5. Fie $f:A\to R$ o funcţie definită pe A şi cu valori reale şi fie a un punct de acumulare al mulţimii A, astfel încît pentru orice $n\in N$ $\left(a-\frac{1}{n},\ a\right)\cap A\neq\emptyset$. Elementul $l\in R\cup\{-\infty,\ \infty\}$ se numeşte limita la stînga a funcţiei f în punctul a dacă l este limita (conform definiţiei 4) în punctul a a restricţiei funcţiei f la $A\cap(-\infty,\ a)$ (Analog se defineşte limita la dreapta). În acest caz notăm

$$l=\lim_{x\uparrow a}f(x)\quad(\text{respectiv } l=\lim_{x\downarrow a}f(x)).$$

Teorema 1. Fie $f:A\to R$ o funcţie definită pe A şi a valorii reale $(A\subset R)$ şi fie a un punct de acumulare al mulţimii A astfel că pentru orice $n\in N$ $\left(a-\frac{1}{n},\ a+\frac{1}{n}\right)\cap A$ conţine puncte diferite de a. Atunci f are limita l în punctul a dacă şi numai dacă există $\lim_{x\uparrow a}f(x)$, $\lim_{x\downarrow a}f(x)$ şi $\lim_{x\uparrow a}f(x)=\lim_{x\downarrow a}f(x)=l$.

EXERCIŢII PROPUSE

1. Arătaţi că funcţia $f:R\to R$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

are limita $+\infty$ în punctul $x=0$.

2. Arătaţi că funcţia $f:(0,\ \infty)$ definită prin $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ nu are limită în punctul $x=0$.

3. Arătaţi că funcţiile sin şi cos nu au limită la $+\infty$, şi $-\infty$.

4. Arătați că $\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{dacă } a > 1, \\ 0 & \text{dacă } 0 < a < 1. \end{cases}$

5. Arătați că $\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$, unde $a > 1$.

6. Arătați că $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

Să se calculeze următoarele limite:

7. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin^3 x}$.

8. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

9. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$.

10. $\lim_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

11. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin^2 x - 1}}{e^{x^2}-1}$

12. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(xe^x(-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

13. a) Arătați că pentru numerele naturale m, n, k cu $m > n > k$

$\frac{C_m^k}{C_n^k} > \frac{m^k}{n^k}$.

b) Deduceți că pentru orice număr real pozitiv u și pentru orice număr rațional $r > 1$, $(1+u)^r > 1 + ru$.

c) Folosind rezultatul de la b), arătați că funcția $f : (0, \infty) \to$ $\to R$ $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ este strict crescătoare.

d) Calculați $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

14. Demonstrați că dacă $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ și $\lim_{x\to\infty} g(x) = l > 0$, atunci $\lim_{x\to\infty} [f(x)\cdot g(x)] = +\infty$.

Deduceți $\lim_{x\to\infty} (x^3 - 5x^2 + 1)$, $\lim_{x\to-\infty} (x^2 + 3x - 1)$.

15. Calculînd $\lim\limits_{x \downarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x \uparrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ deduceți că funcția f definită prin

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x \in R \setminus \{0\}$ nu are limita în punctul $x = 0$.

16. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^x - a^a}{x - a}$.

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos px - \cos qx}{x^2}$.

18. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{arc sin } x - \text{arc tg } x}{x^3}$.

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}$.

21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + x - 1 + x^2}{1 + 2}$.

22. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt[3]{x + 20}}{\sqrt[4]{x + 9} - 2}$.

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2 + ax + n^2} - \sqrt[3]{x^2 - ax + a^2}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}}$.

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x}{x^2}$.

25. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (2 - \text{tg } x \sqrt{\text{ctg } x})^{\frac{1}{\sin x - \cos x}}$

26. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos \alpha x)}{\ln(\cos \beta x)}$.

27. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + \sin \sqrt{x})}{x + \text{tg } \sqrt{x}}$.

28. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sin \dfrac{1}{x} + \cos \dfrac{1}{x}\right)^x$.

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{\text{arc tg}(1+x)-\text{arc tg}(1-x)}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty} [\ln(e^x+e^{-x})-x]$.

31. $\lim\limits_{x\to\frac{4}{\pi}} \dfrac{\ln(\text{tg}\, x)}{\cos 2x}$.

32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

33. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$

34. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{nx} \log_a \prod\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{1+kx}$.

35. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x=\frac{\pi}{4}}}}$.

4. FUNCŢII CONTINUE

Definiţia 1. Fie $f: A \to R$, $A \subset R$ şi $a \in A$. Funcţia f se numeşte continuă în punctul a dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel că $x \in A$ $|x-a| < \delta$ implică $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

Dacă f este continuă în orice punct al mulţimii A, spunem că f este continuă pe A.

Teoremă. Funcţia $f: A \to R$, $A < R$ definită pe A şi cu valori reale este continuă în punctul de acumulare $a \in A$ al mulţimii A dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Exemple şi exerciţii

1. Demonstraţi că funcţiile sin şi cos sînt continue pe R.

2. Funcţia $f: (0, \infty) \to R$ definită prin $f(x) = \sqrt{x}$ este o continuă pe R.

3. Funcţia $f: R \to R$ definită prin $f(x) = \sum_{k=o}^{n} a_k \; x^k$, unde $a_k \in R$ $(k = 0, \ldots n)$ este continuă pe R.

4. Funcţia $f: A \to R$ este continuă în punctul $a \in A$ dacă şi numai dacă pentru orice $V \in V(f(a)$ există o vecinătate $U \in v(a)$, astfel că $x \in U \cap A$ implică $f(x) \in V$.

5. Funcţia $f: [0, \infty) \to R$ definită prin $f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

este continuă pe $[0, \infty)$.

6. Funcţia $f: R \to R$ definită prin $f(x) = [x] =$ partea întreagă a lui x nu este continuă. Găsiţi punctele în care f nu este continuă.

Soluţii

1. Avem $|\sin x - \sin x_0| = 2 \sin \frac{x-x_0}{2} \mid |\cos \frac{x+x_0}{2} \mid \leqslant |x - x_0|$. Prin urmare $\varepsilon > 0$ fiind dat, luînd $\delta = \varepsilon$, rezultă că $|x - x_0| < \delta$ implică $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$.

2. $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left|\frac{x-x_0}{x+x_0}\right| \leqslant \left|\frac{x-x_0}{x_0}\right|$. Prin urmare pentru $\varepsilon > 0$ luînd $\delta = \varepsilon \sqrt{x_0}$, cînd $x_0 \neq 0$, obţinem că $|x - x_0| < \delta$ implică $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$.

Dacă $x_0 = 0$, luînd $\delta = \varepsilon^2$, $|x - 0| < \delta$ implică $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$.

3. $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \sum_{k=o}^{n} |a_k| \, |x^k - x_0^k| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \, |x - x_0| \, |x + x^{k-2}x_0 +$

$$+ \ldots - \ldots + x_o^{k-1}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \, |x - x_0| \, (k+1) \, (1 + |x_0|)^k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \, |x - x_0| \cdot (n+1) \, (1 + |x_0|^n)$$

dacă $|x - x_0| < 1$.

Fie $M = \max\{|a_k| : k = 1,2,\ldots,n\}$. Luînd, pentru $\varepsilon > 0$,

$\delta = \min\left\{1, \frac{a}{Mn(n+1)(1+x_0)^n}\right\}$, rezultă că $|x - x_0| < \delta$

implică $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

4. Fie a un punct de acumulare pentru mulţimea A. Fie f continuă în a şi fie $V \in V\ (f(a))$. Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel ca $(f(a) - \varepsilon,\ f(a) + \varepsilon) \subset V$. Există $\delta > 0$ astfel ca $|x - a| < \delta$ implică $|f(x) - f(a) < \varepsilon$, adică $f(x) \in (f(a) - \varepsilon,\ f(a) + \varepsilon) \subset V$ este deci suficient să luăm $U = (a - \delta,\ a + \delta) \in V(a)$ încît din $x \in V \cap A$ să rezulte $f(x) \in V$.
Reciproc, să admitem afirmaţia, pentru orice $V \in V(f(a))$ există $U \in V$ (a) astfel ca $x \in V \cap A$ să implice $f(x) \in V$". Fie $\varepsilon > 0$; atunci $(f(a) - \varepsilon.\ f(a) + \varepsilon) \in V\ f(a)$; există U ca mai sus, deci există intervalul $(a - \delta, a + \sigma) \subset U$, $\delta > 0$ astfel că $x \in (a - \delta,\ a + \delta) \cap A$, implică $f(x) \in (f(a) - \varepsilon,\ \ f(a) + \varepsilon)$, Altfel spus,

$$|x - a| < \delta,\ x \in A \quad \text{implică} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

5. Demonstrăm că f este continuă in $x = 0$. În acest scop calculăm $\lim_{x \to 0} f(x)$. Fie $g(x) = \ln f(x) = x \ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Avem

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \ln(1 + y) = \lim_{y\to\infty} \frac{\ln(1+y)}{1+y} \cdot$$
$$\cdot \frac{y+1}{y} = 0.$$ Deoarece funcţia ln este continuă, rezultă că $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. În punctele $x \neq 0$ f este continuă conform teoremei de continuitate a funcţiei compuse.

6. Funcţia este exprimată prin
$f(x) = p$ dacă $x \in [p,\ p + 1)$, p fiind întreg.
De aici rezultă uşor că f este continuă în orice punct neîntreg şi nu este continuă în punctele întregi de pe axa reală.

Inserăm mai jos cîteva proprietăţi utile ale funcţiilor continue care nu pot fi demonstrate la nivelul cunoştinţelor medii.

Teorema 1. Fie $f : [a,b] \to R$ o funcţie continuă definită pe segmentul $[a, b]$. Atunci există o constantă $M > 0$ astfel ca $|f(x) \leqslant M$ pentru orice $x \in [a,\ b]$. În plus, există $\alpha,\ \beta \in [a,\ b]$ astfel ca $f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$ pentru orice $x \in [a,\ b]$.

Teorema 2. Fie $f : A \to R$ o funcţie continuă pe A.
Imaginea unui interval $I \subset A$ prin f este un interval (I poate fi interval închis, deschis sau semideschis).
Teorema 3. Dacă $f : (a, b) \to (c, d)$ este o funcţie continuă bijectivă, atunci f este sau strict crescătoare sau strict descrescătoare.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE

Să se studieze continuitatea următoarelor funcţii:

1. $f(x) = \max\{\sin x, \cos x\} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

2. $f(x) = \max\{g(x), h(x)\}$ $x \in (a, b)$, unde h şi g sînt două funcţii continue pe (a, b).

3. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \text{ raţional} \\ 0 \text{ pentru } x \text{ iraţional} \end{cases}, \quad x \in R.$

4. $f(x) = \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right] \text{ pentru } x \in (0, 1] \\ 0 \text{ pentru } x = 0 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} & \text{dacă } |x| \geqslant 1 \\ a \sin \pi \dfrac{(1+x)}{2} & \text{dacă } |x| \leqslant 1 \end{cases}$

Discuţie după $a \in R$.

6. $f(x) = \begin{cases} x \text{ pentru } x \text{ raţional} \\ x^2 \text{ pentru } x \text{ iraţional} \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ pentru } x \text{ raţional} \\ -x^2 \text{ pentru } x \text{ iraţional} \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} \text{ pentru } x \in (-\infty, -2] \\ -2 \sin \dfrac{\pi x}{6} \text{ pentru } x \in (2, 1) \\ \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - 1 \text{ pentru } x \in [1, \infty) \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} (x - \pi)\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} & \text{pentru } x \in [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \\ a & \text{pentru } x = \pi \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} 4 \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} & x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ \sin \dfrac{(2x^2-1)\pi}{x^2-1} & x \in (-1, 1) \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}\right)^{\frac{x}{|x|}} & x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ a \dfrac{x}{|x|} \sin \dfrac{\pi}{2}(1-x^2) \cdot & x \in (1, 1)/\{0\} \\ b & x = 0 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & x \in (0, 1] \\ a & x = 0 \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & x \in \left(0, \dfrac{1}{\pi}\right) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

14. Să se arate că dacă $f : A \to R$ este o funcție continuă pe A, atunci funcția $g : A \to R$ definită prin $g(x) = [f(x)]^2$, $x \in A$, este continuă pe A.
Reciproca acestei afirmații este adevărată ?

15. Dacă $f : A \to R$ este o funcție continuă pe A atunci funcția $|f| : A \to R$, $|f|(x) = f(x)$, $x \in A$, este continuă. Reciproca este adevărată ?

16. Fie f și g două funcții reale definite pe A astfel încît f și $g \cdot f$ sînt continue în punctul x_0. Este g continuă în punctul x_0? Arătați că afirmația nu este, în general, adevărată. Adăugați o condiție funcției g pentru ca răspunsul să fie afirmativ.

17. Fie $f : (a, b) \to R$ o funcție continuă în punctul $x_0 \in (a, b)$. Dacă $f(x_0) > 0$ $(f(x_0) < 0)$ atunci există un interval $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, astfel că pentru orice $x \in I \cap (a, b)$ $f(x) > 0$ (respectiv $f(x) < 0$).

18. Fie $f:(a, b) \to R$ o funcţie continuă pe (a, b) şi astfel încît există $\alpha = \lim_{x \searrow a} f(x)$, $\lim_{x \nearrow b} f(x) = \beta$ finite sau infinite. Dacă $\alpha \cdot \beta < 0$ (convenţiile $-\infty r^2 < 0$, $-\infty(+\infty) < 0$) atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are cel puţin o rădăcină reală pe (a, b).

19. Arătaţi că ecuaţia $\cos x = x$ are o singură rădăcină reală pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

20. Să se găsească numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $e^x = x^n$(n — număr natural) pe $(-\infty, 0)$.

21. Fie $f: R \to R$ definită prin $f(x) = x^3 + \alpha x + \lambda$ unde $\alpha \geqslant 0$, $\lambda \in R$. Să se arate că f este strict crescătoare pe R şi continuă. Folosind aceste afirmaţii să se arate că ecuaţia $x^3 + \alpha x + \lambda = 0$ are o singură rădăcină reală.

22. Fie $f: R \to R$ o funcţie continuă în punctele $x = 0$, $x = 1$ şi care satisface condiţia $f(x) = f(x^2)$ pentru orice $x \in R$. Să se găsească f.

23. a) Fie $f: R \to R$ o funcţie astfel încît $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pentru orice $x, y \in R$. Să se arate că pentru orice p raţional şi orice $x \in R$, $f(px) = p \cdot f(x)$.
b) Arătaţi că dacă funcţia $f: R \to R$ satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pentru orice $x, y \in R$ şi este continuă într-un singur punct, atunci ea este continuă peste tot şi $f(x, y) = x \cdot f(y)$ pentru orice $x, y \in R$.
c) Deduceţi toate funcţiile $f: R \to R$ continue care satisfac condiţia $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pentru orice $x, y \in R$.

24. $f: R \to R$ o funcţie continuă în $x = 0$ astfel încît $f(kx) = f(x)$ pentru orice $x \subset R$, k fiind o constantă reală pozitivă. Să se arate că f este constantă pe R.

26. Să se găsească toate funcţiile $f: R \to R$ continue şi care verifică condiţia $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ pentru orice $x, y \in R$.

5. FUNCŢII DERIVABILE.

Definiţia 1. Fie $f: A \to R$ şi $a \in A$ un punct de acumulare al mulţimii A. Spunem că f este derivabilă în punctul a dacă există şi este finită limita $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. În acest caz, notăm limita

prin $f'(a)$, numărul $f'(a)$ numindu-se derivata funcţiei f în punctul a. Dacă f este derivabilă în orice punct din A (deci A este formată din punctele de acumulare ale ei) spunem că f este derivabilă pe A.

Dacă limita de mai sus este $+\infty$ (sau $-\infty$) se spune că derivata lui f este, în punctul a, $+\infty$ (respectiv $-\infty$), dar aceasta nu înseamnă că funcţia f este derivabilă în punctul a.

Exemple şi exerciţii

1. Funcţia : $f: R \to R$ definită prin $f(x) = \sum_{k=o}^{n} a_k x^k$ este derivabilă în orice punct $x \in R$ şi $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k x^{k-1}$ (a_k sînt constante reale).

2. Funcţiile sin, cos sînt derivabile pe R.

$$\text{Sin}'(a) = \cos a, \quad \cos'(a) = -\sin a.$$

3. Funcţia $f: [0, \infty) \to R$ definită prin $f(x) = \sqrt{x}$ este derivabilă pe $(0, \infty)$ şi $\sqrt{\ }'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, dar nu este derivabilă în punctul $x = 0$. Totuşi, deoarece $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = +\infty$, se spune că radicalul (de ordinul al doilea) are derivata infinită în origine.
Remarcăm — dată fiind constatarea noastră că se face adesea confuzie — că derivata unei funcţii într-un punct nu este egală cu limita derivatei în acel punct : e posibil ca această limită să existe, dar funcţia să nu fie derivabilă în punctul respectiv.

4. Funcţia $f: R \to R$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \in (-\infty, 0) \\ 0 & x = 0 \\ x + 2 & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

este derivabilă în orice punct $x \neq 0$ şi $f'(x) = 1$ $\lim_{x\to 0} f'(x) = 1$, dar f nu este derivabilă în punctul $x = 0$.

Definiţia 2. Fie $f : (a, b) \to R$ şi $c \in (a, b)$. Dacă restricţia funcţiei f la $(a, c]$ (la $[c, b)$ este derivabilă în punctul c spunem că f are derivată la stînga în punctul c (respectiv, că f are derivată la dreapta în punctul c) şi o notăm prin $f'_s(c)$ sau $f'(c - 0)$ (respectiv $f'_d(c)$ sau $f'(c + 0)$.
Se poate arăta cu uşurinţă :

Propoziţia 1. Fie $f : (a, b) \to R$ şi $c \in (a, b)$.

Dacă există $f'_s(c)$ şi $f'_d(c)$ şi sînt egale, atunci f este derivabilă în punctul c şi $f'(c) = f'_s(c) = f'_d(c)$.
Această propoziţie este utilizată foarte des atunci cînd se studiază derivabilitatea funcţiilor definite pe reuniuni de intervale („prin acolade").

Definiţia 3. Fie $f : A \to R$ o funcţie definită pe mulţimea A formată numai din puncte de acumulare ale ei (de pildă cînd A este un interval sau o reuniune de intervale). Dacă f este derivabilă pe A, atunci fiecărui punct $x \in A$ îi asociem numărul $f'(x)$. În acest caz avem de considerat funcţia care realizează corespondenţa $A \ni x \to f'(x) \in R$. Această funcţie o notăm prin f' şi este prin definiţie, funcţia derivată a lui f, sau, mai scurt, derivata lui f.

Definiţia 4. Fie $f : A \to R$ o funcţie derivabilă pe A. Dacă funcţia $f' : A \to R$ (derivata funcţiei f) este derivabilă pe A (în $x_0 \ni A$) spunem că f este de două ori derivabilă pe A (în $x_0 \in A$) şi notăm $f''(x_0)$ în loc de $(f')'(x_0)$
Prin recurenţă se defineşte prin relaţia

$$f^n(x_0) = (f^{n-1})'(x_0)$$

derivata de ordinul n a funcţiei f în punctul x_0.

Definiţia 5. Fie $f : A \to R$ şi $a \in A$ un punct, a tfel să existe o vecinătate $V \in V(a)$ pentru care orice $x \in V \cap A$ $f(x) \leqslant f(a)$ ($f(x) \geqslant f(a)$). Spunem în acest caz că punctul a este un punct de maxim local (respectiv minim local).

Dacă în inegalităţile de mai sus sensul $\leqslant$ ($\geqslant$) este înlocuit prin $<$ (respectiv $>$) a se numeşte maxim local strict (minim local strict). Punctele maxim şi de minim se numesc puncte de extrem.

Teorema la Fermat. Fie $F : A \to R$ și $a \in A$ un punct de extrem al funcției f. Dacă f este derivabilă în punctul a atunci $f'(a) = 0$.

Teorema lui Rolle. Fie $f : A \to R$ și fie $[a, b] \subset A$ $(a < b)$
Dacă
(I) f este continuă pe $[a, b]$
(II) f este derivabilă pe (a, b)
(III) $f(a) = f(b)$
atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel ca $f'(c) = 0$

Teorema lui Lagrange. Fie $f : A \to R$ și fie $[a, b] \subset A$ $(a < b)$
Dacă
(I) f este continuă pe $[a, b]$
(II) f este derivabilă pe (a, b)
atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel ca $f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$.

Remarcă. Condițiile din teoremele, Rolle, Lagrange sînt condiții suficiente dar nu sînt necesare (cum se va vedea în exercițiile de mai jos). Adesea se dau probleme de genul următor.
Fie $f : A \to R$. Să se verifice aplicabilitatea teoremei lui Rolle, ori Lagrange.

Desigur o asemenea formulare nu este completă sau, în orice caz, derutează, pentru că este posibil ca una sau mai multe din ipotezele teoremei lui Rolle (de pildă) să nu fie satisfăcută și totuși concluzia să se mențină.

De exemplu, fie $f : [-1, 2] \to R$ definită prin $f(x) = x^2$. Această funcție nu satisface condiția (III) din teorema lui Rolle, prin urmare nu putem aplica această teoremă pentru a deduce că există un punct în (1, 2) în derivata lui f este nulă, dar aceasta **nu înseamnă** că un astfel de punct nu există. Dimpotrivă, în acest caz, $f'(0) = 0$. Așadar teorema nu este aplicabilă dar condiția exprimată de concluzie este adevărată!

Exemple și exerciții rezolvate.

4. Studiind funcția $f : R \to R$, $f(x) = |x|$ deduceți că ipoteza ca f să fie derivabilă este esențială în teorema lui Fernat.
5. Studiind funcția $f : R \to R$ $f(x) = x^3$ deduceți că condiția $f'(x_0) = 0$ nu este suficientă pentru ca x_0 să fie punct de extrem.

6. Fie $f:[0,\ 1]\to R$ definită prin $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ \frac{1}{x} & x\in(0,\ 1]\end{cases}$

Studiind această funcţie deduceţi că ipoteza (I) din teorema lui Rolle este esenţială.

7. Studiind funcţia $f:\ [0,\ 1]\to R$ definită prin $f(x)=$

$$=\begin{cases}0 & x=0\\ x^2-x+1 & x\in(0,1)\\ 0 & x=1\end{cases}$$

arătaţi că condiţia (I) din teorema lui Rolle nu este necesară.

8. Construiţi exemple prin care să se obţină esenţialitatea condiţiilor (II) şi (III) din teorema lui Rolle.

9. Construiţi exemplu care să ilustreze că condiţiile (II) şi (III) nu sînt necesare.

Soluţii

4. Punctul $x=0$ este un punct de minim local (în fapt, punct de minim absolut, dar funcţia $x\to|x|$ nu este derivabilă în $x=0$.

5. Funcţia $x\to x^3$ derivabilă pe R, $f'(x)=3x^2$ pentru orice $x\in R$. $f'(0)=0$, dar punctul $x=0$ nu este punct de extrem local deoarece $f(x)<0$ pentru orice $x<0$ şi $f(x)>0$ pentru orice $x>0$.

6. Funcţia din enunţ satisface toate condiţiile din teorema lui Rolle cu excepţia condiţiei (i) : f nu este continuă, în punctul $x=0$ $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ pentru $x\in(0,1)$ şi se vede că $f'(x)\neq 0$ pentru orice $x\in(0,\ 1)$. Astfel, condiţia (I) este esenţială în teorema lui Rolle.

7. Funcţia considerată nu satisface condiţia (I) din teorema lui Rolle, deoarece nu este continuă în punctele $x=0$, $x=1$. Pentru $x\in(0,\ 1)$ $f'(x)=2x-1$ şi se vede că pentru $x=\frac{1}{2}\in(0,\ 1)$, $f'(x)=0$. $\left(f'\left(\frac{1}{2}\right)=0\right)$

8. Fie $f: R \to R$ $f(x) = |x|$. Pe $[-1, 1]$ f este continuă, derivabilă cu excepţia punctului $x = 0$, $f(-1) = f(1) = 1$, dar nu există nici un punct în $(1, 1)$ în care derivata să fie nulă. Aceasta arată că (II) este esenţială în teorema lui Rolle. Considerînd $f: (0, 1) \to R$, $f(x) = x^2 + x + k$ care satisface (i) şi (II), dar nu satisface (III), şi observînd că $f'(x) = 2x + 1 \neq$ $\neq 0$ pentru orice $x \in (0, 1)$ deducem că (III) este esenţială.

APLICAŢII ALE DERIVATELOR.

A. Regulile lui l'Hospital.

I. Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I, f şi g două funcţii definite pe I. Dacă

(I) $\lim\limits_{x \to x} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x \to x} g(x) = 0$

(II) f şi g sînt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$

(III) $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I \setminus \{x_0\}$

(IV) există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (finită sau infinită).

atunci

a) $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I \quad \{x_0\}$

b) funcţia $\dfrac{f}{g}$ are limită în x_0 şi

$$\lim_{x \to x} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

II. Fie x_0 un punct de acumulare al intervalului I, f şi g funcţii definite pe I. Dacă

(I) $\lim\limits_{x \to xo} g(x) = \infty(-\infty)$

(II) f şi g sînt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$

(III) $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I \setminus \{x_0\}$

(IV) există $\lim\limits_{x \to xo} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (finită sau infinită)

atunci funcţia $\dfrac{f}{g}$ are limita în x_0 şi $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Trebuie să menţionăm că există obiceiul ca de îndată ce se întîlneşte o nedeterminare de forma $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, etc. să se apeleze ime-

diat la regula lui l'Hôspital, aplicînd direct formula din concluzia teoremei fără a zăbovi la verificarea condițiilor de aplicabilitate.

Mai mult, dacă se constată că $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nu există se conchide în mod eronat, că nu există $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple și exerciții rezolvate

10. Fie f și g funcții definite pe R astfel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 0 & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

$$g(x) = \operatorname{tg} x$$

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Se poate aplica regula lui l'Hospital?

11. Analizînd funcțiile f și g definite pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ prin $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin 2x$. Să se arate că din existența limitei $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ nu rezultă că există $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Soluții.

10. Pentru orice șir $(x_n)_{n\in N}$ de numere raționale convergent către 0 avem $\lim\limits_{n} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim\limits_{n} \frac{x_n^2}{\operatorname{tg} x_n} = 0$ și pentru orice șir $(x_n)_{n\in N}$ de numere iraționale convergent către 0 avem $\lim\limits_{n} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim\limits_{n} \frac{0}{\operatorname{tg} x_n} = 0$, prin urmare $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ există și este 0. Deoarece funcția f nu este derivabilă, cu excepția punctului $x = 0$, nu se poate aplica regula lui l'Hospital.

11. Avem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{2 \sin x \cos x} = 0$

Dar $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nu există deoarece $\cos \frac{1}{x}$ nu are limita pentru x tinzînd la zero.

B. Reprezentarea grafică a funcţiilor. Rolul derivatelor.

În reprezentarea grafică a funcţiilor rolul derivatelor se manifestă în general vorbind, în următoarele:

a) stabilirea monotoniei funcţiei; anume:

dacă f este derivabilă pe intervalul I şi dacă $f'(x) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) pentru orice $x \in I$ atunci f este crescătoare (descrescătoare) pe I.

Dacă $f'(x) > 0$ (< 0) pentru orice $x \in I$ atunci f este strict crescătoare (strict descrescătoare) pe I. Dar, este posibil ca f să fie strict crescătoare sau strict descrescătoare pe un interval chiar dacă f' are rădăcini pe acest interval. De exemplu funcţia $x \to x^3$ este strict crescătoare pe R deşi derivata ei este nulă în zero.

Este momentul să facem următoarea remarcă: ipoteza că mulţimea pe care studiem monotonia cu ajutorul derivatei este interval este esenţială. Pentru a ilustra afirmaţia şi a pune în evidenţă erori posibile să considerăm:

Exemplul 1. Fie $f: (-\infty, 0)\ (0, \infty) \to R$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \in (-\infty, 0) \\ x - 1 & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

Evident f este derivabilă pe mulţimea de definiţie şi $f'(x) = 1 > 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Cu toate acestea f nu este crescătoare pe întreg domeniul de definiţie. Aşadar, în acest caz problemei monotoniei lui f răspundem astfel: f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$ şi pe $(0, \infty)$ completînd eventual, că pe $(-\infty, 0)$ $\cup (2, \infty)$ funcţia este strict crescătoare.

Prin contrast funcţia $f: R \to R$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ -x - 1 & \text{dacă } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

este strict descrescătoare pe R deoarece este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$, strict descrescătoare pe $(0, \infty)$ și, esențial, $f(x) < f(y)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$ și orice $y \in (-\infty, 0)$.

b) Stabilirea punctelor de extrem; anume: dacă f este derivabilă pe I dacă $x_0 \in I$ este astfel încît $f'(x_0) = 0$ și există $\delta > 0$ astfel ca pentru $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ iar pentru $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ atunci punctul x este un punct de maxim (respectiv, minim) local.

Punctele în care derivata întîi se anulează dar „nu își schimbă semnul" nu sînt puncte de extrem.

Să ne amintim că în acest fel nu determinăm toate punctele de extrem. Care mai sînt alte eventuale puncte de extrem? (I) cele în care funcția nu este derivabilă (II) capetele intervalelor închise sau semiînchise care alcătuiesc mulțimea de definiție a funcției (III) punctele din mulțimea de definiție a funcției care nu sînt puncte de acumulare pentru aceasta.

Exemple.

2. Funcția $f: R \to R$ definită prin $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (-\infty, 0) \\ 0 & x \in (0, \infty) \end{cases}$

are în $x = 0$ un punct de minim absolut, dar f nu este derivabilă în acest punct.

3. Funcția $f: [-1, 1] \to R$ $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ are în $x = -1$, și $x = 1$ puncte de minim deși nu este derivabilă în aceste puncte, iar funcția $f(x) = \min\{\sin x, \cos x\}$ pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ are punctele de minim $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ în care este derivabilă și în care derivata nu este nulă.

4. Funcția definită prin $f(x) = \sqrt{\frac{3x}{\pi} - |\sin x|}$ are în $x = 0$ un punct de extrem absolut.

c) convexitatea și concavitatea funcției; anume: dacă funcția f este de două ori derivabilă pe intervalul I și $f''(x) \geqslant 0$ $(f''(x) \leqslant 0)$ pentru orice $x \in I$, atunci f este convexă (respectiv concavă) pe I.

Exemple.

5. Funcţia $x \to x^2$ este convexă pe R

6. Funcţia $x \to \cos x$ este concavă pe orice interval de forma $\left(\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right)$ şi este convexă pe orice interval de forma $\left(\frac{4k+1}{2}\pi, \frac{4k+3}{2}\pi\right)$

d) Punctele de inflexiune; anume: dacă f este de două ori derivabilă pe intervalele $(x_0 - \delta, x_0)$ şi $(x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ şi are semne contrare pe cele două intervale atunci x_0 este un punct de inflexiune. Dacă f este derivabilă de două ori într-un punct de inflexiune x, x_0, atunci $f''(x_0) = 0$. De aici rezultă regula practică de găsire a punctelor de inflexiune pentru funcţii de două ori derivabile.

Exemple:

7. Funcţia $x \to x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 6x + 1$ are punctele de inflexiune $x = 1$, $x = 2$.

8. Funcţia $x \to \text{sign } x \sqrt{|x|}$ are în $x = 0$ un punct de inflexiune, deşi nu este derivabilă în acest punct.

9. Funcţia $x \to \sqrt[3]{x+2}$ are în $x = -2$ un punct de inflexiune, dar funcţia nu este derivabilă în acest punct.

Asimptote.

Definiţia 1. Dreapta $x = a$ (a fiind un număr real) se numeşte asimptotă verticală a funcţiei f dacă cel puţin una din limitele $\lim_{x \searrow a} f(x)$ $\lim_{x \nearrow a} f(x)$ este infinită ($\pm\infty$).

Definiţia 2. Dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică a funcţiei f la $+\infty$ $(-\infty)$ dacă $\lim_{x\to\infty}[f(x) - mx - n] = 0$ (respectiv $\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx - n] = 0$. În particular, dacă $\lim_{x\to\infty} [f(x) - n] = 0$ $(\lim_{x\to-\infty} [f(x) - n] = 0$, dreapta $y = n$ se numeşte asimptotă orizontală la $+\infty$ $(-\infty)$ pentru funcţia f.

Funcţia f are asimptotă oblică la $+\infty$ dacă şi numai dacă există şi sînt finite limitele $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - mx = n$, asimptotă fiind în acest caz $y = mx + n$ (Analog pentru $-\infty$).

Funcţia f are asimptotă orizontală la $+\infty$ $(-\infty)$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ $(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, există şi este finită, dacă $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ atunci dreapta $y = l$ este asimptotă orizontală la $+\infty(-\infty)$.

În reprezentarea grafică a unei funcţii este bine să se stabilească următoarele:

1) domeniul de definiţie al funcţiei, dacă acesta nu este precizat;

2) limitele la infinit, dacă este cazul; alte limite;

3) intersecţiile cu axele de coordonate; în această etapă este util, dacă este posibil să se precizeze intervalele pe care funcţia este pozitivă şi pe care este negativă;

4) punctele de extrem ale funcţiei, intervalele de monotonie.

5) intervalele de convexitate (concavitate), punctele de inflexiune. Punctele de extrem şi de inflexiune se vor preciza prin abscise şi ordonate.

6) asimptotele graficului funcţiei; este util aici să se constate dacă graficul curbei intersectează sau nu asimptotele (Este de semnalat faptul că, în general, elevii au impresia că graficul unei funcţii nu poate intersecta asimptotele acesteia, Această impresie este falsă!).

Atragem atenţia că la stabilirea asimptotelor oblice (orizontale) limitele prin al căror calcul le determinăm trebuie calculate atît la $+\infty$ cît şi la $-\infty$ deoarece este posibil să se obţină rezultate diferite la cele două ramuri.

De exemplu, funcţia $x \to \sqrt{1 + x^2}$ are la $+\infty$ asimptote $y = x$, iar la $-\infty$ are asimptota $y = -x$.

Funcţia $x \to x + \sqrt{x^2 + x + 1}$ are la $+\infty$ asimptota $y = 2x + \frac{1}{2}$, iar la $-\infty$ are asimptota orizontală $y = -\frac{1}{2}$.

Rezultatele obținute se înscriu într-un tablou de variație, prin a cărui urmărire se trasează graficul funcției.

Dăm mai jos exemple

1) Fie funcția definită prin $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^3 - 9x^2}{(x-2)^2}$.

Domeniul maxim de definiție al funcției este $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$. Graficul funcției intersectează axele de coordonate în punctele $(0, 0)$, $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$. Se constată ușor că pentru $x \in (-\infty, 2) \cup \left(2, \frac{9}{4}\right)$, $f(x) < < 0$, iar pentru $x \in \left(\frac{9}{4}, +\infty\right)$, $f(x) > 0$. Avem $f'(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{(x-2)^3}$.

Rădăcinile primei derivate sînt $x = 0$ și $x = 3$ (dublă) semnul derivatei fiind redat mai jos.

x	$-\infty$			0	1	2	3				$+\infty$
f'	+	+	+	0	−	− |	+	0	+	+	+ +

De aici rezultă că punctul $(0, 0)$ este un punct de extrem al funcției, dar punctul $x = 3$ nu este punct de extrem (deși $f'(3) = 0$).

Funcția este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $(2, \infty)$ și este strict descrescătoare pe $[0, 2)$.

Derivata a doua a funcției este $f'' = \frac{6(x-3)}{(x-2)^4}$ și are rădăcina $x = 3$; pentru $x \in (-\infty, 2) \cup (2, 3)$, $f''(x) < 0$ și prin urmare funcția este concavă pe aceste intervale, iar pentru $x \in (3, \infty)$ $f''(x)$ 0, f este convexă pe $(3, \infty)$punctul $\left(3, \frac{27}{4}\right)$ este punct de inflexiune. Deoarece $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$, dreapta $x = 2$ este asimptotă verticală a graficului lui f.

Cum $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ și $\lim_{x \to \infty} [f(x) - x] = = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - x] = \frac{7}{4}$ rezultă că dreapta $y = x + \frac{7}{4}$ este asimptotă oblică la ramurile infinite ale graficului.

Graficul funcţiei intersectează asimptota oblică în punctul $\left(\frac{7}{3}, \frac{49}{12}\right)$. Pentru $x \in (-\infty, 2) \cup \left(2, \frac{7}{3}\right)$ avem $f(x) < x + \frac{7}{4}$ şi deci pe aceste intervale graficul se află sub asimptota oblică, iar pentru $x \in \left(\frac{7}{3}, \infty\right) f(x) > x + \frac{7}{4}$, prin urmare pe acest interval graficul se află deasupra asimptotei.

Tabloul de variaţie a funcţiei este

x	$-\infty$		0		2	$\frac{7}{3}$		3		$+\infty$
f'	$+$	$+$	0	$-$ |		$+$			$+$	$+$
f''	$-$	$-$		$-$ |		$-$		0	$+$	$+$
f	$\nearrow$ $-\infty$	$\nearrow$ concavă	$\searrow$ 0	$\searrow$ $-\infty$ |		$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$ convexă	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul funcţiei este redat în fig. 4.1.

2) Fie f funcţia definită prin $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 3}$

Domeniul maxim de definiţie este $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup \cup (\sqrt{3}, \infty)$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \searrow \sqrt{3}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \nearrow \sqrt{3}} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \searrow -\sqrt{3}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \nearrow -\sqrt{3}} f(x) = -\infty$. Graficul funcţiei intersectează axele în punctele

$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$,

$(1, 0), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ · $f(x) < 0$

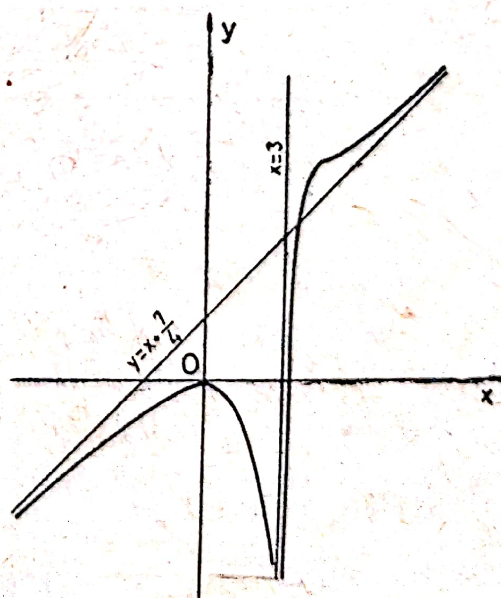


Fig. 4.1

pentru $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$ și $f(x) > 0$ pentru

$$x \in \left(-\sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (\sqrt{3}, \infty)$$

$f'_{(x)} = \frac{x^4 - 9x^2 + 10x}{(x^2-3)^2}$, rădăcinile primei derivate fiind $-1-\sqrt{6}$; 0; $-1+\sqrt{6}$; 2; semnul derivatei este redat mai jos.

x	$-\infty$ $\quad -1-\sqrt{6}$ $\quad -\sqrt{3}$ $\quad 0$ $\quad \sqrt{6}-1$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad 2$ $\quad +\infty$
f'	$+ \quad + \quad 0 \quad - \quad -$ | $- \quad 0 \quad + \quad + \quad 0 \quad - \quad -$ | $- \quad 0 \quad + \quad +$

Rezultă că punctele $\left(-1-\sqrt{6}, -\frac{7+3\sqrt{6}}{2}\right)$, $\left(6-1, \frac{3\sqrt{6}-7}{2}\right)$ sînt puncte de maxim, iar punctele $\left((0, -\frac{1}{3}\right)(2, 1)$ sînt puncte de minim.

Derivata a doua este $f''(x) = 6 \cdot \frac{x^3 - 5x^2 + 9x - 5}{(x^2-3)^3}$ și se vede imediat că are o singură rădăcină reală anume $x = 1$. Semnul derivatei secunde este

x	$-\infty$ $\quad -\sqrt{3}$ $\quad 0$ $\quad 1$ $\quad -\sqrt{3}$ $\quad +\infty$
f''	$- \quad -$ | $+ \quad + \quad 0 \quad -$ | $+ \quad +$

De aici, rezultă că pe intervalele $(-\infty, -\sqrt{3})$ și $(1, \sqrt{3})$ f este concavă, pe intervalele $(-\sqrt{3}, 1)$ și $(\sqrt{3}, +\infty) f$ este convexă, punctul $(1, 0)$ este punct de inflexiune.

Dreptele $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ sînt asimptote verticale ale graficului, dreapta $y = x - 2$ este asimptotă oblică la ambele ramuri infinite ale curbei. Asimptota oblică intersectează graficul funcției în punctul $\left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$; pentru $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{3}\right)$

graficul funcției se află sub asimptota oblică iar pentru $x \in \left(-\sqrt{3}, \frac{5}{3}\right) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ graficul se află deasupra asimptotei oblice. Tabloul de variație a funcției este

x	$-\infty \quad -1-\sqrt{6} \quad -\sqrt{3}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad 0 \quad 1 \quad \sqrt{6}-1 \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{3} \quad 2 \quad +\infty$
f'	$+ \quad + \quad 0 \quad -$	$- \quad - \quad 0 \quad + \quad + \quad 0 \quad -$	$- \quad 0 \quad + \quad +$
f''	$- \quad - \quad -$	$+ \quad + \quad + \quad 0 \quad - \quad -$	$+ \quad + \quad +$
f	$\uparrow -\frac{7+3\sqrt{6}}{2} \downarrow$ concavă $-\infty$	$+\infty \downarrow \; 0 \downarrow -\frac{1}{3} \uparrow 0 \uparrow \frac{3\sqrt{6}-7}{2} \downarrow 0 \downarrow$ convexă concavă $-\infty$	$+\infty \downarrow 1 \uparrow +\infty \uparrow$ concavă

Graficul este reprezentat în fig. 4.2. Este important să se observe dacă funcția pe care o studiem are o proprietate deosebită, cum ar fi: periodicitatea, simetrie față de un punct sau față de o verticală, etc.

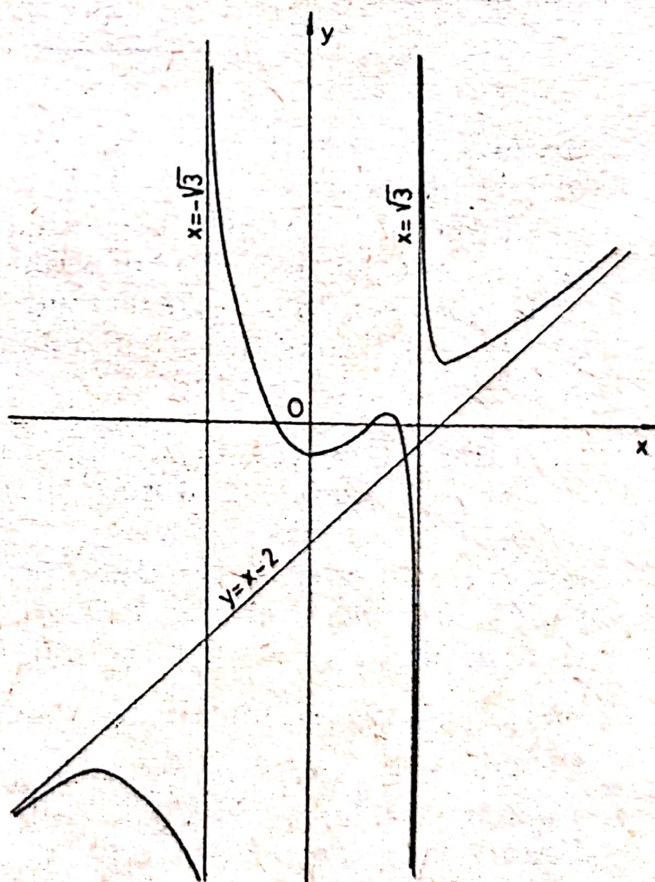


Fig. 4.2

C. Stabilirea numărului rădăcinilor reale ale unei funcții reale. Șirul lui Rolle.

Fie $f(a, b) \to R$ o funcție derivabilă pe (a, b). Atunci între două rădăcini consecutive ale derivatei se află cel mult o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$, diferite de acestea.

Pe această afirmație se bazează metoda de determi-

nare a intervalelor în care o anumită ecuaţie are o singură rădăcină reală.

Să presupunem că ecuaţia f(x) = 0 are pe (a, b) rădăcinile reale $x_1, x_2 \ldots x_n$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$.

Atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are o rădăcină şi numai una pe intervalul (x_k, x_k) $(x_k, x_{k+1}), k \geqslant 0$ dacă şi numai dacă $f(x_k) f(x_{k+1}) < 0$ unde prin $f(a)$ şi $f(b)$ înţelegem, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ respectiv $\lim f(x)$ atunci cînd f nu este definită în a sau în b.

Practic, deci, se găsesc rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ şi se calculează $f(a)$, $f(b)$, $f(x_k)$.

Intervalul (x_k, x_{k+1}) la capetele căruia f realizează schimbare de semn conţine o rădăcină şi numai una a ecuaţiei $f(x) = 0$.

Exemple.

1. Să se găsească numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $f(x) = x^3 - 3x + 1$ $f(x) = 0$.

   Avem $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ şi deci rădăcinile derivatei sînt $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

   Formăm „şirul lui Rolle".

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f	$-$	$+3$	-1	$+$

   Rezultă că ecuaţia $x^3 - 3x + 1 = 0$ are trei rădăcini reale situate pe $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ şi $(1, \infty)$. Faptul că am indicat trei intervale disjuncte conţinînd fiecare cîte o singură rădăcină a ecuaţiei date îl exprimăm prin „am separat rădăcinile reale ale ecuaţiei". Observînd că $f(-2) = -1$, $f(0) = 1$ şi $f(2) = 3$ precizăm că rădăcinile se află în $(-2, -1)$, $(0,1)$ şi respectiv $(1, 2)$.

2. Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $f(x) = x^3 + 3\lambda x + 4$ $f(x) = 0$, după valorile parametrului real.

   Avem $f'(x) = 3(x^2 + \lambda)$.

   Dacă $\lambda > 0$ atunci ecuaţia $f'(x) = 0$ nu are rădăcini reale, $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in R$, f este strict crescătoare pe R şi cum $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, rezultă că, în ipoteza făcută $f(x) = 0$ are o singură rădăcină reală.

   Pentru $\lambda = 0$ ecuaţia devine $x^3 + 4 = 0$ şi are o singură rădăcină reală $x = -\sqrt[3]{4}$.

   Fie acum $\lambda < 0$; ecuaţia $f'(x) = 0$ are rădăcinile reale $x_1 = -\sqrt{-\lambda}$, $x_2 = +\sqrt{-\lambda}$. Şirul lui Rolle este

x	$-\infty$	$-\sqrt{-\lambda}$	$\sqrt{-\lambda}$	$+\infty$
f	$-\infty$	$4-2\lambda\sqrt{-\lambda}$	$4+2\lambda\sqrt{-\lambda}$	$+\infty$

De aici se vede necesitatea de a discuta semnele funcţiilor $4-2\lambda\sqrt{-\lambda}$ $4+2\lambda\sqrt{-\lambda}$ pe $(-\infty, 0)$. Evident, dacă $\lambda \in (-\infty, 0)$, atunci $4-2\lambda\sqrt{-\lambda} > 0$. Pentru $4+2\lambda\sqrt{-\lambda}$, observînd că este funcţie continuă de λ pe $(-\infty, 0)$ şi că are singura rădăcină reală $\lambda = -\sqrt[3]{4}$ deducem semnul funcţiei:

$-\lambda$	$-\infty$			$-\sqrt[3]{4}$		0
$4+2\lambda\sqrt{-\lambda}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

Acum putem înscrie rezultatele într-un tablou care să ne permită discuţia cerută

x / f / λ	$-\infty$	$-\sqrt{-\lambda}$	$\sqrt{-\lambda}$	$+\infty$
		$4-2\lambda\sqrt{-\lambda}$	$4+2\lambda\sqrt{-\lambda}$	
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$
$-\sqrt[3]{4}$	$-$	$+$	0	$+$
	$-$	$+$	$+$	$+$
0				

De aici se vede că pentru $\lambda \in \left(-\infty, -\sqrt[3]{4}\right)$, ecuaţia $f(x) = 0$ are trei rădăcini reale, iar pentru $\lambda \in \left(-\sqrt[3]{4}, 0\right)$ ecuaţia are o singură rădăcină reală. Anticipînd (vezi mai departe), pentru $\lambda = -\sqrt[3]{4}$, ecuaţia are o rădăcină dublă egală cu $\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{4}$ şi încă una egală cu $-\sqrt[3]{16}$. În stabilirea numărului rădăcinilor reale ale unei ecuaţii se poate folosi adesea aşa-zisa metoda grafică.

Fie de discutat o ecuaţie ce se poate pune sub forma $f(x) = g(x, m)$, f fiind o funcţie de variabilă $x \in (a, b)$, g fiind o funcţie de $x \in (a, b)$ şi $m \in (c, d)$.

Dacă x_0 este o rădăcină reală a ecuaţiei date pentru un $m = m_0$ fixat atunci graficele funcţiilor $x \to f(x)$ şi $x \to g(x, m_0)$ se intersectează în punctul $(x_0, f(x_0))$.

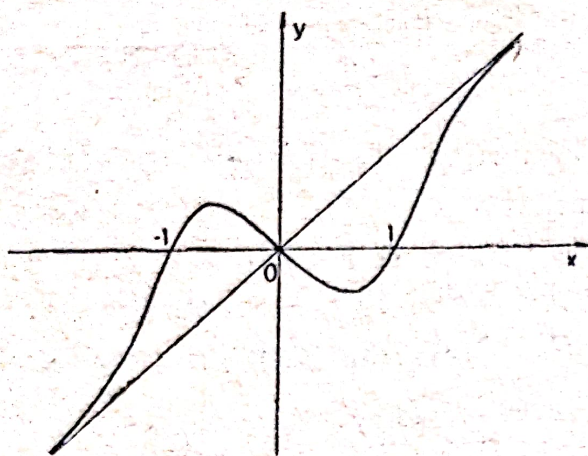


Fig. 4.3

Rezultă că pentru o valoare dată lui m în (c, d) numărul rădăcinilor reale ale ecuației este egal cu numărul punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor considerate mai sus.

Iată un exemplu.

1. Să se discute, folosind metoda grafică, numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$x^3 - mx^2 - x - m = 0$$

Soluție. Ecuația este echivalentă cu

$$\frac{x^3 - x}{x^2 + 1} = m$$

Graficul funcției $x \to \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ este redat în fig. 4.3. Funcția $x \to m$ este reprezentată printr-o dreaptă paralelă cu axa absciselor. Concluzii: pentru $m \in \left(-\infty, -\sqrt{\sqrt{5} - 2}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ ecuația are o singură rădăcină reală; pentru $m = -\sqrt{\sqrt{5}-2}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ecuația are rădăcina dublă $x_1 = x_2 = -\sqrt{\sqrt{5}-2}$ și rădăcina $x_3 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{\sqrt{5}-2}}$; pentru $m \in \left(-\sqrt{\sqrt{5}-2}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right), \left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ ecuația are trei rădăcini reale; pentru $m = \sqrt{\sqrt{5}-2}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ecuația are rădăcina dublă $x_1 = x_2 = +\sqrt{\sqrt{5}-2}$ și rădăcina $x_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{\sqrt{5}-2}}$. Pentru m în $\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \infty\right)$ ecuația are o singură rădăcină reală.

D. Stabilirea rădăcinilor multiple ale polinoamelor

Dacă $P(x)$ este un polinom cu coeficienți reali atunci ecuația $P(x) = 0$ are rădăcina $x = a$ multiplă de ordinul n dacă și numai dacă $P(a) = 0,\ P'(a) = 0, \ldots,\ P^{(n-1)}(a) = 0,\ P^{(n)}(a) \neq 0$.

Exemple

1. Ecuaţia $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$ are rădăcina $x = 2$ multiplă de ordinul 3.
În adevăr $P(2) = 0$, $P'(2) = 0$, $P''(2) = 0$, $P'''(2) \neq 0$.
Rădăcinile ecuaţiei sînt $x_1 = x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = -1$.

2. Să se determine parametrul real m astfel ca ecuaţia $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x + m = 0$, să aibă o rădăcină întreagă dublă. Avem, $P'(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 4$ şi ecuaţia $P'(x) = 0$ are rădăcinile $x = 1$, $x = \frac{1+\sqrt{32}}{4}$ $x = \frac{1-\sqrt{32}}{4}$. Rezultă că $P(x) = 0$ poate avea rădăcină întreagă dublă numai pe $x = 1$. Punînd condiţia $P(1) = 0$ se obţine $m = -4$. În acest caz rădăcinile ecuaţiei sînt $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$.

3. Să se determine parametrii reali m şi n astfel încît ecuaţia $P(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + mx + n = 0$ să admită o rădăcină reală triplă. O rădăcină reală triplă a lui $P(x) = 0$ trebuie să verifice $P(x) = 0$, $P'(x) = 0$ $P''(x) = 0$. $P''(x) = 20x^3 + 72x^2 + 78x + 28$ şi ecuaţia $P''(x) = 0$ are o singură rădăcină reală : $x = 2$. Din $P'(2) = 0$, obţinem $m = 12$, şi cu aceasta $P(2) = 0$ conduce la $n = 8$.

PROBLEME PROPUSE

Să se constate dacă funcţiile de mai jos satisfac ipotezele teoremei lui Roole

1. $f(x) = x|\sin x|$ pe $[-\pi, \pi]$

2. $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{-2x - x^2} & \text{dacă } x \in [-1, 0] \\ 1 - \sqrt{2x - x^2} & \text{dacă } x \in [0, 1] \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \text{Sin}\,\frac{1}{x} & x \in \left[0, \frac{1}{\pi}\right] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

4. Fie f şi g două funcţii definite pe a, b, continue pe a, b derivabile pe (a, b) şi astfel încît $f(a) = f(b) = 0$, $g(a) \neq 0, g(b) \neq 0$. Dacă $f'(x)\ g(x) - f(x)\ g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$ atunci există $x \in (a, b)$ astfel încît $g(c) = 0$.

Să se găsească punctele de extrem şi să se studieze monotonia funcţiilor

5. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$

7. $f(x) = x \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$

8. $f(x) = x \ln x$

9. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$

10. $f(x) = \text{arc tg}\, x - \text{arc tg}\, (x + 1)$;

11. $f(x) = x + \cos x$

12. $f(x) = \text{arc} \sin \dfrac{2\sqrt{x}}{x + 1}$

13. $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$

14. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

15. $f(x) = \dfrac{\text{arc} \sin x}{\sqrt{1 - x^2}}$

16. $f(x) = \text{arc} \sin (\cos^2 x)$

17. Două localităţi situate de aceeaşi parte a unei căi ferate rectilinii trebuie să fie legate printr-o şosea care să abordeze calea ferată. Să se găsească locul optim de abordare.

18. Să se găsească cilindrul de volum maxim înscris într-o sferă de rază R.

19. Să se găsească conul circular drept de volum maxim înscris într-o sferă de rază R.

20. O tavă paralelipipedică este confecţionată dintr-un dreptunghi de tablă. Să se dimensioneze tava astfel încît să aibă volum maxim.

Să se reprezinte grafic următoarele funcţii :

21. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

22. $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

23. $f(x) = x \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 2}}$

24. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^3}$

25. $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2 - 4x + 3}$

26. $f(x) = x \sqrt{\dfrac{x - 1}{3x + 1}}$

27. $f(x) = x\ x$

28. $f(x) = x - \sin x$

29. $f(x) = x + \text{arc} \sin x$

30. $f(x) = x(1 + e^{-x})$



31. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 - 2x - 3}$

32. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^2 - 2x}}$

33. $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x^2 + 6x - 8}{x - 3}}$

34. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x - 1)^2}$

35. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\cos x - \sin x}$

36. $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x + 1}$

37. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + x^{-x}}$

38. $f(x) = 2 - |2 - |2 - x||$

39. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} +$
$+ \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$

40. $f(x) = \text{arc tg } (\ln x)$

41. Fie funcţia $f : [-1, 1] R$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sin x}{x} \text{ pentru } x \in [-1, 0] \\ x^3 + ax + b \text{ pentru } x \in [0, 1] \end{cases}$$

a) Să se determine a şi b astfel ca f să fie continuă şi derivabilă pe mulţimea de definiţie.

b) Să se arate că $|f(x)| \leqslant 1$ pentru orice $x \in [-1, 1]$ a şi b fiind determinaţi.

c) Să se construiască graficul funcţiei f.

43. Fie funcţia $f : R \to R$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} a \sin \dfrac{(x + b)}{2} \text{ pentru } |x| < 1 \\ \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} \text{ pentru } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

Să se determine a şi b astfel încît funcţia să fie derivabilă pe toată axa reală.

43. Fie f funcţia definită pe axa reală prin

$$f(x) = \frac{|2(x^2 - 1) - 3x|}{x^2 + 1} - 2$$

a) Să se cerceteze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.

b) Să se reprezinte grafic funcţia calculîndu-se efectiv extremele.

c) Folosind graficul să se discute ecuaţia

$$(m+2)(x^2+1)=2(x^2-1)-3x$$

şi apoi să se verifice rezultatele prin calcul direct.

Să se separe rădăcinile reale ale ecuaţiilor

44. $12x^5+15x^4-140x^3-30x^2+360x+\alpha=0$

45. $x^4-3x^3-6x^2+28x-24+\alpha=0$

46. $x^4-2x^3-2x^2+6x+\alpha=0$

47. $9x^4-10x^3-9x^2+12x+\alpha=0$

48. $x^4-2x^2\lambda^2+\lambda^3-\lambda+1=0$

Folosind metoda grafică să se separe rădăcinile reale ale ecuaţiilor

49. $x^3-\lambda x^2-3x-\lambda-2=0$

50. $\lambda x^3+3x+4\lambda+2=0$

51. $x^3-3\lambda x+1=0$

52. $x^3+6\lambda x^2+9\lambda x-\lambda+1=0$

Să se discute rădăcinile ecuaţiilor după parametrii reali a şi b.

53. $x^3-3a^2x+2b^3=0$

54. $x^3-3x+a^2+b^2-3=0$

55. $4x^3-3(a+b)x^2+3abx+a^2b^2=0$

56. a) Dacă f este o funcţie reală definită pe un interval, continuă şi dacă satisface egalitatea

$$f(x)-f(y)=(y-x)f(x)\cdot f(y) \tag{1}$$

atunci ea este indefinit derivabilă. In plus

$f^{(n)}=(-1)^n n!\, f^{n+1}$ pentru orice n natural.

b) Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei f definită prin

$$f(x)=\frac{1}{a+x}$$

c) Să se găsească toate funcţiile reale de o variabilă reală care satisfac egalitatea (1)

(Aristide Leonte, problema 15 358 G.M. B)

57. Se dă funcţia f: definită prin

$$f(x) = \begin{cases} a\,x\,e^{x} & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ \alpha(x^2 + x - 2) + \beta & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

a) Să se găsească relaţiile între α, δ, β aşa ca funcţia f să fie derivabilă în origine.
b) Să se arate că pentru α, δ, β satisfăcînd condiţiile cerute, există un punct în R în care funcţia nu este derivabilă.
c) Să se construiască graficul funcţiei în cazul $a = 1$ în condiţiile de la a).

58. Se consideră $f: I \to R$ o funcţie definită pe intervalul I, derivabilă pe I, satisfăcînd condiţia

$$f(x + y) = f(x)\sqrt{1 - f^2(y)} + f(y)\sqrt{1 - f^2(x)}$$

pentru orice
a) Să se determine x, $y \in I$
b) Să se calculeze $f'(x)$ pentru $x \in I$
c) Să se determine funcţia f şi intervalul I.

(**Anca Bănică, problema 14 411 G M B**).

INTEGRALA RIEMANN

Def. 1. Fie $[a, b]$ un interval al dreptei reale, $f: [a, b] \to R$ o funcţie reală. Fie punctele $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ astfel $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{k-1} < x_n = b$ şi pentru fiecare $k = 0, 1, \ldots n-1$, fie $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Numărul $S(f, \Delta, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$ se numeşte sumă Riemann asociată funcţiei f pe $[a, b]$, diviziunii $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ şi sistemului $\xi = \{\xi_0, \xi_1 \ldots \xi_{n-1}\}$. Numărul $\upsilon(\Delta) = \max\ \{x_{k+1} - x_k : k = 0, \ldots n-1\}$ se numeşte norma diviziunii Δ. Dacă există $\lim\limits_{\upsilon(\Delta)\to 0} S(f, \Delta, \xi)$ pentru orice alegere a sistemului ξ atunci limitele acestea sînt egale (aceasta reprezintă o teoremă) şi valoarea comună a lor se numeşte integrala Riemann

a funcţiei f pe $[a, b]$, notîndu-se prin $\int_a^b f(x)\,dx$ sau $\int_a^b f$. Funcţia f însăşi se numeşte integrabilă pe $[a, b]$.

În teoremele care urmează se identifică cîteva clase de funcţii integrabile.

Teorema 1. Dacă $f:[a, b] \to R$ este o funcţie continuă pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Teorema 2. Dacă $f:[a, b] \to R$ este o funcţie monotonă pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Proprietăţi ale integralei Riemann.

(I) Dacă $f, g:[a, b] \to R$ sînt integrabile pe $[a, b]$, atunci funcţia $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe $[a, b]$, pentru orice numere α şi β şi

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \quad \text{(liniaritatea integralei)}$$

(II) Dacă $f:[a, b] \to R$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in [a, b]$ atunci $\int_a^b f \geqslant 0$ (monotonia integralei).

(III) Dacă $f:[a, b] \to R$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi $[c, d] \subset [a, b]$ atunci restricţia lui f la $[c, d]$ este integrabilă pe $[c, d]$.

(IV) Dacă $f:[a, b] \to R$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi $c \in [a, b]$ atunci $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ (aditivitatea integralei în raport cu intervalul).

(V) Dacă $f:[a, b] \to R$ este integrabilă pe $[a, b]$ atunci $|f|$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.

Reciproca nu este adevărată.

(VI) Fie $f:[a, b] \to R$ o funcţie continuă pe $[a, b]$. Atunci (1).

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f}{b-a} \leqslant M \text{ unde } m \leqslant f(x) \leqslant M \text{ pentru orice } x \in [a, b]$$

(2) există $\xi \in [a, b]$ astfel ca $\int_a^b f = (b-a)f(\xi)$ (Teoreme de medie).

Calculul integralelor Riemann.

Fie $f:[a, b] \to R$ o funcţie reală. Dacă există o funcţie derivabilă pe $[a, b]$, F, astfel ca $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in (a, b)$ atunci F se numeşte o primitivă a funcţiei f pe (a, b).

Teorema 3 (formula Leibniz-Newton) Dacă $f:[a, b] \to R$ este

o funcţie continuă, atunci $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ unde F este o primitivă a funcţiei f pe a, b.

(Se poate arăta că orice funcţie continuă pe interval are primitivă pe acest interval).

Atragem atenţia asupra faptului că noţiunea de primitivă a unei funcţii este legată de intervalul în care este definită funcţia.

Dacă F semnifică o primitivă a funcţiei f pe (a, b) atunci notăm aceasta prin $F(x) = \int f(x)\, dx$.

Această notaţie este justificată de faptul că o funcţie continuă pe $[a, b]$ are drept primitivă funcţia $F : [a, b] \to R$ definită prin $F(x) = \int_a^b f$, dar în egalitatea $F(x) = \int f(x)\, dx$ trebuie să vedem numai $F'(x) = f(x)$ pentru orice x din *intervalul* considerat.

Metode de calcul al primitivelor.

Din formulele de derivare se obţin un şir de formule de calcul imediat pentru primitivele unor funcţii; acestea, evident, trebuie cunoscute. Metodele de calcul al primitivelor pentru funcţii mai complicate nu fac altceva decît a reduce calculul încît utilizarea acestor formule să devină posibilă. Metodele generale sînt:

(I) Metoda schimbării de variabilă (teoremă).

Fie $f : (a, b) \to R$ o funcţie reală, $\varphi : (c, d) \to (a, b)$ o funcţie strict monotonă derivabilă surjectivă.

Dacă $G(u) = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)\, du$, atunci funcţia $F : (a, b) \to R$ $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$ este o primitivă a funcţiei f pe (a, b). Aceasta revine la înlocuirea lui a după calcul lui $G(x)$ prin $\varphi^{-1}(x)$.

De exemplu:

$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$ $x \in (0, 1)$. Facem schimbarea $x = \sin t$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

În acest caz φ este funcţia sinus şi, cum se ştie, sinusul este o bijecţie derivabilă a intervalului $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ în intervalul $(0, 1)$.

Obţinem

$$\int \sqrt{1 - \sin^2 t}\, \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} = G(t)$$

şi prin urmare o primitivă a lui f pe $(0, 1)$ este

$$F(x) = G(\arcsin x) = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2}$$

(II) Metoda de integrare prin părţi.

Dacă $u, v : (a, b) \to R$ sînt funcţii derivabile pe intervalul (a, b) atunci $\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx$, Mai scurt $\int udv = u\, v - \int v\, du$ — formula de integrare prin părţi.

Exemplu. Să calculm $\int xe^x dx$

Punînd $u(x) = x$ $v'(x) = e^x$ avem $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$ şi deci

$$\int x\, e^x dx = xe^x - \int e^x dx = x\, e^x - e^x$$

Alte metode privesc cazuri particulare şi dintre acestea înserăm:

(III) Calculul primitivelor funcţiilor raţionale

Fie (a, b) un interval în care polinomul $Q(x)$ nu are nici o rădăcină reală. Fie funcţia raţională f, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Dacă $x_1, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile reale ale polinomului $Q(x)$ de ordine de multiplicitate $p_1, \ldots, p_n$ iar

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1)^{r_1}, (a_2x^2 + b_2x + c_2)^{r_2}, \ldots, (a_mx^2 + b_mx + c_m)^{r_m}$$

sînt ceilalţi factori ai descompunerii lui $Q(x)$ atunci f se poate descompune în fracţii simple

$$f(x) = C(x) + \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1p_1}}{(x - x_1)^{p_1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{A_{n1}}{x - x_n} + \frac{A_{n2}}{(x - x_n)^2} + \ldots + \frac{A_{np_n}}{(x - x_n)^{p_n}} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{a_1 x^2 + b_1x + c_1} +$$

$$+ \frac{B_{12}x + C_{12}}{(a_1x^2 + b_1x + C_1)^2} + \ldots + \frac{B_{1r_1}x + C_{1r_1}}{(a_1x^2 + b_1x + C_1)^{r_1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_{m1}x + C_{m1}}{a_mx^2 + b_mx + C_m} + \ldots + \frac{B_{mr_m}x + C_{mr_m}}{(a_mx^2 + b_mx + C_m)^{r_m}},$$ unde $C(x)$ este

dat de împărţirea $P(x) = C(x)\cdot Q(x) + R(x)$

şi problema integrării unei funcţii raţionale s-a redus la calculul integralelor funcţiilor de forma $\dfrac{A}{(x - a)^n}$, $\dfrac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^n}$.

$$\int \frac{Adx}{(x - a)^n} = \begin{cases} A\, ln|x - a| + C & \text{dacă } n = 1 \\ \dfrac{A}{(n - 1)(x - a)^{n-1}} + C & \text{dacă } n \geq 2 \end{cases}$$

C fiind o constantă arbitrară, formula fiind valabilă pe orice interval care nu conţine pe a.

Pentru calculul integralelor $\int \frac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^m} dx$ se folosește obținerea unor formule de recurență ; de reținut

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{ arc tg } \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{xdx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C$$

formule ce intervin frecvent în calculul integralelor de forma menționată mai sus.

(IV) Calculul integralelor funcțiilor trigonometrice.

Dacă f este o funcție rațională de sin și cos adică $f(x) = R$. $(\sin x, \cos x)$ unde $R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$ cu P și Q polinoame de două variabile, atunci prin schimbarea de variabilă $\text{tg} \frac{x}{2} = t$ se reduce calculul integralei $\int f(x)dx$ la calculul integralei unei funcții raționale în variabila t.

Dacă $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ acest serviciu îl face schimbarea $\text{tg}x = t$.

Sînt de reținut formulele

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

(V) Calculul integralelor funcțiilor iraționale

$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+a}}\right) dx$ se reduce la calculul unei integrale raționale prin schimbarea $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$

$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$ se reduce la calculul unei integrale raționale astfel :

1) dacă $a > 0$, se face schimbarea $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\, x + t$
2) dacă trinomul $ax^2 + bx + c$ are rădăcini reale, α și β atunci pe orice interval care nu are rădăcina se face schimbarea $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$

Să reţinem formula

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = ln(x + \sqrt{x^2 + a}\,) + C$$

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE

Să se calculeze

1. $\int \left(x^3 + 2x^2 + \frac{1}{x}\right) dx$

2. $\int x \sqrt{1 + x^2}\, dx$

3. $\int x^2 \sqrt{2 + x^3}\, dx$

4. $\int x^n ln\, x\, dx$

5. $\int x\, e^x\, dx$

6. $\int x \sin 2x\, dx$

7. $\int e^{ax} \sin bx\, dx$

8. $\int e^{ax} \cos bx\, dx$

9. $\int \sin px \sin q\, x\, dx$

10. $\int \sin px \cos q\, x\, dx$

11. $\int \cos px \cos q\, x\, dx$

12. $\int \sin^{2n+1} x\, dx$

13. $\int \cos^{2n+1} x\, dx$

14. $\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$

15. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^4}}$

16. $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x\, dx$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2}}$

18. $\int \frac{\cos\, dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$

19. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

20. $\int \frac{x\, dx}{x^4 + x^2 + 1}$

21. $\int \frac{x^2\, dx}{x^4 + x^2 + 1}$

22. $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$

23. $\int \frac{dx}{(x + 1)^2 (x^2 + 1)^2}$

24. $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 3)^2 (x + 2)}$

25. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x - 1}} dx$

26. $\int x \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}\, dx$

27. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

28. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$

29. $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}$

30. $\int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x}$

31. $\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$

32. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$

33. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x}$

34. $\int x^2 \cos 3x \, dx$

35. $\int x\sqrt{x^2 - x + 1} \, dx$

36. $\int \frac{dx}{(x-1)^2 (x^2+1)}$

37. $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$

38. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 - x^3}}$

39. $\int \frac{e^x \, dx}{\sqrt{1 + x^e}}$

40. $\int \frac{(x-1)dx}{(x^2 - 2x + 3)^2}$

41. $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}$

42. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

43. $\int \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

44. $\int \arcsin x \, dx$

45. $\int \frac{dx}{x^6 - 1}$

46. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

47. $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

48. $\int \frac{x^2 \, dx}{x^4 + x^2 - 2}$

49. $\int \frac{x \ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$

50. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$

Să se găsească formule de recurență pentru calculul integralelor.

51. $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$

52. $\int \sin^{2n} x \, dx$

Folosind definiția integralei Riemann să se calculeze

53. $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{3}{3n + 3k + 1}$

54. $\lim\limits_{n} \frac{\sqrt{n}}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\sqrt{2n - k}}$

55. $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k=1}^{2^n-1} \frac{2^{n+2}}{2^{2n+2} + (2k+1)^2}$

56. $\lim\limits_{n} \sum\limits_{1}^{n} \frac{n}{(n+k)\sqrt{n^2+k^2}}$

57. $\lim\limits_{n} n^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(n^2+k^2)(\sqrt{n^2+k^2}+n)}$

58. $\lim\limits_{n} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{n}$

59. $\lim\limits_{n} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}$

60. $\lim\limits_{n} n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{3n^2+k^2}$

Fie $f: [0, 1] \to R$ o funcție integrabilă. Să se calculeze

61. $\lim\limits_{n} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n} + \frac{k}{n^2}\right)$

62. $\lim\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \sum\limits_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{kn-k+1}{n^2}\right)$

Folosind exercițiile 61 și 62 să se calculeze

63. $\lim\limits_{n} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k(n+1)-n}$

64. $\lim\limits_{n} \frac{1}{n}\left[\ln (n-1)^n - 2\ln n^n + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln (k+n)\right]$

65. $\lim\limits_{n} \frac{n-1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n+1} \sin \frac{(kn-k+1)\pi}{2n^2}$

Să se calculeze ariile domeniilor plane mărginite de curbeie de ecuaţii

66. $y = x^2, \ y = \sqrt{x}$

67. $x = x^3, \ y = x$

68. $y = x(1 + e^{-x}), \ y = x, \ x = 1$

69. $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 9}, \ y = 0, \ x = -1, \ x = 2$

70. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}, \ x = \dfrac{x^2}{2}$

71. $x^2 - 2x + y^2 = 0, \ y^2 \geqslant ax$

72. $y_2 = 2 - x^2, \ y^3 = x^2$

73. $x^2 + x^2 = a^2$

Să se calculeze volumele corpurilor care iau naştere prin rotirea domeniilor mărginite de curbele de mai jos în jurul axei x.

74. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ elipsă

75. $x^2 + y^2 - 2ay + 3a^2 = 0$

76. $y = x^2, \ y = \dfrac{2}{1 + x^2}$

77. $y = \sin x, \ y = x \cos x, \ k = \dfrac{\pi}{4}, \ x = \pi$

78. $y = x - 1. \ y = \ln x, \ x = e$

79. $y = -\sqrt{2ax - x^2}, \ x + y - a = 0, \ x = a.$

80. Fie $f : (0, \infty) \to R$ o funcţie continuă. Definim

$F : (0, \infty) \to R$ prin $F(t) = \int\limits_t^{2t} f(x) \mathrm{d}x$

a) Să se arate că F este continuă

b) Să se arate că F este derivabilă şi să se calculeze $F'(t)$.

c) Să se găsească funcţiile f pentru care $F'(t_0) = 0$ pentru un anumit $t_0 \in (0, \infty)$

d) Să se găsească funcţiile f pentru care $F'(t_0) = f(t_0)$ pentru un anumit $t_0 \in (0, \infty)$.

81. Se consideră $f : [0, \infty) \to R$ continuă.

a) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei $F : [0, \infty) \to R$ definită prin

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\, dt$$

b) Să se determine funcţiile f pentru care

82. Se consideră funcţia $f : [1, \infty) \to R$ dată de

$$f(x) = \int_0^1 e^{-} t^{x-1}\, dt$$

a) Să se afle că f este pozitivă şi descrescătoare pe domeniul său de definiţie. b) Să se stabilească relaţia

$$f(x+1) = x f(x) - \frac{1}{e};$$

c) Să se arate că, pentru orice $n \in N$ are loc

$$f(n+1) = n! - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n} A_n^k$$

d) Folosind cele stabilite anterior să se arate că şirul cu termen general

$$a_n = n! - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n} A_n^k$$

este convergent

(Dan Radu)

PROBLEME DE CONCURS

1. Fie şirul $\{x_n\}_{n\in N}$ cu $x_n > 0$ astfel ca

$$x_{n+1} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{x^2} \text{ pentru orice } n \text{ natural}$$

a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in N}$ definit prin

$$a_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},\ n \in N \text{ este monoton}$$

b) Să se arate că $(x_n)_{n\in N}$ converge către 0

(Concurs mat. 1975).

2. Să se studieze convergenţa şirului $(a_n)_{n\in N}$ definit prin

$$a_n = \frac{\sin 1}{x^2+1} + \ldots + \frac{\sin n}{n^2+n}$$

(Concurs de mat. 1975)

3. Se dă şirul (x_n) prin

$$x_1 = a,\ a > 2,\ x_n = \sqrt{\frac{x_{n-1}}{2} + 3}$$

a) Să se arate că şirul dat este monoton şi mărginit b) Să se calculeze $\lim\limits_{n} x_n$

(Concurs mat., 1973, Ana Ursu).

4. Se dau şirurile $(a_n)_{n\in N}$ $(b_n)_{n\in N}$, definite astfel

$$a_n = \frac{3a_{n-1} + b_{n-1}}{4},\quad b_n = \frac{2a_{n-1} + 3b_{n-1}}{5}$$

pentru $n \geqslant 1$, unde $a_0 < b_a$. Să se studieze monotonia şi convergenţa acestor şiruri.

(Concurs mat. 1975).

5. Fie $a_k = \ln\sqrt{\frac{(k+1)(k+3)}{k(k+4)}}$ şi $b_n = \sum\limits_{k-1}^{n} a_k$

Să se arate că $(b_n)_{n\in N}$ este un şir convergent şi să se afle $\lim\limits_{n} b_n$.

(Concurs mat., 1975).

6. b) Se consideră şirul $(x_n)_{n\in N}$ cu $x_1 = a \in R$ şi

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{2} - 1}{x - x_n\sqrt{(2-1)}}\quad \text{pentru } n \geqslant 1$$

Să se arate că şirul este periodic. Care este perioada?

(Concurs mat., probă de baraj, 1972).

7. Se consideră şirul cu termenul general

$$a_n = \frac{(n+3)^2 + 3}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

a) Să se arate că a_n se poate scrie sub forma

$a_n = f(n) - f(n+1)$ unde f are forma

$$f(n) = \frac{nA + B}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{2^n}$$

A şi B fiind constante ce se vor determina

b) Să se arate că şirul cu termenul general $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ este convergent şi să se determine $\lim_n b_n$

c) Să se calculeze $\lim_n b_n^{2n}$

8. Fie (a_n) $n \in N$ şirul dat prin

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9k^2 - 3k - 2}$$

a) Să se studieze monotonia şirului
b) Să se arate că şirul este convergent şi să se găsească $\lim_n a_n$

(Concurs, Mat., 1972).

9. Se dă şirul de numere reale $(a_n)_{n \in N}$ prin

$$a_n = \frac{\alpha^n}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)\ldots(1+\alpha^n)}, \ \alpha > 0$$

Să se calculeze $\lim_n a_n$

(Fac. Mat.-Mec., Bucureşti, 1972).

10. Fie $(x_n)_{n \in N}$ un şir de numere reale astfel încît $x_{n+1} = x_n + \frac{(-1)^n}{2^n}$. Este acest şir monoton? Dar convergent?

11. Fie $(x_n)_{n \in N}$ un şir de numere reale cu proprietăţile

(I) $(x_{n+1} - x_n)(x_n - x_{n-1}) < 0 \qquad n = 2, 3, \ldots$

(II) $x_{n+1} - x_n \to 0$

Este $(x_n)_{n \in N}$ un şir convergent?

12. Fie r un număr raţional şi $x_n = \cos(2\pi\, n!\, r)$, $n \geqslant 1$. Este şirul $(x_n)_{n \in N}$ convergent?

13. Se notează cu sgn funcţia definită prin

$$\sin x = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x > 0 \\ 0 \text{ dacă } x = 0 \\ -1 \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$$

Să se arate că funcţia $f; R \to R$ definită prin $f(x)=(1+x^2)\times$ $\times \sin x$ este inversabilă şi că inversa ei este o funcţie continuă

(Admitere Inst. Politehnic, Bucureşti, 1973).

14. Fie $f; R \to R$ o funcţie continuă astfel ca $f\left(x+\frac{1}{n}\right)=f(x)$ pentru orice $x \in R$ şi orice $n \in N$. Să se arate că f este constantă. Să se arate că condiţia de continuitate este esenţială.

15. Să se studieze continuitatea funcţiei

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

Şi să se cerceteze dacă există $f'(0)$.

(Admitere, Inst. Politehnic, Bucureşti, 1973)

16. Dîndu-se funcţia $f: R \to R$ definită prin

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - ax + b}}$$

a) să se determine a astfel încît

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - ax + b}\,[f(x) - 1] = \frac{1}{2}$$

şi apoi să se determine b astfel ca f să admită un extrem de valoare $\frac{2}{\sqrt{3}}$, considerînd pe a determinat mai sus.

b) Cu a şi b determinaţi să se reprezinte graficul funcţiei.

c) Să se calculeze aria mărginită de axa Ox şi de dreptele $x = 1$,, $x = 2$ şi arcul curbei $g = \frac{1}{f^2(x)}$ cu a şi b determinaţi anterior.

(Admitere, Inst. Politehnic, Timişoara, 1973).

17. Fie $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie continuă. Se consideră funcţia $\varphi: [0, \infty) \to (0, \infty)$ dată de relaţia

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x tf(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$$

a) Să se arate că pentru orice $x > 0$ are loc inegalitatea
$$\varphi(x) \leqslant x.$$
b) Să se demonstreze că φ este derivabilă și să se calculeze derivata ei.

c) Folosind rezultatele anterioare, să se arate că φ este o funcție crescătoare.

(Concurs mat., 1973, Dan Radu).

18. Se dă funcția f definită astfel

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 1 - \cos x & \text{pentru } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

Se cere să se studieze această funcție cu privire la monotonie, injectivitate, surjectivitate, continuitate, derivabilitate.

(Admitere Fac. Mat.-Mec., Timișoara, 1973)

19. Se dă funcția

$$f(x) = \frac{\sqrt{ax^4 + 1}}{bx + c}$$

unde $a > 0$, b, c sînt parametrii reali. Să se determine a, b, c astfel încît funcția f să admită un extrem pentru $x = 1$ și asimptota $y = x - \frac{3}{2}$

(Admitere în Facultatea de electrotehnică, Craiova, 1972)

20. Fie funcția

$$f(x) = (kx + \sqrt{1 + k^2x^2})^{\frac{1}{k}}, \quad k > 0$$

a) Să se arate că f verifică relațiile

$$\sqrt{1 + k^2x^2} f'(x) - f(x) = 0 \quad (1)$$

$$(1 + k^2x^2) f''(x) + k^2xf'(x) - f(x) = 0 \quad (2)$$

b) Să se verifice dacă relațiile (1) și (2) sînt valabile și în cazul cînd k tinde către zero

21. Funcţia $f:[a, b] \to R$ se numeşte convexă pe $[a, b]$ dacă pentru orice $t \in [0, 1]$ $f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b)$.
a) Să se arate că dacă f este de două ori derivabilă pe (a, b) cu derivabile f', f'' continuie atunci f este convexă dacă şi numai dacă $f''(x) \geqslant 0$. pentru $x \in (a, b)$.
b) Dacă funcţia f verifică condiţiile
(I) $f(x) > 0$ pentru orice x real
(II) $f''(x) \leqslant 0$ pentru orice x real
atunci f este constantă pe R.
c) Rămîne concluzia de la punctul b) adevărată, pentru funcţii definite pe $(0, \infty)$ verificînd pe această mulţime condiţiile (I), (II)?

(Concurs mat., 1974).

22. Se consideră funcţia reală f definită pe toată dreapta reală prin

$$f(x) = x(1 + e^{-x})$$

a) Să se studieze variaţia funcţiei f şi să se reprezinte grafic.
b) Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de graficul funcţiei f, dreapta $y = x$ şi dreapta $x = 1$
c) Să se calculeze limita şirului al cărui termen general este

$$a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt[n]{e^k}}$$

(Concurs, Mat., 1972).

23. „Teoremă": Fie $f:(0, \infty) \to R$ o funcţie derivabilă cu derivata întîia continuă. Dacă $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ atunci $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
Demonstraţie. Aplicăm teorema lui Lagrange pe $[x, x+1]$; există $\xi(x, x+1)$ astfel ca

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x}$$

deci $f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$; trecînd la limită $\lim_{x\to\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$. Cînd $x \to \infty$ şi $\xi \to \infty$ şi din continuitatea lui

f' rezultă $\lim_{u \to \infty} f'(x) = 0$

a) Studiați funcția $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$ pentru $x > 0$ și arătați că „teorema" este falsă.

b) Găsiți greșeala din demonstrație.

c) Adăugînd condiția că $f(x)$ este de două ori derivabilă și că $f''(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, să se arate că concluzia este adevărată.

(Concurs, Mat., 1973).

24. Dacă A, B, C sînt numere reale așa încît $At^2 + 2\,Bt + C \geqslant 0$ pentru orice t real atunci $B^2 \leqslant AC$. Considerînd expresia $[t \cdot f(x) + g(x)]^2$ să se arate că

$$\left[\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\, dx \cdot \int_a^b g^2(x)\, dx$$

pentru orice funcții continue f, g definite pe $[a, b]$.
Să se obțină inegalitatea

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}}(x)\, dx \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

(Admitere la Colegiile din Cambridge, Anglia).

25. Fie $f : (0, \infty) \to R$ o funcție continuă descrescătoare și m, n întregi pozitivă, $m < n$
Să se arate că

$$\int_m^{n+1} f(x)dx \leqslant \sum_{n=m}^{n} f(r) \leqslant \int_{m-1}^{n} f(x)\, dx.$$

și apoi să se arate că

$$1{,}19 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < 1{,}22$$

(Admitere la Colegiile Cambridge, Anglia).

26. Să se calculeze

a) $\lim\limits_{\infty\to 0} \int_0^{\alpha} e^{-x^2}\, dx$; b) $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \int_0^{\alpha} e^{-x}\, x dx$

c) $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \int_0^{\alpha} e^{-x^3}\, x^2 dx$ d) $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \int_0^{\alpha} e^{-x}\, x^2 dx$

e) $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \int_0^{\alpha} e^{-x^3}\, x^5 dx$

(Admitere Fac. Mat-Mec., oral, Buc., 1973).

27. Se consideră funcţia $f(x) = \dfrac{x(1 - x^2)}{1 + x^2}$, $x \in R$

a) Să se studieze variaţia şi să se trateze graficul acestei funcţii.
b) Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei.

$$f(x) + \frac{\lambda\, x^2}{1 + x^2} - \lambda = 0$$

λ fiind un parametru real
c) Să se verifice pe cale trigonometrică inegalitatea

$$-\frac{1}{4} \leqslant \frac{f(x)}{1 + x^2} \leqslant \frac{1}{4} \quad \text{pentru orice } x \text{ real}$$

28. Se consideră funcţia

$$f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x^2 + \lambda^2}, \quad x \in R$$

unde λ este un parametru real nenul.
a) Să se studieze monotonia funcţiei f, precizînd valorile lui λ pentru care ea este strict crescătoare.
b) Să se arate că pentru $\lambda \geqslant 1$ are loc inegalitatea

$$e^{\lambda x} > 1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2$$

oricare ar fi $x > 0$

c) dacă x_1 şi x_2 sînt rădăcinile reale ale derivatei să se calculeze

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1 + x_1 x_2}{1 - x_1 x_2}\right)^{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$$

d) pentru ce valori ale parametrilor λ și μ ecuația

$$\mu\left(x^3 + \frac{2 + 3\sqrt{3}}{4}x + 1\right) f(x) = e^{\lambda x}$$

are ca rădăcini sinusurile unghiurilor unui triunghi dreptunghic

e) Să se calculeze $\int (x^2 + \lambda^2) \sin x\, f(x)\, dx$

(Admitere, Fac. Mat., Iași, 1971).

29. Se dă funcția

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2+1}{2} & \text{pentru } t < -1 \\ t & \text{pentru } t \in [-1, 1] \\ \dfrac{t^2+1}{2} & \text{pentru } t > 1 \end{cases}$$

a) Să se arate că f are derivată continuă

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(e^{-x})}{f(e^x)}\, dx$

(Admitere Fac. Mat., Craiova, 1971).

30. Fie f o funcție definită pe $[0, 1]$, cu valori reale, crescătoare. Se presupune că pentru orice x_1, x_2, x_3 cu $0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$ avem

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

a) Să se arate că f este continuă pe $(0, 1)$

b) Se consideră funcția f exprimată prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{pentru } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{pentru } x = 1 \end{cases}$$

Să se arate că f are toate proprietățile cerute și nu este continuă în punctul $x = 1$.

(Concurs Mat., 1971, Dan Voiculescu).

31. Fie $f: R \to R$ o funcţie neconstantă şi astfel ca $f(x + rT) = f(x)$ oricare ar fi x şi r raţional ($T > 0$, dat).
Să se arate că f este discontinuă în orice punct.

(Concurs Mat., 1975, L. Panaitopol)

32. Fie f funcţia reală definită pe R prin

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{pentru } x \text{ raţional} \\ 0 & \text{pentru } x \text{ iraţional} \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.

(Concurs mat. 1972, G. Gussi)

33. Fie f o funcţie reală continuă pe $[a, b]$, $a < b$.
Să se arate că
a) dacă $f(x) > 0$ pentru orice $x \in [a, b]$ atunci

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

b) dacă $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in [a, b]$ şi $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ atunci f este identic nulă

(Concurs mat. 1973, D. Radu)

34. Să se arate că şirul $(a_n)_{n \in N}$ unde

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k - 1}{\sqrt{(2k - 1)^2 + (2n)^2}}$$

este convergent şi să se afle $\lim_n a_n$

(Concurs mat., 1973, St. Musta).

35. Fie $f: R \to R$, f neconstantă şi $f(x + T) = f(x)$ oricare ar fi x real şi oricare ar fi raţional (T dat). Să se arate că f este discontinuă în fiecare punct.

36. a) Fie $f: R \to R$ o funcţie derivabilă pe R şi periodică. Atunci f' este periodică şi funcţiile f şi f' au aceeaşi perioadă principală.
b) Dacă f' este periodică rezultă că f este periodică?

(Concurs mat., 1975).

37. Fie f funcţia definită pe $[0, 1]$ cu valori reale astfel

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2^n} \text{ dacă } x \text{ se poate scrie } x=\frac{1}{n} \text{ cu } n\in N \\ 0 \text{ dacă } x\in[0,\ 1] \text{ și } x\neq\frac{1}{n} \text{ pentru orice } n\in N \end{cases}$$

Să se arate că f este integrabilă pe $[0, 1]$ și să se calculeze

$$\int_0^1 f(t)\ dt.$$

(Concurs mat., 1975, Dan Schwartz).

38. a) Fie $g: I\to R$ o funcție continuă pe intervalul I. Să se demonstreze că dacă funcția $f: I\to R$ este derivabilă și satisface relația $f'(x)=f(x)\ g(x)$ pentru orice x din I, atunci dacă f se anulează într-un punct, este identic nulă.

b) Să se arate că în condițiile punctului a) există o singură funcție f care satisface condiția $f(x_0)=y_0$ unde $x_0\in I$, $y_0\in R$ sînt date.

(Concurs mat., 1973, Pal Dalyay).

Partea a doua — SOLUŢII

Capitolul V

ALGEBRĂ

IDENTITĂŢI ALGEBRICE

8. Membrul stîng se transformă succesiv

$$\frac{(a^2-b^2)(a^3+b^3)+(b^2-c^2)(b^3+c^3)+(c^2-a^2)(c^3+a^3)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$$

$$=\frac{-a^2b^2-c^3(b-a)+c^2(a^2+ab+b^2)}{(b-c)(c-a)}=\frac{-a^2(b+c)+ac^2+bc^2}{c-a}=$$

$$=ac+bc+ab.$$

9. Notînd $(a-b)=u$, $b-c=v$, $c-d=w$, $d-a=t$, observăm imediat că $u+v+w+t=0$.
Prin ridicare la pătrat obţinem
$u^2+v^2+w^2+t^2=-2(uv+uw+ut+vw+vt+wt)$ şi apoi
(a) $u^2-v^2-w^2-t^2=2(vw+vt+wt)$
Analog avem
(a)′ $v^2-u^2-w^2-t^2=2(uw+ut+wt)$
$w^2-u^2-v^2-t^2=2(uv+ut+vt)$
$t^2-u^2-v^2-w^2=2(uv+uw+vw)$
Expresia dată în membrul stîng al identităţii se scrie cu ajutorul variabilelor u, v, w, t
$E=u^4+v^4+w^4+t^4-2(u^2v^2+u^2w^2+u^2t^2+v^2w^2+v^2t^2+w^2t^2)+8uvwt=u^2(u^2-v^2-w^2-t^2)+v^2(v^2-u^2-w^2-t^2)+w^2(w^2-u^2-v^2-t^2)+t^2(t^2-u^2-v^2-w^2)+8uvwt.$
Ţinînd acum seama de (a) şi (a)′ expresia E devine
$E=2[u^2(vw+vt+wt)+v^2(uw+ut+wt)+w^2(uv+$

$+ ut + vt) + t^2(uv + uw + vw) + 4uvw] = 2[uv(w+t)^2 +$
$+ wt(u + v)^2 + wt(w + t)(u + v) + uv(u + v)(w + t)] =$
$= 2(u + v + w + t)[uv(w + t) + wt(u + v)] = 0$

10. Identitatea dată este echivalentă cu
$(1 + 2a)^3 + (1 + 2b)^3 + 24(1 - a)(1 - b) = 27 - (1 -$
$- 2a - 2b)^3$
Descompunînd în membrul stîng suma de cuburi se calculează ușor că acest membru este egal cu
(a) $2(1 + a + b)(13 - 10a - 10b + 8ab + 4a^2 + 4b^2)$.
Efectuînd calculele și în membrul drept prin descompunerea diferenței de cuburi se obține aceeași expresie (a) ceea ce demonstrează identitatea.

11. Dacă $x \in N, \left[x + \frac{k}{n}\right] = x$ pentru $\forall\, k < n$ și atît membrul stîng al identității cît și cel drept vor fi egali cu nx.

Fie $x = [x] + \alpha$ cu $\frac{p}{n} \leqslant \alpha < \frac{p+1}{n}$ unde p are una din valorile $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Atunci $\frac{p+k}{n} \leqslant \alpha + \frac{k}{n} \leqslant \frac{p+k+1}{n}$ și $\sum_{k=0}^{n-1}\left[x + \frac{k}{n}\right] =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left[[x] + \alpha + \frac{k}{n}\right] = n[x] + \sum_{k=0}^{n-1}\left[\alpha + \frac{k}{n}\right] = n[x] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{p-p-1}\left[\alpha + \frac{k}{n}\right] + \sum_{k=n-p}^{n-1}\left[\alpha + \frac{k}{n}\right] = n[\alpha] + p$$

$$\text{căci} \sum_{k=0}^{n-p-1}\left[\alpha + \frac{k}{n}\right] = 0 \text{ și } \sum_{k=n-p}^{n-1}\left[\alpha + \frac{k}{n}\right] = p$$

Pe de altă parte

$nx = n[x] + n\alpha$ iar $p \leqslant n\alpha < p + 1$ și deci
$[nx] = [n[x] + n\alpha] = n[x] + [n\alpha] = n[x] + p$, ceea ce demonstrează complet identitatea propusă.

12. Primul membru se transformă succesiv
$a^4 + b^4 + 4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2$

13. Membrul drept al identităţii se transformă succesiv

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} a_i b_i a_j b_j + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} a_i^2 b_j^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} a_j^2 b_i^2 -$$

$$-2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<i}}^{n} a_i b_j a_j b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} a_i^2 b_j^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_i^2\right)$$

ceea ce demonstrează identitatea.

14. Ridicînd relaţia de condiţie la patrat obţinem
$(*) a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc)$
Ridicînd din nou la patrat relaţia $(*)$ obţinem
$a^4 + b^4 + c^4 = -2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 4(a^2b^2 + a^2c^2 +$
$+ b^2c^2 + a^2bc + ab^2c + abc^2) = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) +$
$+ 4abc(a + b + c)$
ceea ce ţinînd seama de condiţia $a + b + c = 0$, demonstrează identitatea propusă.

15. Ţinînd seama de condiţia identităţii şi de consecinţele ei din problema (6) şi de relaţia $(*)$ din problema precedentă avem următoarele egalităţi:
$(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2) = a^5 + b^5 + c^5 + a^2b^2(a + b)$
$+ a^2c^2(a + c) + b^2c^2(b + c) = a^5 + b^5 + c^5 - a^2b^2c -$
$- a^2c^2b - b^2c^2a = a^5 + b^5 + c^4 - abc(ab + ac +$

$$+ bc) = a^5 + b^5 + c^5 + \frac{abc}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

De aici obţinem

$$(*)\ a^5 + b^5 + c^5 = (a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{abc}{2}(a^2 +$$

$$+ b^2 + c^2) = \left(3abc - \frac{abc}{2}\right)(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{5abc}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

de unde rezultă imediat identitatea cerută.

16. Pornind de la relaţia $(*)$ din problema precedentă şi ţinînd seama de problema (6) obţinem succesiv

$$a^5 + b^5 + c^5 = (a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{6}(a^3 + b^3 +$$

$$+ c^3)(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{5}{6}(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2),$$ de unde

rezultă imediat identitatea cerută.

17. Folosind condiția problemei putem obține succesiv:
$(a^3 + b^3 + c^3)(a^4 + b^4 + c^4) = a^7 + b^7 + c^7 + a^3b^3(a + b) +$
$+ a^3c^3(a + c) + b^3c^3(b + c) = a^7 + b^7 + c^7 - abc.$
$(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$
De aici ținînd seama de identitate din problemele (14) și (16) se obține

$a^7 + b^7 + c^7 = (a^3 + b^3 + c^3)(a^4 + b^4 + c^4) + abc(a^2b^2 +$
$+ a^2c^2 + b^2c^2) = \frac{7}{6}(a^3 + b^3 + c^3)(a^4 + b^4 + c^4)$, de unde rezultă imediat identitatea cerută.

18. Făcînd în identitatea lui Lagrange (13), $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$ obținem:

$n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (a_i - b_i)^2$ și ținînd seama de condiția problemei rezultă

$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (a_i - b_j)^2 = 0$, de unde $a_i = b_j \ \forall i, j \in N$.

19. Notînd cu e_1, e_2, e_3, e_4, membrii din stînga ai egalităților date se observă că

$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$

și în virtutea condițiilor problemei avem

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 0$ sau $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, de unde rezultatul cerut.

20. Trebuie să observăm mai întîi necesitatea ca $a, b > 0$ căci astfel membrul drept din concluzie n-ar avea sens. În aceste condiții $a + b \neq 0$ și putem simplifica condiția dată care devine

$$a^2 - ab + b^2 = 13ab.$$

Adunînd în ambii membri $3ab$ obținem

$(a + b)^2 = 16ab$ sau

$\left(\frac{a+b}{4}\right)^2 = ab$ de unde prin logaritmare în bază $\alpha \neq 1$ se obține concluzia cerută.

21. Cu notațiile problemei și cu regulile de înmulțire ale simbolului imaginar i ($i^2 = -1$) avem

$$|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \qquad |z_2| = \sqrt{x_2^2 = y_2^2},$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{(x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_2y_1 - x_1y_2)^2}}{x_2^2 + y_2^2}$$

Cu acestea, egalitatea de demonstrat devine

(a) $(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2$

(b) $(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = (x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_2y_1 - x_1y_2)^2$

care se verifică ușor (Egalitatea (a) este o consecință imediată a identității lui Lagrange pentru $n = 2$).

22. Expresia E_1 se transformă identic în modul următor $E_1 = (y + z)[(x + y + z)^2 + x(x + y + z) + x^2] - (y + z)[y^2 - yz + z^2] = (y + z)[(x + z)(x + 2y + z) + (x + z)(x - z) + (x + z)(x + y)] = (y + z)(x + z)$ $(x + 2y + z + x - z + x + y) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$.
Pentru calculul lui E_2 notăm $b - c = x$, $c - a = y$, $a - b = z$ și observăm că $x + y + z = 0$. Atunci ținînd seama de problema (6) avem
$E_2 = x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz = 3(a - b)(b - c)(c - a)$

23. Pentru calculul expresiei E_1, notăm $x + y - z = a$, $y + z - x = b$, $z + x - y = c$ și observăm că $x + y + z = a + b + c$. Cu aceasta
$E_1 = (a + b + c) - a^2 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a) = 3(2y)(2z)(2x) = 24xyz$. (Am folosit rezultatul obținut la calculul lui E_1 din problema precedentă).
Pentru calculul lui E_2 avem

$$E_2 = \frac{(x^2 - yz)(y + z) + (y^2 - xz)(x + z) + (z^2 - xy)(x + y)}{(x + y)(y + z)(z + x)} =$$

$$= \frac{x^2(x+z) + y^2(x + z) + z^2(x + y) - yz(y + z) - xz(x + z) - xy(x+y)}{(x + y)(y + z)(z + x)} = 0$$

24. Utilizînd în mod succesiv condițiile date putem calcula $0 = (x + y + z)(x\xi + y\eta + z\zeta) = \xi x^2 + \eta y^2 + \zeta z^2 + xy(\xi + \eta) + yz(\eta + \zeta) + zx(\zeta + \xi) = \xi x^2 + \eta y^2 + \zeta z^2 - xy\zeta - yz\xi - zx\eta = \xi x^2 + \eta y^2 + \zeta z^2 - xyz\left(\frac{\zeta}{z} + \right.$

$$\left. + \frac{\xi}{x} + \frac{\eta}{y}\right) = \xi x^2 + \eta y^2 + \zeta z^2.$$

25. Înmulțind relațiile de condiție cu $x_1x_2x_3$ obținem

$$\frac{(a_2x_3 + a_3x_2)x_2x_3}{-a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3} = \frac{(a_3x_1 + a_1x_3)x_1x_3}{a_1x_1 - a_2x_2 + a_3x_3} = \frac{(a_1x_2 + a_2x_1)x_1x_2}{a_1x_1 - a_2x_2 + a_3x_3}$$

de unde aplicînd proprietatea șirului de rapoarte egale

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x + y}{a + b} = \frac{x + z}{a + c} = \frac{y + z}{b + c}, \text{ obținem :}$$

$$\frac{x_3(a_1x_1 + a_2x_2) + a_3(x_1^2 + x_2^2)}{a_3} = \frac{x_2(a_1x_1 + a_3x_3) + a_2(x_1^2 + x_3^2)}{a_2} =$$

$$= \frac{x_1(a_2x_2 + a_3x_3) + a_1(x_2^2 + x_3^2)}{a_1}$$

Scăzînd din fiecare raport cantitatea $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ obținem

$$\frac{x_1(-a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)}{a_1} = \frac{x_2(a_1x_1 - a_2x_2 + a_3x_3)}{a_2} =$$

$$= \frac{x_3(a_1x_1 + a_2x_2 - a_3x_3)}{a_3}$$

Înmulțind această relație membru cu membru cu condiția dată obținem

$$\frac{a_2x_3 + a_3x_2}{a_1} = \frac{a_3x_1 + a_1x_3}{a_2} = \frac{a_1x_2 + a_2x_1}{a_3} = x$$

Apoi rezolvînd în raport cu x_1, x_2, x_3 sistemul

$$a_3x_2 + a_2x_3 = a_1x$$
$$a_3x_1 + a_1x_3 = a_2x$$
$$a_2x_1 + a_1x_2 = a_3x$$

găsim că

$$\frac{x}{2a_1a_2a_3} = \frac{x_1}{a_1(-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} = \frac{x_2}{a_2(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)} = \frac{x_3}{a_3(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)}$$

adică identitatea cerută.

26. Relația de condiție, după transformări simple se poate pune sub forma $(a_1 + a_2 + a_3)(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1) - a_1a_2a_3 = 0$ sau (x) $(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_1) = 0$ cu care se poate arăta că este echivalentă.
Relația de demonstrat, se arată în mod analog că este echivalentă cu

$$(\text{xx}) \qquad (a_1^n + a_2^n)(a_2^n + a_3^n)(a_3^n + a_1^n) = 0$$

De aici, implicația de demonstrat rezultă imediat căci dacă relația (x) este satisfăcută atunci fie $a_1 + a_2 = 0$ ceea ce implică $a_1^n + a_2^n = 0$ (n impar) și deci relația (xx) e satisfăcută fie $a_2 + a_3 = 0$ și deci $a_2^n + a_3^n = 0$, adică (xx) e satisfăcut, fie în sfîrșit $a_3 + a_1 = 0$ și deci $a_3^n + a_1^n = 0$ ceea ce trebuia să demonstrăm.

27. Problema dată se poate formula în modul următor:
Dacă (x) $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = (a_1 + a_2)(a_1 + a_3)(a_2 + a_3)$ și $x_1 = \lambda e_1^{-1}$, $x_2 = \lambda e_2^{-1}$, $x_3 = \lambda e_3^{-1}$ unde $e_1 = -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, $e_2 = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2$, $e_3 = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2$, iar λ arbitrar, atunci
(xx) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)$, sau

$$(\text{xxx}) \qquad \frac{1}{e_1^3} + \frac{1}{e_2^3} + \frac{1}{e_3^3} = \left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_1}\right)\left(\frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3}\right)\left(\frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_1}\right),$$

Relația (x) și (xxx) înseamnă de fapt că privind relația (xx) ca o ecuație în x_1, x_2, x_3, dacă ea este satisfăcută de valorile $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3$ atunci ea e satisfăcută și de $x_1 = \frac{1}{e_1}$ $x_2 = \frac{1}{e_2}$, $x_3 = \frac{1}{e_3}$

Pornind de la identitatea stabilită în problema (22)
$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$ (a)
observăm că relația
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$ implică și este implicată de $(x_1 + x_2 + x_3)^3 = 4(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 4(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$ (b)
Deci pentru problema noastră în care vrem să arătăm că $\left(\frac{1}{e_1}, \frac{1}{e_2}, \frac{1}{e_3}\right)$ sînt rădăcinile ecuației (xx) este suficient să arătăm că $\left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3}\right)^3 = 4\left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}\right)\left(\frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3}\right)\left(\frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_1}\right)$, sau

$(xxxx)(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)^3 = 4\, e_1e_2e_3(e_1 + e_2)(e_1 + e_3)(e_2 + e_3)$.
Calculînd pe rînd membrul stîng și cel drept avem
$e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = 2a_1^2 a_2^2 + 2a_1^2 a_3^2 + 2a_2^2 a_3^2 - a_1^4 - a_2^4 - -a_3^4 = (a_1 + a_2 + a_3)(-a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + a_3)(a_1 + + a_2 - a_3)$.
Pentru calculul produsului $A = (-a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + + a_3)(a_1 + a_2 - a_3)$ ținem seama de (x) și avem
$A = - a_1^3 - a_2^3 - a_3^3 + a_3 (a_1 + a_2)^2 - 4a_1a_2 + a_3^2(a_1 + a_2) + + a_1a_2(a_1 + a_2) - 4a_1a_2a_3 = -(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_1) + (a_1 + a_2)(a_1a_3 + a_2a_3 + a_1 + a_2 + a_3^2) - 4a_1a_2a_3 = = -4a_1a_2a_3$.
Atunci membrul stîng din (xxxx) devine
$(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)^3 = -64a_1^3 a_2^3 a_3^3 (a_1 + a_2 + a_3)^3$
Mai departe avem :
$e_1 + e_2 = +2a_3^2, \quad e_2 + e_3 = 2a_1^2, \quad e_3 + e_1 = 2a_2^2$.
$e_1e_2e_3 = -4a_1a_2a_3 \quad a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_1^2 (a_2 + a_3) + a_2^2(a_1 + + a_3) + a_3^2(a_1 + a_2) + 2a_1a_2a_3$
dar $a_1^2 (a_2 + a_3) + a_2^2(a_1 + a_3) + a_3^2(a_1 + a_2) + 2a_1a_2a_3 = = (a_1 + a_2)(a_1 + a_3)(a_2 + a_3)$
și în virtutea relației (b) avem
$e_1e_2e_3 = -8a_1a_2a_3(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3) = -2a_1a_2a_3(a_1 + a_2 + a_3)^3$
Cu aceasta membrul drept din (xxxx) devine
$4e_1e_2e_3(e_1 + e_2)(e_1 + e_3) = -64a_1^3 a_2^3a_3^3(a_1 + a_2 + a_3)^3$
adică este egal cu cel drept și relația (xxxx) este demonstrată.

28. Aducînd la același numitor $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$, în primul membru al identității de demonstrat avem de calculat numărătorul
$a_1^4 (a_3 - a_2) + a_2^4(a_1 - a_3) + a_3^4(a_2 - a_1) = a_1a_2(a_2^3 - a_1^3) + + a_3(a_1^4 - a_2^4) + a_3^4(a_2 - a_1) = (a_1 - a_2) \quad [a_3(a_1^3 - a_2^3) + + a_2^3(a_3 - a_1) + a_1^2 a_2(a_3 - a_1) + a_1a_2^2(a_3 - a_1)] = (a_1 - a_2) (a_3 - a_1) [a_2^3 - a_3^3 + a_1(a_2^2 - a_3^2) + a_1^2(a_2 - a_3)] = (a_1 - a_2) (a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1^2 + a_3^2 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)$
și aceasta demonstrează imediat rezultatul cerut.

29. Aducînd la numitorul comun $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$ obținem la numărător :
$[x^2 - (a_2 + a_3)x + a_2a_3] (a_3 - a_2) + [x^2 - (a_1 + a_3)x + a_1a_3] (a_1 - a_3) + [x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1a_2] (a_2 - a_1)$.

Coeficientul lui x^2 în această expresie este $a_3 - a_2 + a_1 - -a_3 + a_2 - a_1 = 0$ iar coeficientul lui x este $a_2^2 - a_3^2 - a_1^2 + + a_2^2 = 0$ ceea ce demonstrează independența de x a expresiei date.

30. Notînd $\frac{a_1 - a_2}{a_3} = x_1$, $\frac{a^2 - a_3}{a_1} = x_2$, $\frac{a_3 - a_1}{a_2} = x_3$, expresia de calculat devine:

$$E = 3 + \frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_3}$$

calculînd apoi de exemplu expresia $\frac{x_2 + x_3}{x_1}$ în prezența condiție $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ găsim :

$\frac{x_2 + x_3}{x_1} = \frac{2a_3^2}{a_1 a_2}$. Prin permutări circulare se obține apoi

$$E = 3 + \frac{2a_3^2}{a_1 a_2} + \frac{2a_1^2}{a_2 a_3} + \frac{2a_2^2}{a_3 a_1} = 3 + \frac{2}{a_1 a_2 a_3} (a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)$$

Ținînd acum seama că în condițiile problemei $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = 3a_1 a_3$ avem $E = 9$.

31. a) Identitatea rezultă din problema (22).

b) Condițiile problemei implică $(x + y)(y + z)(z + x) = 0$ de unde la fel ca și în problema (26) rezultă rezultatul cerut.

2. INEGALITĂȚI ALGEBRICE

4. Observăm că produsul celor patru termeni din primul membru al inegalității este egal cu 1 și deci lema (1) ne demonstrează inegalitatea cerută.

5. Utilizăm relația de ordine dintre media aritmetică și cea geometrică a patru numere.

6. În virtutea relației de ordine dintre media aritmetică și cea geometrică avem :

$$\frac{1}{2}\left[\frac{abc}{d} + \frac{bcd}{a}\right] \geqslant \sqrt{b^2c^2} = bc$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{bcd}{a} + \frac{acd}{b}\right] \geqslant \sqrt{c^2d^2} = cd$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{acd}{b} + \frac{abd}{c}\right] \geqslant \sqrt{a^2d^2} = ad$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{abd}{c} + \frac{abc}{d}\right] \geqslant \sqrt{a^2b^2} = ab$$

Adunînd cele patru inegalităţi obţinem concluzia cerută

7. Din relaţia de condiţie rezultă $a_i < s$, $\forall i$ şi atunci $a_i^n = a_i^{n-2} a_i^2 < s^{n-2} a_i^2$, de unde însumînd

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^n \leqslant \sum_{i=1}^{n} s^{n-2} \cdot a_i^2 = s^{n-2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = s^{n-2} \cdot s^2 = s^n.$$

8. Punînd $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$ în identitatea lui Lagrange obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\,j}}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2, \text{ de unde}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqslant (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2$$

9. Punînd în identitatea lui Lagrange condiţiile problemei, rezultă imediat concluzia ridicată la pătrat.

10. Ştim că $\sum_{i=1}^{n} (a_i - 1)^2 \geqslant 0$. De aici avem :

$\sum_{i=1}^{n} a_1^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i + n \geqslant 0$ sau trecînd unul din termeni în membrul drept obţinem inegalitatea cerută.

11. Se verifică uşor că pentru orice $i \in N$ avem

$\frac{1}{(2i+1)^2} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$ şi atunci putem scrie :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i+1)} \leqslant \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i} = \frac{1}{i+2}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{4}$$

12. Se verifică cu uşurinţă că pentru orice $n > 2$.

$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, de unde sumînd, obţinem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}\ 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{2n-1}{n}$$

13. Se verifică uşor relaţia de ordine

$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$, de unde obţinem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \sqrt{n}$$

14. Notăm primul membru al inegalităţii cu E şi presupunem pentru început $x > 1$.

$E = p(x^q - 1) - q(x^p - 1) = (x - 1)[p(x^{q-1} + x^{q-2} + \ldots + x + 1) - q(x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1)] = (x - 1)$
$[-q(x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots x^q) - (p - q)(x^{q-1} + x^{q-2} + \ldots + x + 1)]$

Dar pentru $x > 1$ avem $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots x^q = x^q(x^{p-q-1} + \ldots + 1) > (p - q)x^q$ şi deci

$-q(x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x^q) < -q(p - q)x^q$. Atunci

$E < (x - 1)[-q(p - q)x^q + q(p - q)x^{q-1}] = -q(p - q)(x - 1)^2x^{q-1} < 0$

Analiza cazului $x < 1$ se face în mod analog ţinînd seama că $x - 1 < 0$.

15. Primul membru al inegalităţii îl putem scrie

$$E = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c}$$

Se observă că E este o sumă de trei perechi de numere inverse adunate între ele. Cum suma a orice două numere inverse din R_+ este cel puţin egală cu dri, rezultă imediat rezultatul cerut.

16. Membrul întîi al inecuaţiei se poate pune uşor sub forma

$$E = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + a^4 + b^4 + c^4}{abc}$$

Utilizînd relaţiile de ordine dintre media aritmetică şi cea geometrică avem

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq abc(a + b + c)$

Ţinînd seama şi de condiţia problemei avem:

$$E \geq \frac{ab + ac + bc + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{abc} \geq \frac{ab + ac + bc}{abc} + 1$$

Pe de altă parte avem

$$1 = a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}, \text{ de unde } \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geqslant 3.$$

şi apoi

$$\frac{ab + ac + bc}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \geqslant 9.$$

Cu toate acestea putem scrie $E \geqslant 10$.

17. Vom utiliza principiul inducţiei complete
Fie $n = 2$. Avem de demonstrat că

$$(a_1^{m+p} + a_2^{m+p})(a_2^{m-p} + a_2^{m-p}) \geqslant (a_1^m + a_2^m)^2$$

Calculăm membrul sting

$$a_1^{2m} + a_2^{2m} + a_1^m a_2^m\left[\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^p + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^p\right] \geqslant a_1^{2m} + a_2^{2m} + 2a_1^m a_2^m =$$

$= (a_1^m + a_2^m)^2$, întrucît suma din paranteza dublă este superioară lui 2 ca suma a două cantităţi din R_+ inverse una alteia. Semnul egal are loc atunci cînd $\frac{a_1}{a_2} = 1$ sau $a_1 = a_2$.

Pentru a trece mai departe notăm

$$E_k^+ = \sum_{i=1}^{k} a_i^{m+p}; \quad E_k^- = \sum_{i=1}^{k} a_i^{m-p}; \; E_k = \sum_{i=1}^{k} a_i^m$$

Presupunem, în conformitate cu principiul inducţiei complete că $E_k^+ \cdot E_k^- \geqslant E_k^2$, şi calculăm

$$E_{k+1}^+ \cdot E_{k+1}^- = E_k^+ \cdot E_k^- + a_{k+1}^{m+p} E_k^- + a_{k+1}^{m-p} E_k^+ + a_{k+1}^{2m} \geqslant$$
$$\geqslant E_k^2 + a_{k+1}^{2m} + a_{k+1}^{m+p} E_k^- + a_{k+1}^{m-p} E_k^+.$$

Să analizăm în detaliu expresia formată de ultimii doi termeni ai ultimei sume. În ea intră termeni de forma

$$a_{k+1}^{m+p} a_i^{m-p} + a_{k+1}^{m-p} a_i^{m+p} = a_{k+1}^m a_i^m\left[\left(\frac{a_{k+1}}{a_i}\right)^p + \left(\frac{a_i}{a_{k+1}}\right)^p\right] \geqslant$$

$\geqslant 2a_{k+1}^m a_i^m$, semnul egal fiind valabil cînd $a_{k+1} = a_i$
Sumînd aceste inegalităţi, în raport cu indicele i de la 1 pînă la k avem :

$$a_{k+1}^{m+p} E_k^- + a_{k+1}^{m-p} E_k^+ \geqslant 2a_{k+1}^m E_k.$$

Cu aceasta avem

$$E^{+}_{k+1} \cdot E^{-}_{k+1} \geqslant E_k^2 + a^{2m}_{k+ş} + 2a^{m}_{k+1} E_k = (E_k + a_{k+1})^2 = E^2_{k+1}$$

ceea ce demonstrează complet inegalitatea. Egalitatea are loc cînd toate mărimile a_i sînt egale între ele.

18. Scriem identitatea lui Lagrange

$$(a^2 + b^2 + c^2)(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) = (ayz + bzx + cxy)^2 + \\ + (azx - byz)^2 + (axy - cyz)^2 + (bxy - czx)^2,$$

de unde rezultă :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) \geqslant (ayz + bzx + cxy)^2$$

inegalitatea care este adevărată independent de condiția problemei.

19. Inegalitatea cerută rezultă imediat din identitatea lui Lagrange.

20. Din identitatea lui Lagrange se obține

$$(\text{x}) \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2.$$

Punînd în această inegalitate $x_i = \sqrt{a_i}$, $y_i = \frac{1}{\sqrt{a_i}}$ obținem :

$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geqslant n^2$, de unde ținînd seama de condiția problemei avem

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant \frac{n^2}{c}$$

Așa cum știm inegalitatea (x) devine egalitate cînd toate numerele $x_i = y_i$ $\forall\, i \in N$ adică, în cazul nostru cînd $a_i = 1$, $\forall\, i \in N$.

21. Știm că (vezi (2))

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{c}{n}$$

Ridicînd la puterea n inegalitatea obţinută obţinem rezultatul cerut.

22. Din relaţia de ordine dintre media aritmetică şi geometrică avem inegalităţile.

$\frac{a_i + 1}{2} \geqslant \sqrt{a_i}$ pe care înmulţindu-le termen cu termen obţinem:

$$\frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \geqslant \sqrt{\prod_{n=1}^{n} a_i} = 1$$

De aici reiese imediat inegalitatea cerută.

23. Relaţia dintre media aritmetică şi cea geometrică ne dă

$$\frac{a_i + a_{i+1}}{2} \geqslant \sqrt{a_i a_{i+1}}, \text{ de unde } \frac{1}{\sqrt{a_i a_{i+1}}} \geqslant \frac{2}{a_i + a_{i+1}}$$

$$\text{şi } \frac{1}{a_i + a_{i+1}} \geqslant \frac{4}{(a_i + a_{i+1})^2}$$

Sumînd această relaţie se obţine rezultatul cerut

24. Făcînd în identitatea lui Lagrange $b_i = 1$ se obţine

$$n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = (\sum a_k)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i,j}}^{n} (a_i - a_j)^2$$

de unde rezultă inegalitatea cerută

Pentru demonstrarea părţii a doua observăm mai întîi că este necesar că $\sum_{i=1}^{n} a_i > 0$. Ridicînd condiţia la patrat şi ţinînd seama de inegalitatea demonstrată avem

$$(n - 1) \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

de unde rezultă pentru $n > 1$ că $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i,j}}^{n} a_i a_j \geqslant 0$

Din cele două condiţii rezultă $a_i > 0$, $\forall$ i

25. Dacă $a + b + c < 0$ inegalitatea este evidentă. Dacă $a + b + c \geqslant 0$ inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu

cea care se obține prin ridicare la patrat și care este un caz particular al inegalității demonstrate în problema precedentă.

26. Dacă notăm $z_k = a_k + ib_k$ $(i^2 = -1)$ inegalitatea de demonstrat este

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Pentru $n = 2$ avem de demonstrat

$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

inegalitatea echivalentă cu

$$a_1a_2 + b_1b_2 \leqslant \sqrt{(a_1^2 + b_2^2)(a_2^2 + b_2^2)}$$

care la rîndul ei este adevărată ca un caz particular al inegalității (x) de la problema (22). (Rezultă imediat din identitatea lui Lagrange).
Pentru a demonstra inegalitatea în cazul general procedăm astfel :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} z_k + z_n\right| \leqslant \left|\sum_{k-1}^{n-1} z_k\right| + |z_n| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n-2} z_k\right| + |z_{n-1}| +$$

$$+ |z_n| \leqslant \ldots \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

27. Inegalitatea cerută este o consecință a inegalității demonstrate la problema (25).

28. Pornim de la inegalitățile evidente în condițiile problemei
$a^2 > a^2 - (b - c)^2 = (a - b + c)(a + b - c)$
$b^2 > b^2 - (c - a^2) = (a - c + a)(b + c - a)$
$c^2 > c^2 - (a - b)^2 = (c - a + b)(c + a - b)$
pe care înmulțindu-se termen cu termen obținem
$a^2b^2c^2 > (a + b - c)^2(a - b + c^2)(-a + b + c)^2$
de unde rezultă inegalitatea cerută

29. Adunînd inegalitățile cunoscute

$$\sqrt{a_i a_j} \leqslant \frac{a_i + a_j}{2}$$

rezultă inegalitatea cerută.

30. Avem pe de o parte

$$\text{(x)} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$$

Pe de altă parte avem

$$a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}, \text{ de unde } \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geqslant \frac{3}{a+b+c} \qquad \text{(xx)}$$

Reunind cele două inegalități (x) și (xx) obținem rezultatul cerut.

3. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII

3. Se știe că dacă $A^2 - B = C^2$ radicalii de forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ se pot pune sub forma:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

Observăm că în cazul nostru

$$\left(\frac{x+5a}{12a}\right)^2 - \left(\frac{x-4a}{4a}\right) = \left(\frac{x-13a}{12a}\right)^2, \text{ deci } C = \frac{|x-13a|}{12a}$$

Atunci membrul întîi al ecuației se scrie

$$2\sqrt{\frac{x+5a+|x-13a|}{24a}} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x-4a}{3a}} \text{ pentru } x > 13a \\ \sqrt{3} \text{ pentru } x > 13a \end{cases}$$

Pe de altă parte pentru ca ecuația să aibă sens în R trebuie ca $x > 4a$
În aceste condiții se observă că soluțiile ecuației sînt $x \in [4a, 13a]$.

4. Scriem ecuația sub forma

$$\left(\frac{\sqrt{8+\sqrt{7}}}{4}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{8-\sqrt{7}}}{4}\right)^x = 1$$

și observăm că $x = 2$ este o soluție a ecuației.
De asemeni observăm că

$$\frac{\sqrt{8 \pm \sqrt{7}}}{4} < 1, \text{ și deci presupunînd } x > 2$$

$$\left(\frac{\sqrt{8+\sqrt{7}}}{4}\right)^x < \left(\frac{\sqrt{8+\sqrt{7}}}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{8-\sqrt{7}}}{4}\right)^x < \left(\frac{\sqrt{8-\sqrt{7}}}{4}\right)^2$$ de unde prin adunare constatăm

că nici un $x > 2$ nu poate fi soluția ecuației date.
În mod analog se arată că nici un $x<2$ nu poate fi soluție și deci singura soluție a ecuației este $x = 2$.

5. Ecuația dată poate fi pusă sub forma $(x - 2y - 1)^2+(x + y - 7)^2= 0$, de unde în R trebuie să avem :

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem obținem $x = 5$ $y = 2$

6. Ecuația dată este echivalentă cu ecuația

$$(x - 2y)^2+ (2x - y + z - 6)^2+ (x + y + z - 6)^2= 0$$

ale cărei soluții reale sînt date de sistemul

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y + z - 6 = 0 \\ x + y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

Soluțiile ecuației date sînt deci $x = 0$, $y = 0$, $z = 6$.

7. Observăm că 5, 12, 13 sînt numere pitagorice, deci o soluție a ecuației date este $x = 2$. Procedînd apoi ca la problema (4) se demonstrează că nu mai există alte soluții:

8. Se calculează soluția $x = 0$.

9. Se calculează soluția $x = 1$

10. Utilizînd același procedeu ca la problema (4) se obține membrul stîng al ecuației egal cu

$$2\sqrt{\frac{x+|x-2|}{2}} = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} & \text{pentru } x>2 \\ 2 & \text{pentru } x<2 \end{cases}$$

Deci soluţiile ecuaţiei date sînt $x \in [1, 2]$

11. La fel ca în problema precedentă membrul stîng al ecuaţiei se pune sub forma

$$2\sqrt{\frac{x^2+|x^2-3|}{2}} = \begin{cases} \sqrt{4x^2-6} & \text{pentru } |x| \geq \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \text{pentru } |x| < \sqrt{3} \end{cases}$$

Deci soluţia problemei este $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

12. Punem ecuaţia dată sub forma
(*) $5x^2 + 4[(1-\lambda)y - 5]x + (\lambda^2 + 4)y^2 + 2(3\lambda - 8)y + 25 = 0$
Pentru ca ecuaţia dată să aibă soluţii reale este necesar ca discriminantul ei considerat cu ecuaţia în x să fie nenegativ, adică $\Delta' = -(\lambda + 4)^2 y^2 + 10(\lambda + 4)y - 25 = -[(\lambda + 4)y - 5]^2 \geq 0$
Singura posibilitate pentru satisfacerea acestei condiţii este

$$(\lambda + 4)y - 5 = 0, \text{ de unde } y = \frac{5}{\lambda + 4}$$

În aceste condiţii soluţia ecuaţiei (*) în x va fi

$$x = -\frac{2(1-\lambda)x - 10}{5} \text{ sau}$$

$$5x + 2(1-\lambda)y - 10 = p$$

Pentru y să fie număr întreg este necesar şi suficient ca $\lambda = 1$, $\lambda = -3$, $\lambda = -5$ şi se va analiza în care din aceste situaţii x este şi el întreg ca rezultate se găseşte că toate valorile lui x care-l fac pe y întreg îl fac şi pe x întreg.

13. Considerăm ecuaţia cu necunoscuta u

$$\frac{x^2}{u} + \frac{y^2}{u - \alpha^2} + \frac{z^2}{u - \beta^2} = 1$$

care din condiţiile problemei rezultă că are trei rădăcini şi anume a^2, b^2, c^2.
Ordonînd ecuaţia considerată după puterile lui u găsim mai întîi

$$u(u - \beta^2)(u - \alpha^2) - x^2(u - \alpha^2)(u - \beta^2) - y^2(u - \beta^2)u - z^2 (u - \alpha^2)u = 0$$

şi apoi

$$u^3 - (\alpha^2 + \beta^2 + x^2 + x^2 + z^2)u^2 + \ldots = 0$$

Scriind acum prima relație dintre rădăcini și coeficienți, (Viète) găsim
$a^2+b^2+c^2=\alpha^2+\beta^2+x^2+y^2+z^2$ de unde rezultă

$$S_2=a^2+b^2+c^2-\alpha^2-\beta^2.$$

14. Ecuația dată este echivalentă cu

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y+2a=0 \\ 2x-2a=0 \end{cases}$$

În continuare trebuie discutată în funcție de a ecuația $y^2-2y+a^2+2a=0$ și se găsește că pentru $a^2+2a\leqslant 1$ are rădăcini (y trebuie să fie în mod obligatoriu real), iar pentru $a^2+2a>1$ nu are soluții. Se vor explicita condițiile de existență a soluției în funcție de $a(a\in[1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}]$

15. Dacă sistemul admite soluția (x_1, y_1) se observă că o admite și pe $(x_1, -y_1)$ ceea ce implică în virtutea condiției de unicitate $y_1=0$. Pentru această soluție rezultă $b=1$, a arbitrar și x arbitrar.
În aceste condiții soluția va fi $x=\sqrt[3]{c}\ y=0$

16. Prima ecuație ne dă $|z|^5=|\overline{w}|^4=|w|^4$ iar ecuația a doua $|z|^7|w|^9=1$ sau $|z|^{35}\cdot|w|^{45}=1$. Substituim din prim $|z|^{35}=|w|^{28}$ și obținem $|w|^{73}=1$ sau $|w|=1$, $|z|=1$.
Mai departe substituind din prima ecuație în a doua obținem $-\overline{w}^{28}\cdot w^{45}=1$ sau $w^{17}=-1=\cos\pi+i\sin\pi$ și de aici rezultă ușor folosind formula lui Moivre soluțiile pentru w și apoi pentru z.

17. Pentru a rezolva problema ținînd seama de semnificația modulelor vom căuta soluțiile următoarelor sisteme.

$$(a)\begin{cases} 2x^2-2x+2y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x\in[-\infty,\ 0]\cup[1,\ \infty) \\ y\in[0,\ \infty) \end{matrix}$$

$$(b)\begin{cases} 2x^2-2x+2y=3 \\ x+y=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x\in[-\infty,\ 0]\cup[(1,\ \infty) \\ y\in(-\infty,\ 0]. \end{matrix}$$

$$(c)\begin{cases} -2x^2+2x+2y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x\in(0,\ 1) \\ y\in[0,\ \infty) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -2x^2+2x+2y=3 \\ x+y=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x\in(0,\ 1) \\ y\in(-\infty,\ 0) \end{matrix}$$

Soluţiile căutate vor fi

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}-1\right), \left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

18. Utilizînd identităţile

$$(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=2(xy+xz+yz)$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$$

şi înlocuind datele problemei găsim

$$xy+yz+xz=0$$

$$xyz=0$$

la care adăugînd ecuaţia a treia a sistemului, găsim soluţiile

$$x_1=0 \quad y_1=0 \quad z_1=3$$

$$x_2=0 \quad y_2=3 \quad z_2=0$$

$$x_3=3 \quad y_3=0 \quad z_3=0$$

19. $\Delta=+(m^2-2)(m^2+2)$. Ecuaţia are rădăcini reale pentru

$$m \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$$

20. $\Delta'=2(m-1)^2$. Ecuaţia are rădăcini reale pentru orice m.

21. $\Delta=-3m^3+4$. Ecuaţia are rădăcini reale pentru

$$m \in \left[\frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$$

22. $\Delta=m^2+2m-3$. Ecuaţia are rădăcini reale pentru

$$m \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty).$$

23. $\Delta \geqslant 0$ pentru $m \in (-\infty, -4) \cup (0, \infty)$

$P>0$ pentru $m \in (-\infty, 0)$

$S=-1$

(a) Condiţiile $\Delta \geqslant 0$, $P>0$, $S>0$ sînt contradictorii

(b) Notînd $T(x)$ membrul stîng al ecuaţiei, condiţiile care trebuiesc satisfăcute sînt

$$\begin{cases} m > 0 \\ T(-1) > 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} m < 0 \\ T(-1) < 0 \end{cases}$$

Aceste condiții ne dau pentru m condiția $m < 0$

(c) Condițiile care trebuiesc satisfăcute sînt

$$T(-3)\cdot T(-2) < 0 \text{ și } T(2)T(3) < 0$$

Aceste condiții nu ne dau pentru m nici o valoare căci prima condiție e satisfăcută de $m \in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ iar cea de-a doua de $m \in \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$.

24. Condițiile care trebuie satisfăcute sînt, dacă notăm $T(x)$ primul membru al ecuației

$$\begin{cases} \Delta = -m(m^2 - 3m + 1) \geqslant 0 \\ T(-2)\, T(1) = (m^2 + 7m - 4)(m^2 - 2m - 1) > 0 \end{cases}$$

ceea ce dă pentru m

$$m \in \left(-\infty, -\frac{7+\sqrt{65}}{2}\right) \cup (1-\sqrt{2}, 0) \cup \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{65}-7}{2}\right)$$

$$\cup \left(1+\sqrt{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

25. a) Condițiile care trebuie satisfăcute sînt

$$\begin{cases} T(1)T(2) < 0 \\ mT(1) < 0 \end{cases}$$

unde $T(x)$ este membrul stîng al ecuației.
Alte condiții echivalente sînt

$$\begin{cases} m > 0 \\ T(1) < 0 \\ T(2) > 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} m < 0 \\ T(1) > 0 \\ T(2) < 0 \end{cases}$$

Aceste condiții ne dau pentru m

$$m \in \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{3}\right)$$

b) Condițiile problemei se transcriu în

$$\begin{cases} m^2-1>0 \\ T(-1)=m^2-2m+3>0 \\ T(1)=m^2+2m-1<0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} m^2-1<0 \\ T(-1)<0 \\ T(1)>0 \end{cases}$$

care ne dau pentru m condiția $m \in (-1-\sqrt{2}, -1)$.

26. $\Delta' = a^2 + b^2 - 4$

$$P = 1 - \frac{ab}{2}$$

$$S = a - b$$

Reprezentînd curbele $a^2 + b^2 - 4 = 0$, $1 - \frac{ab}{2} = 0$, $a-b=0$ în planul $a\ o\ b$ obținem următoarea situație (fig. 5.1).

$\Delta < 0$ pentru $a^2 + b^2 < 4$ (c)

$P > 0$ pentru $ab < 2$ (I)

$S > 0$ pentru $a > b$ (D)

Deci în exteriorul cercului (c) avem rădăcini reale iar suma și produsul au semnele din figură.

27. $\Delta = a^2 - b$, $P = b - 2a + 1$, $S = 2a - 2$

Reprezentăm pe același grafic, în sistemul de coordonate $a0b$, curbele $\Delta = 0$ (parabolă) $P = 0$ (dreaptă) $S = 0$ (dreaptă) (fig. 5.2)

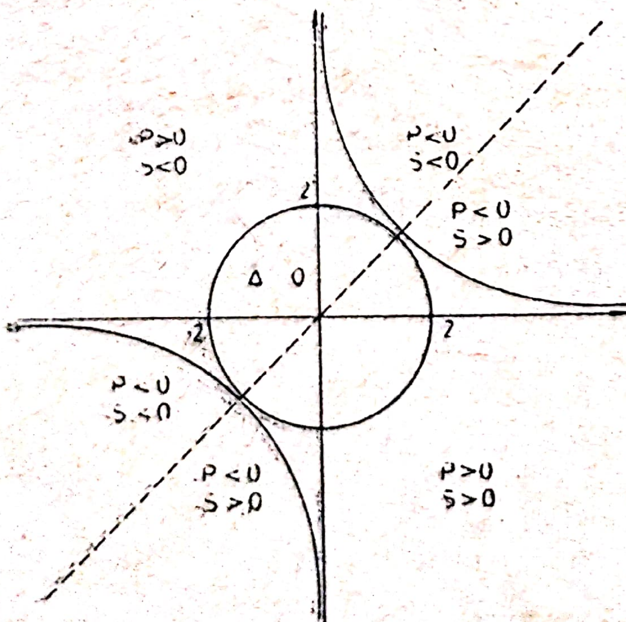


Fig. 5.1.

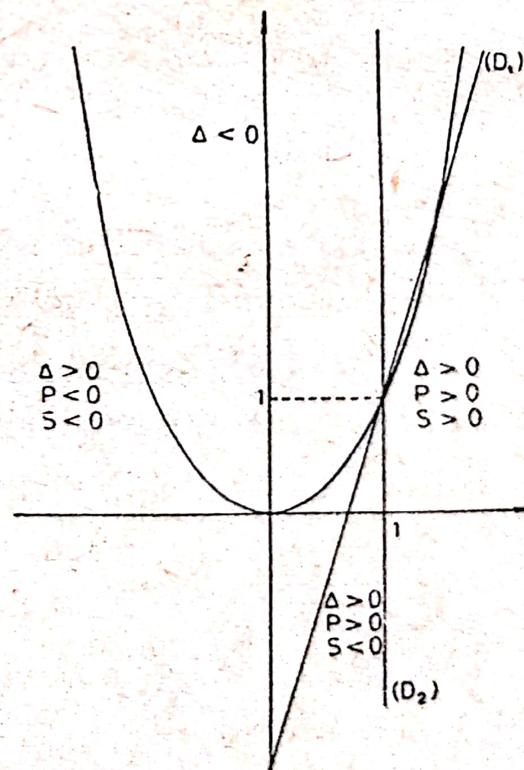


Fig. 5.2.

$\Delta < 0$ pentru $b < a^2$ (interiorul parabolei)
$P > 0$ pentru $b > 2a - 1$ (în dreapta dreptei D_1)
$S > 0$ pentru $a > 1$ în dreapta dreptei D_2

28. Fie $T(x) = x^2 - x - m$ și $\bar{T}(x) = x^2 - x + m - 1$ cu rădăcinile, respectiv x_1, x_2 și $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$. Să analizăm cazul de separare $x_1 < \bar{x}_1 < x_2 < \bar{x}_2$. Condițiile de satisfăcut, ținînd seama că primul coeficient (în x^2) este pozitiv, vor fi

$$T(\bar{x}_1) < 0,\ T(\bar{x}_2) > 0$$

Pentru calculul lui $T(\bar{x}_1)$ și $T(\bar{x}_2)$ avem

$$T(\bar{x}_1) = \bar{x}_1^2 - \bar{x}_1 - m = \bar{x}_1^2 - \bar{x}_1 + m - 1 - 2m + 1 = \\ = -2m + 1$$

$$T(\bar{x}_2) = -2m + 1$$

Ținînd seama că $T(\bar{x}_1) = T(\bar{x}_2)$, condițiile problemei sînt contradictorii, deci nu există nici un m pentru care rădăcinile celor două ecuații să se separe.

Acest rezultat poate fi demonstrat și dacă se ține seama că graficele celor două trinoame au aceeași axă de simetrie.

29. Fie $T(x) = mx^2 - 2x - 2$ și $\bar{T}(x) = x^2 + x - (m + 1)$ iar $x_1 x_2$ și $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, respectiv rădăcinile celor două trinoame. Condiția de separare a rădăcinilor celor două trinoame este $T(\bar{x}_1)T(\bar{x}_2) < 0$.

Pentru calculul lui $T(\bar{x})$ procedăm astfel:

$$T(\bar{x}_1) = m(x_1^2 + x_1 - m - 1) - (m + 2)x_1 + m(m + 1) - 2 = \\ = -(m + 2)(x_1 - m + 1)$$

Cu aceasta condiția noastră devine

$$T(\bar{x}_1)T(\bar{x}_2) = (m + 2)^2(x_1 - m + 1)(x_2 - m + 1) = \\ = (m + 2)^2(m^2 - 2m - 1)$$

care ne dă soluția $m \in (1 - \sqrt{2},\ 1 + \sqrt{2})$.

30. Condițiile pe care trebuie să le satisfacă m sînt

$$m^2 - m - 2 > 0$$

$$\Delta' = -7m^2 - 13m - 17 < 0.$$

31. Scriem mai întîi
$x_1^{k+2} + mx_1^{k+1} + 2x_1^k = 0$ (se obține prin înmulțire cu x_1^n).
$x_2^{k+2} + mx_2^{k+1} + 2x_2^k = 0$, de unde, adunînd avem
$S_{k+2} + mS_{k+1} + 2S_k = 0$
Făcînd $k = 1, 2 \dots n$ și însumînd rezultatele se obține rezultatul cerut.

32. a) Avem $P(x,y) = y^2\left[a_{11}\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2a_{12}\frac{x}{y} + a_{22}\right]$. Pentru ca să fie pozitiv oricare ar fi x și y este ca $a_{11} > 0$ și
$\Delta' = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$.
b) se constată că $\Delta' = \Delta_2$.

33. Notăm $\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = y$, de unde
(x) $x^2(y - 1) - 2x + 2y - 3 = 0$.
Cum $f(x)$ are valori reale trebuie ca ecuația (x) să aibă soluții reale pentru orice x deci

$$\Delta' = -2y^2 + 5y - 2 \geqslant 0 \text{ adică } y \in \left[\frac{1}{2}, 2\right].$$

Deci valoarea minimă a lui y este $\frac{1}{2}$ iar cea maximă 2.
Prima valoare se realizează în $x = -2$ iar cea de-a doua în $x = 1$.

34. Condițiile care trebuie să le satisfacă m rezultă, mai întîi, din necesitatea că toate rădăcinile să fie reale, deci și rădăcinile derivatei să fie reale.
Derivata membrului întîi este $2x[2(m-1)x^2 - m + 4]$ și are rădăcinile $x_1 = -\sqrt{\frac{m-4}{2(m-1)}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{m-4}{2(m-1)}}$
Cu acestea condițiile complete ale problemei sînt

$$\frac{m-4}{2(m-1)} > 0,\ \sqrt{\frac{m-4}{2(m-1)}} > 2,\ f\left(\frac{m-4}{2(m-1)}\right) < 0$$

$$f(0) > 0, \text{ unde } f(u) = (m-1)u^2 - (m-4)u + 3m - 2$$

Un alt mod de a pune condițiile, fără utilizarea noțiunii de derivată, este următorul. Considerăm ecuația $f(u) = 0$ cu discriminantul $\Delta = -11m^2 + 12m + 8$, produsul rădăcinilor $P = \frac{3m-2}{m-1}$ și cum suma rădăcinilor $S = \frac{m-4}{m-1}$

Condițiile ce trebuie îndeplinite sînt
$\Delta > 0$, $P > 0$, $S > 0$ (rădăcinile ecuației date sînt reale)
$(m - 1)f(4) < 0$ (existența unei rădăcini inferioare lui -2)
$(m - 1)f(1) < 0$ (nu mai există alte rădăcini între -2 și -1)

35. Notînd $P(x) = 2mx^4 - (3m - 1)x^2 + m$, condițiile problemei vor fi satisfăcute dacă

$$P(-1)P(0) < 0$$

$$P(1)P(2) > 0$$

și mai trebuie demonstrat că în aceste condiții ecuația $P(\sqrt{x}) = 0$ are discriminantul, produsul și suma rădăcinilor toate pozitive.
Primele două condiții sînt satisfăcute pentru

$$m \in \left(-\infty, \frac{-4}{21}\right) \cup (2, \infty)$$

Celălalt grup de condiții ($\Delta > 0$, $P > 0$, $S > 0$) este satisfăcut pentru

$$m \in (-\infty, 0) \cup (3 + 2\sqrt{2}, \infty)$$

În concluzie ecuația are toate rădăcinile reale pentru condițiile problemei, cu excepția valorilor $m \in \left(-\frac{4}{21}, 0\right)$.

36. Fie x_1 și x_2 ($x_1 < x_2$) rădăcinile opuse, adică $x_1 + x_2 = 0$ Scriind relațiile dintre rădăcini și coeficienți, avem, dacă ținem seama de condiția problemei.

$$x_3 = -\frac{m}{2}, \; -x_1^2 = -4, \; -x_1^2 x_3 = -4, \text{ de unde } x_1 = -2,$$

$$x_2 = +2, \; x_3 = 1, \; m = -2$$

37. $m = 1$, $x_1 = -i$, $x_2 = i$, $x_3 = 2$

38. $m = -3$, $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, $x_3 = -\frac{1}{3}$.

39. $m = 0$, $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -2$

40. $m = -8$, $x_1 = x_2 = -2$, $x_3 = 3$

41. $m = 1,\ x_1 = x_2 = -1,\ x_3 = -\frac{1}{3}$ sau $m = \frac{275}{243},\ x_1 = x_2 = -\frac{5}{9},\ x_3 = -\frac{11}{9}$

42. $m = 3,\ x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{15}}{4},\ x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{15}}{4}$

43. $m = 2,\ x_1 = i,\ x_2 = -i,\ x_3 = -\frac{3}{2}$.

44. $m = -2,\ x_1 = 3,\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = -2$ sau $m = -\frac{10}{3}$,

$x_1 = x_2 = -1,\ x_3 = \frac{10}{3}$

45. Notînd $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, condiția ca ecuația $P(x) = 0$ să aibă o rădăcină dublă x_1 este ca

$$x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \text{ și}$$

$$3x_1^2 + 2ax_1 + b = 0 \qquad (\text{x})$$

sau combinația $3P(x_1) - x_1P'(x_1) = ax_1^2 + 2bx_1 + 3c = 0$ (xx)
Ecuațiile (x) și (xx) au rădăcina comună

$x_1 = \frac{ab - 9c}{6b - 2a^2}$ care trebuie să fie rădăcina dublă a lui $P(x) = 0$

Condiția ca $P(x_1) = 0$ este

$$(ab - 9c)^2 = 2(3b - a^2)(b^2 - 6ac)$$

și cînd ea este îndeplinită rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ sînt

$$x_1 = x_2 = \frac{ab - 9c_2}{6b - 2a},\quad x_3 = \frac{9c - 4ab}{3b - a^2}$$

46. Rădăcinile multiple ale ecuației $P(x) = 0$ sînt și rădăcini ale ecuației $P(x') = 0$ deci sînt rădăcini ale ecuației $<P(x), P'(x)>$ unde cu $<P, Q>$ am notat cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q.
În cazul nostru $P'(x) = 2(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4)$ și

$<P(x), P'(x)> = x^2 - x + 2$ ale cărui rădăcini sînt $\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$

Deci rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ vor fi

$$x_1 = x_2 = \frac{+1 - i\sqrt{7}}{2}, \ x_3 = x_4 = \frac{d + i\sqrt{7}}{2}$$

De altfel se verifică ușor că $P(x) = (x^2 - x + 2)^2$.

47. $x_1 = x_2 = 1, \ x_3 = -2, \ x_4 = 5$

48. $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}, \quad x_3 = x_4 = \frac{1}{2}$

49. $x_1 = x_2 = -3, \quad x_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad x_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

50. Observăm că ecuația dată nu poate avea rădăcini multiple de ordin mai mare ca doi căci derivata întîia a polinomului $P(x) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 8x + a$ și derivata a doua nu au rădăcini comune.

Rădăcinile derivatei a întîia sînt $\bar{x}_1 = -2, \ \bar{x}_2 = \frac{-7 + i\sqrt{15}}{8}$

$\bar{x}_3 = \frac{-7 - i\sqrt{15}}{2}$

Întrucît ecuația $P(x) = 0$ trebuie să aibă o rădăcină multiplă aceasta trebuie să fie una din valorile $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ sau $\bar{x}_3$. Întrucît se cere ca a să fie real este necesar ca rădăcina $\bar{x}_1 = -2$ să fie rădăcină multiplă a lui $P(x) = 0$ deci

$$P(-2) = a - 4 = 0, \ a = +4 \ \text{și} \ x_1 = x_2 = -2$$

$$x_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \ x_4 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

51. $a = 3, \ x_1 = x_2 = 1, \ x = -3$ sau $a = -\frac{175}{27}, \ x_1 = x_2 = -\frac{5}{3}$

$$x_3 = \frac{7}{3}$$

52. Ecuația se poate scrie $(x^2 + x + a)(x^2 + x + 1)$ și problema dată are soluțiile $a = 1, x_1 = x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = x_4 =$ $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ sau

(x) $\bar{a} = \frac{1}{4} = x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}, \ x_3 = \frac{-1 - i\ 3}{2}, \ x_4 = \frac{-1 + i\ 3}{2}$

53. Se găsește că ecuația dată se poate pune sub forma

$$(x^2 + x - a)(x^2 - ax + 1) = 0$$

Pentru a răspunde problemei propuse avem următoarele posibilități:

— primul factor să aibă o rădăcină dublă $\left(a = -\frac{1}{4},\ x_1 = = x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{63}}{8},\ x_4 = \frac{-1 + i\sqrt{63}}{8}\right)$

— al doilea factor să aibă rădăcina dublă $\left(a = \pm,\ x_1 = = x_2 = \pm 1,\ x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ x_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

— cei doi factori să aibă o rădăcină comună $\left(a = -1,\ x_1 = x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},\ x_3 = x_4 = -\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$. Reamintim condiția ca ecuațiile $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ și $a_2x^2 + + b_2x + c_2 = 0$ să aibă o rădăcină comună este $(a_1c_2 - - a_2c_1)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1)$.

54. Notăm rădăcinile $a - 3r$, $a - r$, $a + r$, $a + 3r$ (rația este $2r$) și scriind relațiile dintre rădăcini și coeficienți găsim $4a = \frac{8}{3}(a^2 - r^2)(a^2 - 9r^2) = -5$ care ne dau $r = \frac{1}{3}$ și $r = \frac{\sqrt{31}}{9}$

Corespunzător primei soluții avem $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = = 1$, $x_4 = \frac{5}{3}$ și $m = 52$, $n = 8$

55. Notînd rădăcinile cu $a - 2r$, $a - r$, $a + r$, $a + 2r$ se găsesc soluțiile $m = -5$, $n = 30$, $p = -4$, $x_1 = 1 - 2\sqrt{3}$, $x_2 1 - \sqrt{3}$
$x_3 = 1$, $x_4 = 1 + \sqrt{3}$, $x = 1 + 2\sqrt{3}$ (rația este $\sqrt{3}$).

56. Cel mai mare divizor comun al celor două polinoame (aflat cu ajutorul algortimului lui Euclid) este chiar polinomul $9x^3 - 18x^2 - x + 10$ ale cărei rădăcini sînt $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{3}$, $x_3 = -\frac{2}{3}$

Cel de-al doilea polinom are în plus rădăcina $x_4 = \frac{2}{3}$

57. Calculînd $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ și ținînd seama de relațiile dintre rădăcini și coeficienți găsim

$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)=\frac{3x_1^2x_2^2x_3^2+x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-3}{x_1^2x_2^2x_3^2+x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+1}=3$$

ceea ce conduce la

$x_1^2x_2^2+x_1^2x_1^2+x_2^2x_3^2+2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+3=0$, de unde

$$3a^2-4a+1=0,\ a_1=1,\ a_2=\frac{1}{3}$$

În cazul $a=1$ avem soluțiile $x_{1,2}=\pm i$, $x_3=2$ (inacceptabile).

În cazul $a=\frac{1}{3}$ soluțiile sînt date de ecuația

$$3x^3-2x^2+x-6=0$$

58. Dacă (x_1, y_1, z_1) este o soluție a sistemului, atunci și $(-x_1, -y_1, z_1)$ este de asemenea soluție. În virtutea condiției de unicitate trebuie ca $x_1=0$, $y_1=0$, caz în care sistemul devine $z=a$, $z=b$, $z^2=4$ și deci $a=b=\pm 2$.

Cazul $a=b=2$ conduce la sistemul

$$\begin{cases} xyz+z=2 \\ xyz^2+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

care admite soluțile

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}},\ \frac{1}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}},\ 1\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}},\ \frac{1}{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}},\ 1\right)$$

deci nu convine problemei date.

Cazul $a=b=-2$ conduce la sistemul

$$\begin{cases} xyz+z=-2 \\ xyz^2+z=-2 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

care admite în R_+ soluția $x=0$, $y=0$, sau $z=-2$.

59. Fie a o valoare din cele cerute. Pentru $b=0$ sistemul devine $(x^2+1)^a=1$, $a+x^2y=1$ şi poate fi satisfăcut doar pentru $a=0$ şi $a=1$. Analizînd separat aceste valori ale lui a constatăm că pentru $a=0$ sistemul e incompatibil, iar $a=1$ este unica valoare cu propietăţiie cerute.

60. Condiţiile problemei, $p^2 - 4q > 0$, $p < 0$, $q > 0$ ne asigură că ecuaţia dată are rădăcini reale şi deci E are sens în R.

Calculăm mai întîi $E_1 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \sqrt{-p + 2\sqrt{q}}$. Apoi calculăm:

$$E = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2} = \sqrt[4]{(\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2})^4} =$$
$$= \sqrt[4]{-p + 4\sqrt[4]{q}\,(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) + 6\sqrt{q}} =$$
$$= \sqrt[4]{-p + 4\sqrt[4]{q}\sqrt{-p + 2\sqrt{q}} + 6\sqrt{q}}$$

61. Cel mai mare divizor comun al celor două polinoame este $x^2 - 4x + 1$, ale cărei rădăcini sînt $\bar{x}_1 = 2 + \sqrt{3}$, $\bar{x}_2 = 2 - \sqrt{3}$. Rădăcinile comune ale celor două ecuaţii vor fi $\bar{x}_1$ şi $\bar{x}_2$. Ecuaţia $x^4 - x^3 - 12x^2 + 7x - 1 = 0$ va mai avea în plus

rădăcinile $x_3 = \dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-3 - \sqrt{13}}{2}$

Ecuaţia $x^3 - 2x^2 - 7x + 2$ mai are în plus rădăcina $x_3 = -2$

62. Punînd ecuaţia dată sub forma $(24x^4 - 20x^3 - 6) + 6x^2 + 11x$ se observă că limita superioară a rădăcinilor este $l = 1$. Calculînd transformata în $-x$ şi punînd-o sub forma $(24x^4 + 20x^3 - 11x - 6) + 6x^2$ se constată că limita inferioară a rădăcinilor este $l' = -1$.

Se caută apoi rădăcinile raţionale şi se găseşte

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{2}{3},\ x_3 = \frac{1 + i\sqrt{2}}{2},\ x_4 = \frac{1 - i\sqrt{2}}{2}$$

63. Întrucît ecuaţia dată are coeficienţi întregi şi rădăcina $x_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$, ea va mai avea şi $x_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{3}$, $x_4 = -\sqrt{2} - i\sqrt{3}$. Celelalte rădăcini sînt $x_5 = -2 + 3\sqrt{2}$, $x_6 = -2 - 3\sqrt{2}$.

64. Notăm suma rădăcinilor ecuaţiei cu S şi produsul cu P

Avem : $\lambda = -\frac{19}{6}$

$$S = y_1 + y_2 = x_1^3 + x_2^3 + = m^3 - 3m$$

$$P = y_1 y_2 = x_1^3 x_2^3 + \lambda (x_3^3 - x_1^3) - \lambda^2 = 1 - \frac{19}{6}\sqrt{m^2 - 4}\,(m^2 - 1) +$$
$$+ \left(\frac{19}{6}\right)^2.$$

Aici am presupus $x_1 < x_2$ şi atunci am scris

$$x_2 - x_1 = \sqrt{(x_1 + x_1)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{m^2 - 4}$$

65. Adunînd linia întîia la celelalte două, apoi scăzînd linia a doua din a treia se poate scoate un factor $3x^3$ din determinantul care trebuie egalat cu zero.
După aceasta repetînd operaţiile efectuate asupra liniilor şi cu coloanele se mai scot în factor şi $a + b$, $a + c$ şi $b - c$. Determinantul rămas după aceste două serii de operaţii succesive este egal cu un polinom de gradul al doilea în x, deci ecuaţia dată va avea rădăcina triplă $x = 0$ şi în plus încă două rădăcini care se calculează din ecuaţia rămasă, de gradul al doilea.

66. Notăm $(\sqrt{2}+1)^{\frac{\sin x}{2}} = u$ şi observăm că $\sqrt{2} - 1$ este inversul lui $\sqrt{2} + 1$. Atunci $u + \frac{1}{u} = a$ sau $u^2 - au + 1 = 0$

De aici avem de rezolvat ecuaţiile :

$$(\sqrt{2}+1)^{\frac{\sin x}{2}} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}; \quad (\sqrt{2}+1)^{\frac{\sin x}{2}} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

a este supus la condiţia $|a| \geqslant 2$.
Mai departe ecuaţiile se rezolvă prin logaritmare şi asupra lui a se impun condiţii noi, cum este de exemplu

$$-1 \leqslant \frac{2\lg(a + \sqrt{a^2 - 4}) - 2\lg 2}{\lg(\sqrt{2} + 1)} \leqslant 1 \text{ sau}$$

scrisă astfel

$$\sqrt{2} - 1 \leqslant \frac{(a + \sqrt{a^2 - 4})^2}{4} \leqslant \sqrt{2} + 1$$

67. (a) Condiția problemei se transcrie dacă ținem seama de relațiile dintre rădăcini și coeficienți.

$$\sqrt{9a + 10} - 2 = 3\sqrt{a - 2}$$

de unde rezultă mai întîi condiția $a > 2$
Rezolvînd ecuația prin mijloacele cunoscute se găsește

$a = 6$, valoare care verifică ecuația irațională.

(b) Ecuația pe care trebuie s-o rezolvăm este

$$x^3 - 6x^2 + x - 6 = 0$$

și are rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_2 = 3$.
(c) Trebuie reprezentată grafic parabola $y = x^2 - 5x + 6$

68. Utilizînd algoritmele de obținerea unor proporții derivate dintr-o proporție dată, ecuația de rezolvat se poate scrie sub forma:

$\frac{(x-b)^2}{(x-a)^2} = \frac{b^2}{a^2}$ care conduce la următoarele ecuații

$$\frac{x-b}{x-a} = \frac{b}{a} \qquad \frac{x-b}{x-a} = \frac{-b}{a}$$

care ne dau soluțiile $x = 0$ și $x = \frac{2ab}{a+b}$

69. a) Avem de demonstrat identitatea în α

$$\frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 2 \sin \alpha$$

Membrul stîng se transformă identic

$$\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 2 \sin \alpha$$

b) Avem de rezolvat ecuația

$$\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^3 - \frac{3}{2} \cos 2\alpha(\sin \alpha + \cos \alpha)}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - \cos 2\alpha} = 2 \sin \alpha$$

ale cărei soluții sînt $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $\alpha = k\pi + \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{1}{3}$

70. După operațiile de ordonare a ecuației se obține

$$(*) \qquad 2(a - 1)x^2 - 3(a + 1)x + a + 2 = 0$$

ale cărei soluții sînt $x_1 = \frac{a+2}{a-1}$, $x_2 = \frac{a-2}{2(a-1)}$

Pentru ca o rădăcină a acestei ecuații să fie strict mai mică decît $\frac{1}{2}$ este necesar și suficient ca $(a - 1)P\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ unde cu $P(x)$ am notat primul membru al ecuației (*).

71. După calcule elementare găsim $P_3(x) = 6x(x - 1)(x - 2)$ și deci ecuația $P_3(x) = 0$ are rădăcinile $x = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Ecuația $\frac{P_n(x)}{(x - 1 - i\sqrt{3})^n} = 0$ se scrie $\left(\frac{x - 1 + i\sqrt{3}}{x - 1 - i\sqrt{3}}\right)^n = -1$

Trecînd numerele complexe $x - 1 \pm i\sqrt{3}$ sub formă trigonometrică găsim

$$x - 1 \pm i\sqrt{3} = \sqrt{x^2 - 2x + 4}\,(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

unde

$$\cos \varphi = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$$

cu aceasta ecuația noastră devine

$$\left(\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi}\right)^n = \cos 2n\varphi + i \sin 2n\varphi = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$\text{deci } 2n\varphi = (2k + 1)\pi \text{ deci } \varphi = \frac{2k+1}{n}\pi$$

În plus avem $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{x - 1}$, de unde

$$\frac{\sqrt{3}}{x - 1} = \operatorname{tg} \frac{2k+1}{n}\pi \quad k = 0, 1 \ldots n - 1$$

iar de aici rezultă

$$x = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{2k+1}{n}\pi + 1$$

72. Pentru ca ecuaţia dată să aibă o rădăcină mai mare ca 2 trebuie ca $(m - 15)P(2) < 0$ adică $m \in (15, 22)$.
Pentru ca aceeaşi ecuaţie să aibă ambele rădăcini mai mari ca 2 trebuie ca $\Delta' \geqslant 0$, $S > 4$, $P > 4$ adică $m^2 + 7m - 10 \geqslant 0$,

$\frac{m}{m - 15} > 4$, $\frac{m-6}{m-5} > 4$ ceea ce dă pentru m intervalul

$m \in (15, 18)$.

73. Pentru a demonstra proprietatea cerută trebuie să arătăm că determinantul principal al sistemului, Δ, este diferit de zero în timp ce toţi determinanţii caracteristici Δ_i sînt nuli.
Calcule simple arată că $\Delta = -2$ şi $\Delta_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.
Altfel fără a utilitza determinanţii, putem arăta aceeaşi proprietate prin calcule simple.
Adunînd toate ecuaţiile găsim

$$(*) \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Scăzînd acum fiecare ecuaţie, pe rînd din relaţia (*) obţinem

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$$

74. Notînd $x + y = u$ şi ţinînd seama de ecuaţia $xy = 2$ obţinem

$$3u^3 - 13u^2 + 13u - 3 = 0$$

ecuaţie care ne dă $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = \frac{1}{3}$.

Pentru rezolvarea sistemului dat este necesar să rezolvăm sistemele fundamentale

$$(a)\ \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 2 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} x + y = \frac{1}{3} \\ xy = 2 \end{cases}$$

75. a) Discriminantul ecuaţiei este:
$\Delta = \alpha^2 m^2 + 2(\alpha^2 - 4)m + \alpha^2 + 8$ şi acesta este la rîndul lui pozitiv pentru $\alpha \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

b) Pentru satisfacerea inegalităţii date între rădăcini trebuie ca m să satisfacă inecuaţia

$$\frac{m(\alpha - 1) + \alpha + 1}{m - 1} > 0$$

76. Notînd cu $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ respectiv trinoamele de sub radicali, observăm că $P_3(x) - P_1(x) - P_2(x) = 0$ pentru orice x real.
Din ecuaţia dată şi din observaţia făcută rezultă:

$$P_1(x)P_2(x)P_3(x) = 0$$

Pentru ca toate rădăcinile ecuaţiei date să fie reale trebuie ca toţi discriminanţii celor trei trinoame să fie pozitivi sau nuli ceea ce conduce la $m \in \left[1, \frac{8+\sqrt{52}}{3}\right]$

77. Întrucît membrul stîng al ecuaţiei este întreg, atunci şi $2x - 1 = k$; de aici $x = \frac{k+1}{2}$ şi fracţia din stînga devine $\frac{2k-1}{k+3} = 2 - \frac{7}{k+3}$ şi trebuie să fie întreagă.
Pentru aceasta este necesar şi suficient ca $k + 3 = \pm 1$ sau $k + 3 = \pm 7$, iar apoi rezultă şi valorile lui x.

4. INECUAŢII ŞI SISTEME DE INECUAŢII

3. Mai întîi trebuie ca $x + 3 \geqslant 0$, $x - 9 \geqslant 0$, $5 - x \geqslant 0$ ceea ce este contradictoriu. Inecuaţia nu are soluţie.
4. Ţinînd seama că $x^2 = |x|^2$ inecuaţia dată se mai poate scrie

$$\frac{(1+x)(2+x)}{(|x|-2)(|x|+1)} > -3x$$

Pentru $x > 0$ ea se scrie $\frac{2+x}{x-2} > -3x$ şi ne dă soluţia

$$x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (2, \infty)$$

Pentru $x < 0$ inecuaţia devine $\frac{1+x}{1-x} < 3x$ şi nu ne dă nici o soluţie negativă.
5. Inecuaţia dată este echivalentă cu

$\frac{3x^2 - x - 7}{(x-1)(2x-3)} > 0$ care ne dă $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{85}}{6}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{85}}{6}\right)$

6. Mai întîi trebuie ca $13 - x^2 > 0$ sau $x \in (-\sqrt{13}, \sqrt{13})$ Dacă $x < 1$ membrul din stînga este negativ şi simplificînd cu el găsim

$\frac{x+1}{\sqrt{13-x^2}} \leqslant 1$ și obținem pentru x intervalul $x \in [-2, 3]$ deci ținînd seama de condiția $x < 1$ avem $x \in [-2, 1]$ Dacă $x > 1$ simplificăm cu $x - 1$ și avem

$$\frac{x+1}{\sqrt{13-x^2}} > 1 \text{ care ne dă } x \in [-\infty, -2] \cup (3, \infty)$$

deci soluția inecuației dată este

$x \in [-2, 1] \cup (3, \sqrt{13})$

7. Inecuația dată este echivalentă cu $\frac{3x^2-8x+5}{x^2-5x+4} = \frac{3x-5}{x-4} > 0$ care ne dă soluția $x \in \left(-\infty, \frac{5}{3}\right) \cup (4, \infty)$

8. Mai întîi trebuie să avem $(x-3)(2-x) \geqslant 0$ adică $x \in (2, 3)$. În acest interval membrul drept este pozitiv și deci putem ridica inecuația la patrat ajungînd la $10x^2 + 7x + 10 > 0$ și această inecuație este adevărată pentru orice x. Deci soluția problemei este $x \in [2, 3]$.

9. Inecuația dată este echivalentă cu $\frac{x^2-12x-1}{(x+3)(3x-2)} \geqslant 0$ ale cărei soluții sînt $x \in (-\infty, -3) \cup \left(6-\sqrt{37}, \frac{2}{3}\right) \cup (6+\sqrt{37}, \infty)$.

10. Inecuația dată este echivalentă cu

$$0 < \frac{2x-1}{x+1} < 1$$

11. Inecuația dată este echivalentă cu $\frac{x^2-2x}{2x-1} > 1$ și aceasta deoarece baza logaritmului e subunitară.

12. Inecuația dată este echivalentă cu $\lg_3(x^2-2x) < -1$ sau $\log_3(x^2-2x) > 1$, adică $0 < x^2-2x < \frac{1}{3}$ sau $x^2-2x > 3$.

13. Mai întîi trebuie ca $x > 0$. Apoi logaritmăm inecuația dată în baza 2 (baza fiind mai mare ca unu relația de ordine se păstrează).

$\frac{1}{2}\log_2\sqrt{x}.\ \log_2 x > 1$ adică $\lg_2^2 x > 4$, adică, mai departe $2 < \log_2 x$ sau $\lg_2 x < -2$, de unde $x > 4$ sau $0 < x < \frac{1}{4}$

14. Mai întîi trebuie ca $x^2-4x-5 > 0$ adică $x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$ și $x^2-4x-5 \neq 1$ adică $x \neq 2 \pm \sqrt{10}$.

Apoi inecuaţia dată este echivalentă cu sistemele de inecuaţii simultane

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{x^2 - 4x - 5} < 1 \\ 0 < \frac{x-1}{3} < 1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4x - 5} > 1 \\ \frac{x-1}{3} > 1 \end{cases}$$

15. Inecuaţia dată este echivalentă cu $\lg_{3x-2} \frac{5x-4}{(x-2)(3x-2)} > 0$ şi impune condiţiile $3x - 2 > 0$, $3x - 2 \neq 1$, care în caz că-s satisfăcute ne conduc la sistemul de inecuaţii simultane echivalent

$$\begin{cases} 0 < 3x - 2 < 1 \\ 0 < \frac{5x-4}{(x-2)(3x-2)} < 1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} 3x - 2 > 1 \\ \frac{5x-4}{(x-2)(3x-2)} > 1 \end{cases}$$

16. Trecînd toţi logaritmii în baza 3 obţinem

$$\frac{2 + \lg_3 x}{(\lg_3 x)(1 + \lg_3 x)} > 1$$

Notînd $\lg_3 x = u$ avem $u \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (0, \sqrt{2})$ ceea ce, ţinînd seama că baza logaritmilor este supraunitară ne conduce la $x \in [3^{-\sqrt{2}}, 3^{-1}) \cup (1, 3^{\sqrt{2}})$

17. Primele condiţii sînt $2x - 5 > 0$, $2x - 5 \neq 1$ şi inecuaţia dată este echivalentă cu inecuaţiile simultane

$$\begin{cases} 0 < 2x - 5 < 1 \\ \left(\frac{3x+8}{x-3}\right)^2 < 1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} 2x - 5 > 1 \\ \left(\frac{3x+8}{x-3}\right)^2 > 1 \end{cases}$$

18. Inecuaţia dată, dacă $x > 0$, $y > 0$, este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < \lg_y x < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \\ \lg_y (x) > 1 \end{cases}$$

Soluţiile celor două sisteme, deci soluţia problemei este formată din punctele aflate în partea haşurată a planului din figura 5.3.

19. Condiţiile problemei sînt $x > 0$, $y \geqslant 0$, $\lg_y\left(\frac{x}{y}\right) > 0$ şi în aceste condiţii inecuaţia dată este echivalentă cu

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < \lg_y \left(\frac{x}{y}\right) < 1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x > 1 \\ \lg_y \frac{x}{y} > 1 \end{cases}$$

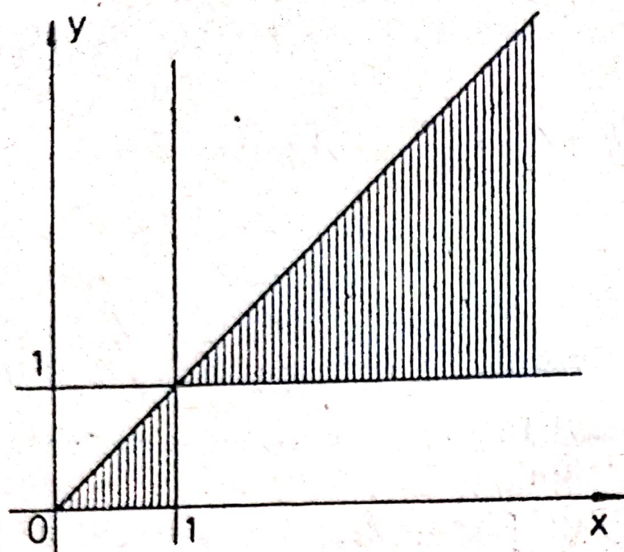


Fig. 5.3.

Soluţiile problemei sînt coordonate ale punctelor din domeniile haşurate în planul din figura 5.4.

20. Calculînd membrul stîng găsim inegalitatea echivalentă.

$$(3{,}8 - x)^2 + (2{,}9 - y)^2 \leqslant \frac{1}{16}$$

a cărei soluţie în numere întregi este $x = 4$, $y = 3$ (Pentru obţinerea acestei soluţii scriem mai întîi inegalităţile evidente $|3{,}8 - x| < \frac{1}{4}$, $|2{,}9 - x| < \frac{1}{4}$, de unde rezultă soluţiile de mai sus).

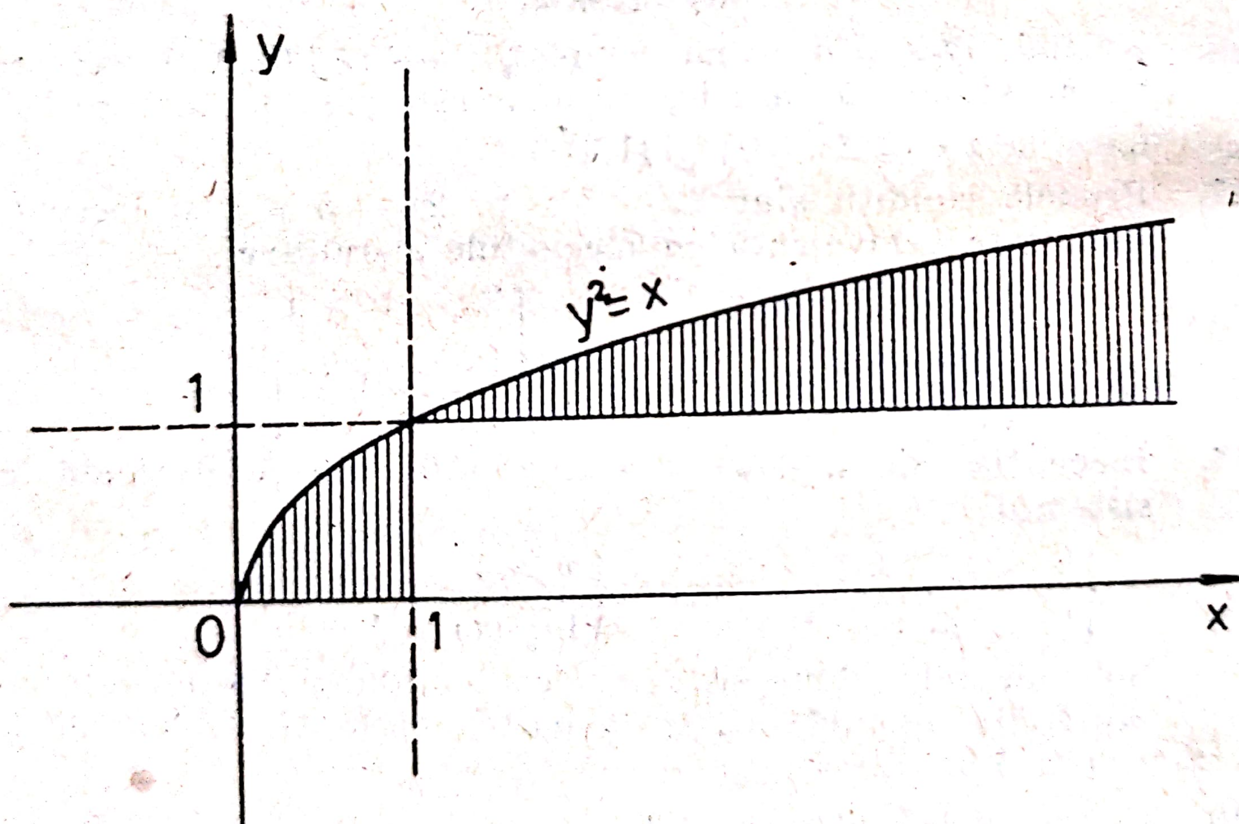


Fig. 5.4.

21. Inecuaţia dată este echivalentă cu $(ax + 1 - a^2)(ax - a(1 - a)) < 0$. Membrul stîng al inecuaţiei se anulează pentru $x_1 = \frac{a^2 - 1}{a}$ şi $x_2 = 1 - a$. Considerăm două cazuri

a) $\frac{a^2-1}{a} < 1-a$, adică $\frac{a^2-1}{a} < -1 < 1 < 1-a$ care dă

soluţia $a \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$

b) $1-a < \frac{a^2-1}{a}$, adică $1-a < -1 < 1 < \frac{a^2-1}{a}$ care dă

soluţia $a \in (2, \infty)$.

22. Discriminantul trinomului din membrul stîng este $\Delta = (a^2 + 1)^2 > 0$, $\forall\ a$, deci în principiu soluţiile trebuiesc căutate în afara rădăcinilor $x_1 = a$, $x_2 = -\frac{1}{a}$. Întrucît intervalul în care se află soluţia trebuie să se afle în intervalul $[-2, 2]$ este necesar ca $a < 0$. În aceste condiţii avem $x \in \left(a, -\frac{1}{a}\right)$ şi acest interval trebuie să fie cuprins în $[-2, 2]$, adică $-2 \leqslant a < -\frac{1}{a} \leqslant 2$, ceea ce ne dă $a \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right]$.

23. Notînd $4^{\cos^2 \pi x} = u$, inecuaţia dată se poate scrie $\frac{4}{u} + 3 \cdot u \leqslant 8$ unde $u > 0$ şi se obţin soluţiile $u \in \left[\frac{2}{3}, 2\right]$ care dacă ţinem seama de faptu că funcţia exponenţială este crescătoare ne dă pentru $\cos^2 x$ inegalităţile $\cos^2 x < \frac{1}{2}$, căci $4^{\cos^2 \pi x} > \frac{2}{3}$ este adevărată pentru orice x. De aici rezultă $|\cos x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ sau $|x| > \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

24. Inegalitatea este echivalentă cu $4^x + 5.2^x + 2 > 4$ care după ce se notează $2^x = u$ se rezolvă în mod analog cu inecuaţia precedentă.

25. Inecuaţia dată este echivalentă cu $\lg_{3x^2+1} \frac{2}{\sqrt{3x^2+1}} < 0$ (am ţinut seama că baza este mai mare ca 1).

26. Inecuația dată este echivalentă cu $\lg_{x^2}\dfrac{4x-5}{x(x-2)} \geqslant 0$ și soluțiile se obțin din sistemul

$$\begin{cases} x^2 < 1 \\ 0 < \dfrac{4x-5}{x(x-2)} < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 > 1 \\ \dfrac{4x-5}{x(x-2)} > 1 \end{cases}$$

27. Inecuația dată se poate scrie $(6^x-5)(5^{2x}-6) < 0$ care ne dă după ce se studiază semnul fiecărui factor

$$x \in \left(\frac{\lg 6}{\lg 25}, \frac{\lg 5}{\lg 6}\right)$$

28. Ținînd seama de proprietățile logaritmilor putem scrie

$$\lg_{1/2}\lg_{1/3}\frac{x-1}{x+1} = \lg_{1/2}\frac{\lg_3\dfrac{x-1}{x+1}}{-1} = \lg_{1/2}\lg_3\frac{x+1}{x-1} = -\lg_2\lg_3\frac{x+1}{x-1}$$

de unde inecuația dată se scrie

$$\lg_2\lg_3\frac{x+1}{x-1} < 0 \text{ și mai departe}$$

$$0 < \lg_3\frac{x+1}{x-1} < 1, \text{ de unde } 1 < \frac{x+1}{x-1} < 3$$

29. În primul rînd trebuie ca $\lg_a\dfrac{3-2x}{1-x} > 0$ adică dacă $0 < a < 1$

$0 < \dfrac{3-2x}{1-x} < 1$ iar dacă $a > 1$, $\dfrac{3-2x}{1-x} > 1$

În aceste condiții în ecuația dată se ridică la puterea a doua

$$\lg_a\frac{3-2x}{1-x} < 1$$

Se analizează și aici separat cazurile $a < 1$ și $a > 1$
Dacă $a < 1$ trebuie să avem

$\dfrac{3-2x}{1-x} > a$ iar dacă $a > 1$ trebuie să avem $\dfrac{3-2x}{1-x} < a.$

30. Inecuația dată se poate scrie sub forma

$$(2x^2-3x+1)(3-2^{\sqrt{x}}) < 0$$

și are soluțiile $x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right) \cup \lg_2^3, \infty)$



31. Inecuaţia dată este echivalentă cu

$$\frac{|x^2 + 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \geqslant 1$$

sau cu $|x^2 + 4x| - x^2 - |x + 5| + 3 \geqslant 0$ care după examinarea separată a cazurilor $x \in (-\infty, -4)$, $x \in (-4, 0)$, $x \in (0,5)$ şi $x \in (5, \infty)$ ne conduce la soluţiile

$$x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{5}, \infty\right]$$

32. Inecuaţia dată este echivalentă cu

$\lg \lambda^2_{\operatorname{tg} x} - 3 \lg \lambda_{\operatorname{tg} x} - 4 < 0$ şi conduce la $-1 < \lg \lambda_{\operatorname{tg} x} < 4$ ceea ce impune ca prima condiţie $\operatorname{tg} x > 0$.
Aceste ultime inegalităţi se analizează separat pentru $\operatorname{tg} x < 1$ şi pentru $\operatorname{tg} x > 1$
Pentru $\operatorname{tg} x < 1$ avem de rezolvat inecuaţiile $\lambda \operatorname{tg} x < 1$ şi $\operatorname{tg}^4 x < \lambda$.
Pentru $\operatorname{tg} x > 1$ avem de rezolvat inecuaţiile

$$\lambda \operatorname{tg} x > 1 \text{ şi } \operatorname{tg}^4 x > \lambda.$$

33. Inecuaţia dată este echivalentă cu sistemul de inegalităţi simultane
$$\begin{cases} x - 3x^2 - 1 < 0 \\ x - 3x^2 > 0 \end{cases}$$

34. Notăm $e^x = u$ $(u > 0)$ şi avem de rezolvat inecuaţia $u^2 + 3u - 4 < 0$ cu soluţiile $u \in (0, 1)$ adică $x \in (-\infty, 0)$

35. Inecuaţia dată este echivalentă cu

$0 < \frac{x + 1}{x - 1} < 1$ cu soluţiile $x \in (-\infty, -1)$

36. Inecuaţia este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < \frac{x^2 - x - 1}{x} \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x > 1 \\ \frac{x^2 - x - 1}{x} \geqslant 1 \end{cases}$$

care ne dau soluţiile $x \in \left(\frac{1 + 5}{2}, \infty\right)$

1. Polinomul dat poate fi pus sub forma

$$P(x) = (x^2 - 1)^2\,[nx^{n-1} + (n-1)\,x^{n-2} + \ldots + 3x^2 + 2x + 1]$$

2. Polinomul dat se poate pune sub forma

$$P(x) = (x^2 - 1)^2\,\,[(2n-1)\,x^{2n-2} - (2n-2)\,x^{2n-3} + \ldots +$$
$$+ x^2 - x + 1].$$

Pentru demonstrarea divizibilităţii, atît în această problemă cît şi în precedenta se putea verifica destul de uşor că $P(\pm 1) = 0$ şi $P'(\pm 1) = 0$, adică $P(x) = 0$ are pe $x = \pm 1$ rădăcină multiplă de ordinul al doilea.

3. Pentru ca polinomul $P(x)$ să fie divizibil cu $x^2 + x + 1$ este necesar şi suficient ca $P(a) = 0$ unde $a^2 + a + 1 =$
$= 0$
Din $a^2 + a + 1 = 0$ rezultă $a^3 = 1$ şi avem

$$P(a) = (a^{4n+3} + a^{2n+1} - a^n)^2 - a^{n+2} = (a^n + a^{2n+1} - a^n)^2 -$$
$$- a^{n+2} = a^{4n+2} - a^{n+2} = a^{n+2} - a^{n+2} = 0$$

4. Ca şi în problema precedentă vom arăta că $P(a) = 0$ unde $a^2 + a + 1 = 0$; $(a^3 = 1)$. Avem

$$P(a) = [(1 + a)^{6n+1} + a^2 + 1]^p - a^3 = [(-a^2)^{6n+1} + a^2 +$$
$$+ 1]^p - 1 = (-a^2 + a^2 + 1)^p - 1 = 0$$

5. Ca şi în problema (3) vom arăta că $P(a)=0$ unde $a^2 + a + 1 =$
$= 0$ $(a^3 = 1)$. Avem :

$$P(a) = (1 + a)^{6n+1} - (1 + a)^{6n+1} = (-a^2)^{6m+1} - (-a^2)^{6n+1} = -$$
$$-a^2 + a^2 = 0$$

Pentru a afla cîtul presupunem $m > n$. Atunci $P(x) = (1 +$
$+x)^{6n+1}\,[\,(1+x)^{6(m-n)} - 1\,] = (1+x)^{6n+1}\,[(x^2 + 2x + 1)^{3(m-n)} -$

$$1] = (1+x)^{6n+1}\Big[\sum_{k=0}^{3(m-n)} C_{3(m-n)}^{k}\,(x^2+x+1)^{3(m-n)-k}x^k - 1\Big] =$$

$$= (1+x)^{6n+1}\left[\sum_{k=0}^{3(m-n)-1} C_{3(m-n)}^{k}(x^2+x+1)^{3(m-n)-k}x^k + x^{3(m-n)} - 1\right] =$$

$$= (1 + x)^{6n+1} \left[\sum_{k=0}^{3(m-n)-1} C_{3(m-n)}^{k} (x^2 + x + 1)^{3(m-n)-k} x^k + \right.$$

$$\left. + (x^3 - 1) ((x^3)^{m-n-1} + (x^3)^{m-n-2} + \ldots + 1) \right] = (1 + x)^{6n+1} (1 +$$

$$+ x + x^2) \left[\sum_{k=0}^{3(m-n)-1} C_{3(m-n)}^{k} (x^2 + x + 1)^{3(m-n)-k-1} x^k + \right.$$

$$\left. + (x - 1) \sum_{k=1}^{m-n} x^{3(m-n-k)} \right].$$

De aici apare evident cîtul diviziunii.

6. Polinomul divizor poate fi pus sub forma $Q(x) = (x + 1) (x - 2) (x - 3)$ şi se verifică cu uşurinţă că $P(-1) = P(2) = P(3) = 0$, ceea ce demonstrează divizibilitatea lui $P(x)$ cu $Q(x)$.

7. Notînd cu $x^2 + px + q$ codivizorul maxim avem identităţile

$$P(x) = (x^2 + px + q) (x^3 + ax^2 + bx + c)$$
$$Q(x) = (x^2 + px + q) (x^2 + mx + n)$$

Egalînd coeficienţii din cele două părţi ale identităţii obţinem sistemul de şapte ecuaţii cu şapte necunoscute.

(x) $a + p = 1, \quad cp + bq = 1, \quad qc = -3 \quad m + p = -3,$
$n + q + mp = 1, \quad np + mq = -1, \quad qn = -6$

şi încă două ecuaţii pentru determinarea coeficienţilor λ şi μ

$$b + q + ap = -\lambda$$
$$c + bp + aq = -\mu$$

8. Am arătat în paragraful referitor la identităţi că

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y) (y + z) (z + x)$$

astfel că trebuie să arătăm că $P(x, y, z)$ este divizibil cu $x + y$ cu $y + z$ şi cu $z + x$. Avem $P(x, -x, z) = z^{2n-1} - x^{2n+1} + x^{2n+1} - z^{n+1} = 0$ şi la fel $P(x, y, -y) = P(x, y, -x) = 0$

9. Condiția necesară și suficientă este $m \vdots n$. Demonstrația se face cu ajutorul identității împărțirii.

10. $R : (x^2 + x + 2)^2$

11. $R : (2x - 1)^3 (x + 1)^2$

12. $R : (x + 5)^2 (x - 3)^2$

13. a)
$$\frac{1}{2^{n/2}} P(1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^n + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^n =$$
$$= 2 \cos \frac{n\pi}{4}$$

Valorile pe care le ia această expresie sînt ± 2 și $\pm \sqrt{2}$

b) Ecuația de rezolvat este $\left(\frac{z+i}{z-1}\right)^n = -1$. Scriem numerele complexe $z + i$ și $z - i$ sub forma trigonometrică și avem $\cos 2n\varphi + i \sin 2n\varphi = \cos \pi + i \sin \pi$ în care

$\cos \varphi = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$, $\varphi = \text{arc tg} \frac{1}{z}$. Soluția

ecuației este $\varphi = \frac{2(k+1)\pi}{2n}$ sau $z_k = \text{ctg} \frac{(2k+1)\pi}{2n}$

$$k = 0, 1 \ldots 2n-1,$$

c) Se observă imediat rezultatul cerut.

d) expresia de transformat în produs se poate scrie

$$(1 + \text{ctg}\, a_k)(1 + \text{ctg}^2 a_k) = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + a_k\right)}{\sin a_k \sin^2 a_k}$$

14. Polinomul dat se scrie succesiv

$$P(x) = x^n - a^n - nx\, a^{n-1} + na^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} +$$
$$+ \ldots + a^{n-1} - na^{n-1})$$

Polinomul din paranteză se anulează pentru $x = a$ deci se divide cu $x - a$ și atunci $P(x)$ se divide cu $(x - a)^2$.

15. Notînd expresia $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = P(x)$, pentru a îndeplini condiția de divizibilitate cerută este necesar și suficient ca $P(-y - z) = 0$. Calculele ne dau

$P(-y-z) = -(y+z)^3 + y^3 + z^3 - k(y+z)yz = -$
$-(k+3)yz(y+z)$, de unde rezultă condiția $k = -3$.

16. Polinomul divizor $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2 + 1)$ și pentru a studia divizibilitatea lui $P(x)$ cu $Q(x)$ trebuie să calculăm $P(-1)$, $P(i)$, $P(-i)$. Avem:
$P(-1) = 0$, $P(i) = 1 + i + i^2 + i^3 = 0$ $P(-i) = 1 - i + i^2 + i = 0$ deci $P(x)$ e divizibil cu $Q(x)$.

17. Dacă $x^4 + 1$ e divizibil cu $x^2 + px + q$, putem scrie $x^4 + 1 = (x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q')$ iar relațiile de identificare sînt $p + p' = 0$, $pp' + q + q' = 0$, $pq' + qp' = 0$, $qq' = 1$
Soluțiile acestui sistem sînt $p = \pm\sqrt{2}$, $q = 1$, $q' = 1$, $p' = \mp\sqrt{2}$.

18. Întrucît $1, x_1, x_2, \ldots x_n$ sînt rădăcinile polinomului $P(x) = x^n - 1$ are loc identitatea.

$$x_1^{n-1} + x_2^n + \ldots + x + 1 = (x - x_2)(x - x_3)\ldots x - x_n)$$

Făcînd în această identitate $x = 1$ obținem relația cerută

19. Pornind de la egalitatea

$x_i^n + x_i^{n-1} + \ldots x_i + 1 = 0$ și punîndu-le sub forma

$\sum_{k=0}^{n} (x_i - 1 + 1)^k = 0 \quad i = 1, 2, \ldots n$, tragem concluzia că numerele $x_i - 1$ sînt rădăcinile ecuației.

$\sum_{k=0}^{n} (x+1)^k = 0$, de gradul n în x sau că

$$\frac{(x+1)^{n+1} - 1}{x + 1 - 1} = \frac{(x+1)^{n+1}}{x^{n+1}} = 0 \text{ pentru } x = x_i - 1$$

Mai departe făcînd transformata în $\frac{1}{x}$ a ecuației de mai sus avem

$$\frac{\left(\frac{1}{x} + 1\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{(1+x)^{n+1} - x^{n+1}}{x^n} = 0$$

Dezvoltînd ultima ecuaţie după puterile lui x obţinem

$(n+1)x^n + \frac{(n+1)n}{2}x^{n-1} + \ldots = 0$ sau

$x^n + \frac{n}{2}x^{n-1} + \ldots = 0$ şi utilizînd relaţiile între rădăcini şi coeficienţi găsim

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i - 1} = -\frac{n}{2}.$$

20. Din condiţiile problemei avem identitatea

$x^n + p_1x^{n-1} + \ldots p_{n-1}x + p_n = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$

Făcînd $x = i$ avem $(p_0 = 1)$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k i^{n-k} = \prod_{k=1}^{n}(i - x_k) \text{ şi } x = -1$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(-i)^{n-k} = (-1)^n \prod_{k=1}^{n}(i + x_k)$$

Înmulţind aceste două egalităţi membru cu membru avem egalitatea cerută.

21. Notăm $x^3 = y$ şi avem sistemul de ecuaţii

$$y + px + q = 0$$

$$y + p_1x + q_1 = 0$$

ale cărui soluţii sînt $x = \frac{q - q_1}{p - p_1}$, $y = \frac{p_1q - pq_1}{p - p_1}$ pe care introducîndu-le în substituţia iniţială găsim condiţiile cerute sub forma

$$(q - q_1)^3 = (pq_1 - p_1q)(p - p_1)^2.$$

22. Scriem ecuaţia dată în forma echivalentă

$x^2 + \frac{a^2x^2}{(a+x)^2} - \frac{2ax^2}{a+x} = p^2 - \frac{2ax^2}{a+x}$ ($x = a$ nu poate fi rădăcină), de unde avem

$$\left(x - \frac{ax}{a+x}\right)^2 = p^2 - \frac{2ax^2}{a+x}$$

Punind $\frac{x^2}{a+x} = y$, obținem prin substituție ecuația $y^2 + 2ay -$ $- p^2 = 0$ cu rădăcinile $y_1 = -a + \sqrt{a^2 + p^2}$, $y_2 = -a -$ $- a^2 + p^2$ și sluțiile pentru x sînt

$$x_{1,2} = \frac{y_1}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + ay_1} \quad x_{3,4} = \frac{y_2}{2} \pm \sqrt{\frac{y_2^2}{4} + ay_2}$$

Se observă că $y_1 > 0$ și deci $x_1x_2 < 0$ adică avem 2 rădăcini reale, o rădăcină pozitivă și una negativă. Pentru soluțiile ce se obțin din y_2 observăm că numai dacă $y_2^2 + 4ay_2 > 0$ ele sînt reale și cum $y_2 < 0$, trebuie ca $y_2 + 4ay \leqslant 0$ adică $- a - a^2 + p^2 + 4\,a \leqslant 0$ sau $p_2^2 \geqslant 8\,a^2$

Întrucît $ay < 0$ rezultă $\sqrt{\frac{y_2^2}{2} + ya} < \left|\frac{y_2}{2}\right|$ ceea ce ne arată că ambele rădăcini provenind din y_2 sînt negative.

În concluzie dacă $m > 8a^2$, toate rădăcinile sînt reale, una din ele fiind pozitivă și trei negative.

23. a) Relațiile dintre rădăcini și coeficienți și relația dată ne dau:

$x_1 + x_2 + x_3 = -p$, $x_1(x_1 + x_2 + x_3) = q$ $x_1\,x_2\,x_3 = -r$ de unde $x_1 = -\frac{q}{p}$ iar x_2 și x_3 rezultă din sistemul fundamental.

$$x_2 + x_3 = \frac{q - p^2}{p} \qquad x_2x_3 = \frac{rp}{q}$$

b) $x_1 = -\frac{p}{2}$ iar x_2 și x_3 rezultă din sistemul fundamental

$$x_2 + x_3 = -\frac{p}{2}, \qquad x_2\,x_3 = +\frac{2r}{p}$$

24. $R: \sum_{i=k}^{n} C_i^k$

25. $R: (k-2)C_n^{k-2} + n\,C_n^{k-1} - kC_n^k$

26. Scriind $\left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^j\right) = \sum_{k=0}^{2n} A_k x^k$, obținem prin identificare

$$A_k = \sum_{\substack{k=i+j \\ 0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant n}} (-1)^k$$

Dacă $k \leqslant n$, $A_k = \dfrac{1+(-1)^k}{2}$

Dacă $k > n$ $A_k = 0$ pentru k impar

$A_k = (-1)^n$ pentru k par.

În concluzie $A_k = 0$ pentru orice k impar; dacă n este par toți coeficienții sînt egali cu 1 iar dacă n este impar semnele coeficienților alternează, păstrînd valoarea absolută egală cu 1.

27. Notînd $\sum_{k=0}^{2n} A_k x^k = \left[\sum_{i=0}^{n} (i+1)x^i\right]\left[\sum_{j=1}^{n} (j+1)x^j\right]$, avem

$$A_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ 0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant n}} (i+1)(j+1) = \sum_{\substack{i+j=k \\ 0\leqslant j\leqslant n \\ 0\leqslant i\leqslant n}} (i_j + k + 1).$$

şi trebuie să analizăm două cazuri: $k \leqslant n$ şi $n < k \leqslant 2n$. În primul caz indicele i va lua valorile $0, 1, \ldots k$ iar valorile lui j vor fi $k, k-1 \ldots 0$. Atunci

$$A_k = \sum_{i=0}^{k} (i(k-i) + k + 1) = k\sum_{i=0}^{k} i - \sum_{i=0}^{k} i^2 + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k^2(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

În cazul $n < k \leqslant 2n$ notăm $k = n + k'$ unde $1 \leqslant k' \leqslant n$ şi indicele i va lua valorile $k', k'+1, \ldots n$. Atunci

$$A_k = \sum_{i+j=h}^{n} (ij + k + 1) = \sum_{i=k-j}^{n} i(l-i) + (l+1) =$$

$$= k\sum_{i=k-n}^{n} i - \sum_{i=k-n}^{n} i^2$$

$$+ (k+1)(2n-k+1) = \frac{(2n-k+1)(k^2+2k+2)}{2} +$$

$$+ \frac{(k-n-1)(k-n)(2k-2n-1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

28. Conform teoremei lui Bezont $r_1 = P(x_1)$, $r_2 = P(x_2)$, $r_3 = P(x_3)$ și notînd cu $r(x)$ $ax^2 + bx + c$ restul împărțirii polinomului $P(x)$ la $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ avem ecuațiile :

$$r_1 = ax_1^2 + bx_2 + c$$

$$r_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$$

$$r_3 = ax_3^2 + bx_3 + c$$

de unde se vor determina necunoscutele a, b, c.

29. Considerăm polinomul

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \frac{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (x - x_k)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (x_i - x_k)} - P(a)$$

unde $P(x)$ este un polinom de grad stricat mai mic ca $n - 1$. Observăm că gradul lui $Q(x)$ este $n - 1$ și că se anulează pentru oricare valoare $x = x_i$, $i = 1, 2, \ldots n$. De aici rezultă că polinomul $Q(x)$ este identic nul. Coeficientul termenului de grad cel mai înalt, adică $n - 1$, este $\sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i)}{\prod_{\substack{k=1\\k+i}}^{n} (x_i - x_k)}$ și va trebui să fie nul.

30. Mai întîi observăm că suma din membrul drept este un polinom $\varphi(x)$ de gradul n ca și cel din membrul stîng. Calcule simple ne dau

$$\varphi(0) = P(0)$$

$$\varphi(1) = P(0) + \Delta P(0)$$

Dacă $\Delta P(0) = P(1) - P(0)$, avem $\varphi(1) = P(1)$.

$$\varphi(2) = P(0) + 2\Delta P(0) + \Delta^2 P(0)$$

Dacă $\Delta^2 P(0) = \Delta P(1) - \Delta P(0) = P(2) - P(1) - P(1) + P(0) = P(2) - 2P(1) + P(0)$ rezultă $\varphi(2) = P(2)$.

În general dacă $\Delta^k P(0) = \Delta^{k-1} P(1) - \Delta^{k-1}(P)0)$ constatăm că $\varphi(k) = P(k)$, pentru $k = 1, \ldots n$.

În concluzie avem două polinoame $\varphi(x)$ și $P(x)$ de gradul n care iau valori egale pentru $n+1$ valori ale variabilei, ceea ce demonstrează identitatea lor (Teoremă: Orice polinom de grad n care se anulează pentru $n+1$ valori ale variabilei este identic nul).

31. Relațiile dintre rădăcini și coeficienți ne dau

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 = -18$$

$$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -m$$

$$S_4 = x_1x_2x_3x_4 = -175$$

Între mărimile S_1, S_2, S_3, S_4 avem identitățile

$$S_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2S_2$$

$$S_2^2 = x_1^2x_2^2 + x_3^2x_4^2 + (x_1^2 + x_2^2)(x_3^2 + x_4^2) + 2(S_1S_3 - S_4).$$

$$S_3^2 = (x_1^2 + x_2^2)x_3^2x_4^2 + x_1^2x_2^2(x_3^2 + x_4^2) + 2S_2S_4$$

De aici notînd $u = x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$, $v = x_1^2 \cdot x_2^2$, $w = x_3^2x_4^2$

avem $2u = 100$

$$u^2 + v + w = 16\,m - 26$$

$$u(v + w) = m^2 - 6\,300$$

$$vw = 175^2$$

Introducînd $u = 50$ și ecuația a doua în cea de-a treia se obțin pentru m două valori $m_1 = 200$, $m_2 = 600$.

Pentru $m = 200$ ecuația a treia și a patra ne dau pentru x_1x_2 și x_3x_4 soluțiile

I $x_1x_2 = 25$ $\qquad$ $x_3x_4 = -7$

II $x_1x_2 = -25$ $\qquad$ $x_3x_4 = 7$

ceea ce ne dă soluțiile $\quad x_1 = x_2 = 5, \quad x_3 = 1 \;\; x_4 = 7$

$\qquad x_1 = -x_2 = 5 \;\; x_3 = 1 \;\; x_4 = 7$

și toate combinațiile ce se obțin cu ele.
În cazul $m = 600$ ecuația se rezolvă în mod analog.

b) Pentru ecuaţia ce se cere a fi construită avem

$$\bar{S}_1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{S_3}{S_4}$$

$$\bar{S}_2 = \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_1x_4} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_2x_4} = \frac{S_2}{S_4}$$

$$\bar{S}_3 = \frac{1}{x_1x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_2x_4} + \frac{1}{x_1x_3x_4} + \frac{1}{x_2x_3x_4} = \frac{S_1}{S_4}$$

$$\bar{S}_4 = \frac{1}{S_4}$$

6. PROBLEME REFERITOARE LA NUMERE. ANALIZA COMBINATORIE

1. Ridicînd membrul drept la puterea a treia avem

$$E^3 = 18 + 3\sqrt[3]{81 - 80}\,E, \text{ de unde}$$

$$E^3 - 3E - 18 = 0 \text{ care ne dă soluţia } E = 3$$

2. Formînd patrate perfecte în care doi din cei trei termeni să constituie patratele, iar al treilea termenul mixt (dublul produsului primelor doi) găsim pentru x trei valori din condiţia ca E să fie patrat perfect şi anume $x_1 = 3\,620$, $x_2 = 910$ $x_3 = -$ $- 1\,766$.

3. Procedînd în mod analog cu problema precedentă găsim soluţia $x = 1\,972$ (celelalte valori ale lui x pentru care E este patrat perfect sînt 514 şi 1 947).

4. Avem evident $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$ şi

$$(\sqrt{2} - 1)^n = (\sqrt{2})^n - C_n^1(\sqrt{2})^{n-1} + \ldots = \sqrt{A} - \sqrt{B}$$

$$(\sqrt{2} + 1)^n = (\sqrt{2})^n + C_n^1(\sqrt{2})^{n-1} + \ldots = \sqrt{A} + \sqrt{B}$$

unde A se obţine introducînd sub radicali coeficientul de pe lîngă $\sqrt{2}$ (în cazul n impar) sau scriindu-l ca rădăcina pătrată dintr-un număr întreg la patrat (cazul n par) şi B se obţine la fel cu A.

Înmulţind cele două egalităţi termen cu termen obţinem

$$A - B = 1, \text{ de unde rezultatul cerut}$$

5. Considerăm ecuaţia $x^3 - 1$, cu rădăcinile $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ $(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0, \varepsilon^3 = 1)$ şi înlocuind aceste rădăcini în dezvoltarea binomială $(1 + x)^n$, obţinem :

(x) $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots$

(xx) $(1 + \varepsilon)^n = C_n^0 + \varepsilon C_n^1 + \varepsilon^2 C_n^2 + \varepsilon^3 C_n^3 + \ldots$

(xxx) $(1 + \varepsilon^2)^n = C_n^0 + \varepsilon^3 C_n^1 + \varepsilon^4 C_n^2 + \varepsilon^6 C_n^3 + \ldots$

Se poate verifica uşor că

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } k \not\equiv 0 \pmod 2) \\ 3 \text{ dacă } k \equiv 0 \pmod 3) \end{cases}$$

Adunăm relaţiile binomiale de mai sus şi obţinem

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}[2^n + (1 + \varepsilon)^n + (1 + \varepsilon^2)^n]$$

Ştim că $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$ şi calculăm uşor că $1 + \varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$, $1 + \varepsilon^2 = \cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi r}{3}$ cu acestea

$$S_0 = \frac{1}{3}\left(2^n + 2 \cos\frac{n\pi}{3}\right)$$

Pentru calculul lui S_1 înmulţim (xx) cu ε^2 şi relaţia (xxx) cu ε şi adunînd din nou rezultatele, obţinem

$$S_1 = \frac{1}{3}(2^n + \varepsilon^2(1 + \varepsilon)^n + \varepsilon(1 + \varepsilon^2)^n = \frac{1}{3}\left[2^n + 2 \cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right]$$

6. Se procedează în mod analog cu problema precedentă. Se porneşte de la ecuaţia $x^4 - 1 = 0$ cu rădăcinile $1, -1, i, -i$ şi se introduc în dezvoltarea $(1 + x)^n$
În final se obţin

$$S_0 = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

7. Folosim identitatea $\lg_k N = \frac{1}{\lg_N k}$ cu care suma devine

$$\sum_{k=2}^{1975} \frac{1}{\lg_k N} = \sum_{k=2}^{1975} \lg_N k = \lg_N (1975\,!) = 1 .$$

8. Scriind logaritmii în baza 2 avem

$$\lg_{16} 54 = \frac{1 + 3\, lg_2 3}{4} = a, \text{ de unde } \lg_2 3 = \frac{4a - 1}{3} \text{ și}$$

$$\lg_{12} 18 = \frac{1 + 2 \lg_2 3}{2 + \lg_2 3} = \frac{8a + 1}{4a + 5}$$

9. $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$, $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$, $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$, $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

$$1 - 1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$1 + \cos \alpha + i \sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha}{2}\left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$1 - \cos \alpha + i \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2}\left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$1 + \sin \alpha + i \cos \alpha = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

10. $R: x = -1 \quad y = 1$ pentru care $z_1 = -2i$, $z_2 = 2i$

11. $R: \begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{2} \\ y_1 = \sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \sqrt[3]{2} \\ y_2 = -\sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \sqrt[3]{3} \\ y_3 = +\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \sqrt[3]{3} \\ y_4 = -\sqrt{2} \end{cases}$

12. Demonstrăm proprietatea prin inducție completă

$n = 1 \qquad 11^3 + 12^3 = 23 \cdot 133$

$k = p \qquad 11^{p+2} + 12^{2p+1} = 133\ M$

$k = p + 1 \quad 11^{2p+3} + 12^{2p+3} = 11 \cdot 133\,M - 12^{2p+1}) +$

$+ 12^{2p+3} = 11 \cdot 133\,M + 12^{p+1}(12^2 - 11) =$

$= 133(11\,M + 12^{p+1}).$

13. Demonstrația se face în același mod ca și în problema precedentă.

14. $E = 6 \cdot 5^{5n} + 5^{2n-1} = 6 \cdot (5^3)^n \cdot 5^{2n} + 5^{2n-1} = 6(4 \cdot 31 + 1)^n \cdot$ $\cdot 5^{2n} + 5^{2n-1} \equiv 6 \cdot 5^{2n} + 5^{2n-1} \pmod{31} = 31 \cdot 5^{2n-1} \equiv 0$ $\pmod{31}$.

15. Se scrie mai întîi în baza 10 numărul dat în baza 3 obținîndu-se 0,375 și apoi se scrie în baza 2 obținîndu-se 0,011.

16. Numărul 13 se scrie 111 în baza 3. Înmulțindu-l cu el însuși observăm că

$13 = (111)_3$ are ultimele trei cifre 111
$13^2 = (111^2)_3$ are ultimele trei cifre 021
$13^3 = (111^{10})_3$ are ultimele trei cifre 101

. . . .

$13^{11} = (111^{102})_3$ are ultimele trei cifre 021

Numărul $101 = 3^2K + 2$ și deci ultimele cifre ale lui 13^{101} vor fi aceleași ca și ultimele trei cifre ale lui 13^{11}, adică 021.

17. Pornim de la identitatea cunoscută (suma combinărilor impare)

$C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \ldots + C^{2n-1} = 2^{2n-1}$, pe care o scriem

$$\frac{(2n)!}{1!(2n)!} + \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} + \ldots \frac{(2n)!}{(2n-1)! \cdot 1!} = 2^{2n-1}$$

Împărțind egalitatea astfel obținută cu $(2n)!$ obținem rezultatul cerut.

18. În cazul general sînt $3^3 = 27$ obiecte diferite.

a) În cazul complet simetric dăm lui i valoarea 1 și avem 6 obiecte diferite (a_{111}, a_{112}, a_{113}, a_{122}, a_{123}, a_{133}), apoi valoarea 2 și mai obținem (a_{222}, a_{223}, a_{233}) și în sfîrșit valoarea 3 care ne mai dă pe a_{333}, deci în total 10 obiecte diferite.

b. În cazul complet antisimetric orice obiect cu cel puțin doi indici egali este nul deci rămîn diferiți de zero doar șase obiecte, două cîte două opuse și cîte trei egale. Orice

obiect antisimetric cu trei indici se poate pune sub forma $a_{ijk} = a\, e_{ijk}$ unde

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{dacă indicii } (i, j, k) \text{ sînt permutare pară a grupului } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{dacă indicii } \quad \text{"} \qquad \text{" impară" } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{dacă doi indici oarecari sînt egali.} \end{cases}$$

19. $R: 21$

20. R: Există 6 obiecte diferite între ele și 18 diferite de zero.

21. Să descompunem identic fracția

$$* \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \ldots \frac{A_n}{x+n}$$

Pentru determinarea constantelor A_k procedăm astfel: Înmulțim identitatea (*) cu $x + k$ și în identitatea rezultată facem $x = -k$. În partea dreaptă rămîne doar A_k ceea ce dă

$$A_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{k \cdot n!}{k!\,(n-k)!} = (-1)^{k-1}\, kC_n^k$$

Deci avem identitatea

$$(\mathrm{xx}) = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} = \sum (-1)^{k-1} \frac{kC_n^k}{x+k}$$

Făcînd în (xx) $x = 1$ obținem relația cerută.

22. Din dezvoltarea lui $(x+1)^m$ obținem identitatea $(x+1)^n - x_n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k}$ în care punînd $x + 1$ în loc de x avem

$$(x+2)^m - (x+1)^m = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (x+1)^{n-k}$$

Scăzînd aceste două identități obținem

$$(x+2)^n - 2(x+1)^n + x^n = n(n-1)x^{n-2} + p_1 x^{n-2} + \ldots$$

În mod analog obținem

$$(x+3)^n - 3(x+2)^n + 3(x+1)^n - x^n - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + p_2 x^{n-4} + \ldots$$

Prin inducție obținem în general

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k(x+m-k)^n = A_n^m x^{m-n} + p_{m-1}x^{m-n-1} + \ldots$$

Dacă $m = n$ avem evident

$$\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_m^k(x+m-k)^n = n\,!$$

Dacă $m > n$

$$\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_m^k(x+m-k)^n = 0$$

Punînd în aceste identități $x = 0$ se obțin relațiile cerute.

23. Pornim de la relația cunoscută

$$C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} \text{ de unde avem}$$

$$2\ C_k^2 = k^2 - k \text{ și mai departe}$$

$$2\sum_{k=2}^{n} C_k^2 = \sum_{k=2}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n} k$$

de unde rezultă imediat relația cerută

24. Pornim de la relația dintre media aritmetică și cea geometrică

$$\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} a_i \geqslant \sqrt[s]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

în care facem $a_1 = a_2 = \ldots a_m = a$, $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots a_{m+n} = b$ și $a_{m+n+1} = a_{m+n+2} = \ldots = a_s = c$ și obținem

(x) $$\frac{ma+nb+pc}{m+n+p} \geqslant \sqrt[s]{a^m b^n c^p}$$

Aplicînd încă de două ori această inegalitate avem

(xx) $$\frac{na+pb+mc}{s} \geqslant \sqrt[s]{a^n b^p c^m}$$

(xxx) $$\frac{pa+mb+nc}{s} \geqslant \sqrt[s]{a^p b^m c^n}$$

Adunînd cele trei relații (x), (xx) și (xxx) obținem relația cerută.

25. Mai întîi avem $p + q = 1$

Calculăm membrul drept

$$npq - \sum_{i=1}^{n}(p_i - p)^2 = np(1-p) - \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i) + 2p\sum_{i=1}^{n} p_i -$$

$$- np^2 = np - np^2 - np + \sum_{i=1}^{n} p_i q_i + 2np^2 - np^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i.$$

26. Punînd $\sqrt[3]{2} = u$ avem de demonstrat după ridicarea relației date la puterea a treia,

$$(1 - u + u^2)^3 = 9(u - 1).$$

Calculînd membrul stîng obținem

$$1 - 2 + 4 - 3u(1-u) - 6u(u-1) + 3u^2(1+u^2) - 12 =$$
$$= -9 + 6u + 3u^4 = 9(u-1).$$

27. Ridicînd egalitatea dată la puterea a zecea și punînd $\sqrt[5]{2} = u$ ($u^5 = 2$, $u^6 = 2u$, $u^8 = 2u^3$, $u^{10} = 4$) avem de demonstrat:

$(1 + u^2)^5 = 5(1 + u + u^3)^2$ Calcule simple ne dau :
$(1 + u^2)^5 = 1 + 5u^2 + 10u^4 + 10u^6 + 5u^2 + u^{10} = 5(1 + 4u + u^2 + 2u^3 + 2u^4)$.

$(1 + u + u^3)^2 = 1 + u^2 + u^6 + 2u + 2u^3 + 2u^4 = 1 + 4u + u^2 + 2u^3 + 2u^4$

de unde rezultă relația cerută

28. a) Observînd că $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ și calculînd pe $u_n + u_{n-1}$ rezultă imediat relația cerută

b) $u_n^2 = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - 2(-1)^n\right]$

$u_{n-1}^2 = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - 2(-1)^{n-1}.\right]$ Adunînd avem

$$u_n^2 + u_{n-1}^2 = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}\left(1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(1 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right] = u_{2n-1}$$

29. $\lg_{a_1a_2\cdots a_n} x = \frac{1}{\lg_x a_1a_2\ldots a_n} = \frac{1}{\lg_x a_1 + \lg_x a_2 + \ldots + \lg_x a_n} =$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\lg x} + \frac{1}{\lg x} + \ldots \frac{1}{\lg_{a_n} x}}$$

30. Din condițiile problemei $(a_1 = b_1)$ $(a_2 = b_2)$ reiese că $q = 1 + \frac{r}{a_1} \geqslant 1$ unde r și q sînt respectiv rațiile progresilor aritmetice și geometrice.

Trebuie să demonstrăm că $a_1q^n \geqslant a_1 + nr$. Calcule simple ne dau $a_1q^n - a_1 - nr = a_1\left(1 + \frac{r}{a_1}\right)^n - a_1 - nd = a_1\left(1 + n\frac{r}{a_1} + \right.$

$$\left. + C_n^2 \frac{r^2}{a_1^2} + \ldots\right) - a_1 - nr = C_n^2 \frac{r^2}{a_1^2} + \ldots \geqslant 0$$

ceea ce demonstrează proprietatea cerută.

31. Rădăcina ecuației exponențiale este $x = 7$.
Pentru determinarea termenului independent de y din dezvoltarea binomială punem binomul dat sub forma echivalentă $\left(\sqrt[3]{y} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{10}$ și găsim că rangul căutat este $k = 5$.

Pentru rezolvarea problemei propuse trebuiesc găsite soluțiile pozitive ale sistemului.

$$a_1(a_1 + 3r) = 7$$

$$(a_1 + r)^2 + (a_1 + 2r)^2 = 34$$

care ne dă $a_1 = 1$, $r = 2$ și deci numerele căutate sînt 1, 3, 5, 7.

32. $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k\,!\,(k^2 + k + 1) = \sum_{k=1}^{n} k!(k + 1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k!\,k =$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k + 1)\,!\,(k + 1) - \sum_{k=1}^{n} k\,!\,k = (n + 1)\,!\,(n + 1) - 1$$

Pentru calculul lui S_2 observăm mai intîi că pentru orice $k \in N$.

$$\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}$$

Scriind această relaţie pentru $k = 1, 2, \ldots n$ şi adunind obţinem

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} = \frac{1}{2!}$$

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{2}{3!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

33. a) Ştim că $a_{k+1}^p \pm a_k^p = a_1^p(q \pm 1)q^{(k-1)p}$ în orice progresie geometrică şi atunci

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{k+1}^p + a_k^p} = \frac{1}{a_1^p(q+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^{(k-1)p}}$$

$$S_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{k+1}^p - a_k^p} = \frac{1}{a_1^p(q-1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^{(k-1)p}}$$

$$R_n = \frac{S_n}{S_n} = \frac{\dfrac{1}{a_1^p(q+1)}}{\dfrac{1}{a_1^p(q-1)}} = \frac{q-1}{q+1}$$

De altfel se pot afla S_n şi S_n' în funcţie de n. De exemplu

$$S_n = \frac{1}{a_1^p(q+1)} \cdot \frac{q^p}{q^p - 1} \cdot \frac{q^{np} - 1}{q^{np}}$$

b) $\dfrac{a_n}{a_{n-2} + a_{n+2}} = \dfrac{q^2}{1 + q^4} = \dfrac{4}{17}$. Această ecuaţie ne dă $q = 2$ (Ţinem seama că progresia este de termeni pozitivi şi că este crescătoare).

c) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{q^p}{a_1^p(q+1)(q^p-1)}$

d) Întrucît R_n nu depinde de p limita cerută este $\dfrac{q-1}{q+1}$

7. STRUCTURI ALGEBRICE. ALGEBRA LINIARĂ

1. Avem pe de o parte $(a*b)^2 = (a*b)*(a*b) = a*(b*a)*b$ iar pe de altă parte $a^2*b^2 = (a*a)*(b*b) = a*(a*b)*b$. Întrucît aceste două expresii sînt egale rezultă că
$b*a = a*b$ deci grupul e comutativ.

2. Primul termen al relației de condiție se scrie $a*(b*a)^2*b$ iar al doilea termen se scrie $a^2*(a*b)*b^2$ și în general din egalitatea lor nu reiese comutativitatea grupului.

3. Mulțimea Z^2 înzestrată cu operația $*$ este izomorfă cu mulțimea numerelor complexe deci formează grup comutativ față de această operație [elementul neutru este (0, 0)].
Se verifică de asemeni cu ușurință că Z^2 este grup comutativ și față de operația $\odot$, însă fără element unitate.
Pentru verificarea distributivității avem

$$(a_1, b_1)\odot[(a_2, b_2)*(a_3, b_3)] = (a_1, b_1)\odot(a_2+a_3, b_2+b_3) = (a_1(a_2+a_3), 0)$$

$$(a_1, b_1)\odot(a_2, b_2)*(a_1b_1)\odot(a_3, b_3) = (a_1a_2, 0)*(a_1a_3, 0) = (a_1a_2+a_1a_3, 0) = (a_1(a_2+a_3), 0).$$

4. Pentru a arăta că $M = \{[0], [3], [6], [9]\}$ formează un subinel al lui $Z/_{(12)}$ trebuie să arătăm că adunarea și înmulțirea sînt legi interne și că mulțimea noastră conține elemente neutre.

+	[0]	[3]	[6]	[9]
[0]	[0]	[3]	[6]	[9]
[3]	[3]	[6]	[9]	[0]
[6]	[6]	[9]	[0]	[3]
[9]	[9]	[0]	[3]	[6]

·	[0]	[3]	[6]	[9]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[3]	[0]	[9]	[6]	[3]
[6]	[0]	[6]	[0]	[6]
[9]	[0]	[3]	[6]	[9]

Proprietatea de lege internă și apartenența elementelor neutre se observă imediat din tabele.

Notînd cu $[k]_4$ elementele lui $Z/(4)$ și cu $[k]_M$ elementele subinelului studiat din $Z/(12)$, izomorfismul de la $Z/(4)$ la M este următorul

$$[0]_4 \longleftrightarrow [0]_M$$
$$[1]_4 \longleftrightarrow [9]_M$$
$$[2]_4 \longleftrightarrow [6]_M$$
$$[3]_4 \longleftrightarrow [3]_M$$

5. Se caută soluțiile ecuației $P(a) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ (bineînțeles în $Z/(5)$ și după ce se găsește $x = [4]$ se descompune $P(x)$ în forma

$$P(x) = (x + 1)(x^2 + x + 2)$$

6. $Q(x) = (x + 1)(x + 4)$

7. Ținînd seama de rezultatele de la problemele (5) și (6) și de faptul dă $R(x) = 2(x + 4)(x + 1)$, cel mai mare divizor căutat este $D(x) = x + 1$.

8. Polinomul $P(x) = x^2 + x + 1$ este prim în $Z/(2)$ și în $Z/(5)$ iar în $Z/(3)$, $P(x) = (x + 2)^2$.

9. Polinomul $P(x) = x^3 + x + 1$ este prim în $Z/(2)$ și $Z/(5)$ în timp ce în $Z/(11)$ se descompune în forma

$$P(x) = (x + 9)(x^2 + 2x + 5)$$

10. $R: x = [1],\ y = [4]$

11. $R: x = [1],\ y = [2],\ z = [3]$. Se utilizează metoda reducerii;

12. Pentru a verifica proprietatea de lege internă a adunării observăm că $\forall F(x) \in [f(x)]$ este de forma $F(x) = h_1(x)\,s(x) + f(x)$ și analog $\forall G(x) \in [g(x)]$ este de forma $G(x) = h_2(x)\,s(x) + g(x)$ cu $h_1(2), h_2(x) \in C[x]$.

Atunci $F(x) + G(x) = [h_1(x) + h_1(x)]s(x) + f(x) + g(x)$, deci ținînd seama că $h_1(u) + h_2(x) \in C[x]$ avem

$$F(x) + G(x) \in [f(x) + g(x)]$$

Elementul neutru față de adunare notat cu $[0]$ îl constituie clasa polinoamelor de forma $h(x)\,s(x)$ cu $h(x) \leqslant C(x)$.
Elementul invers al lui $[f(x)]$ este $[-f(x)]$.

Pentru a verifica proprietatea de lege internă față de înmulțire avem $F(x)\ G(x) = [h_1(x)\ h_2(x)\ s(x) + h_1(x)g(x) + h_2(x)\ f(x)]\ s(x) + f(x)\ g(x)$.
Elementul neutru față de înmulțire (elementul unitate este $e(x) = [1]$ formată din polinoamele de forma $h(x)\ s(u) + k$ unde k este polinomul constant.
Celelalte axiome (proprietăți care caracterizează structura de inel) se verifică destul de ușor.

13. Mai întîi se arată că în $C[x]/s(x)$ nu există divizori ai lui zero adică relația

$$[f(x)]\,[g(x)] = [0] \text{ implică } [f(x)] = [0] \text{ sau } [g(x)] = [0].$$

Cu alte cuvinte trebuie să arătăm că egalitatea

$[h_1(x)\ s(x)+f(x)]\ [h_2(x)\ s(x) + g(x)] = h(x)\ s(x)$, implică fie $f(x) = \overline{h}_1(x)\ s(x)$, fie $g(x) = \overline{h}_2(x)\ s(x)$, fapt evident dacă ținem seama că primul membru trebuie să fie divizibil cu $s(x)$ și deci produsul $f(x)\ g(x)$ trebuie să fie divizibil cu $s(x)$, de unde fie $f(x)$ fie $g(x)$ este divizibil cu $s(x)$.
În cazul că $s(x)$ n-ar fi prim ar exista factorii lui care n-ar fi divizibili cu $s(x)$ în timp ce produsul lor ar fi divizibil cu $s(x)$.
Existența elementului neutru este asigurată de teorema din algebra divizibilității. Dacă $f(x)$ și $s(x)$ sînt prime între ele atunci există două polinoame $f^{-1}(x)$ și $h(x)$ care satisfac identitatea $f(x)\ f^{-1}(x) + h(x)\ s(x) = k$.
Observăm că $x^2 + 1$ e un polinom prim în $R[x]$ și deci clasele de echivalență mod $(x^2 + 1)$ formează corp.

14. Orice polinom $P(x) \in R[x]$ este congruent cu un singur polinom, de forma $a + bx \pmod{(x^2 + 1)}$, $a,\ b \in R$. Deci elementele corpului claselor de resturi mod $(x^2 + 1)$ sînt clasele de echivalență de forma $[a + bx] = [a] + [b]\,[x]$. Punem $[x] = j$, $a = [a]$, $b = [b]$. Elementele corpului se exprimă univoc în forma $a + bj$, a, b, $\in R$.
Operațiile din acest corp sînt

(A) $(a + bj) + (c + dj) = a + c + (b + d)j$ (lege internă)

(M) $(a + bj)\cdot(c + dj) = ac + (ad + bc)j + bdj^2$

Întrucît $[x^2 + 1] = 0$, avem $j + 1 = 0$, deci $j^2 = -1$, de unde rezultă imediat că $R[x]/(x^2 + 1)$ e izomorf cu C. izomorfisnul celor două corpuri fiind $a + bj \longleftrightarrow a + bi$.

15. a) Se verifică toate axiomele structurii de inel fără dificultăți principiale. Unitatea inelului este elementul v iar elementul zero este elementul u.

b) $-u = u$, $-v = v$, $-w = w$, $-t = t$, deci fiecare element este egal cu opusul lui.

16. $P(u) = v, P(v) = t$, $P(w) = t$, $P(t) = v$

17. Prima dată rezultă $vx^2 = w$, apoi $x^2 = t$, de unde $x = t$

18. Notînd elementele lui F cu f, g, h, ... avem

$$fog = \left(\frac{a_1z + b_1}{c_1z - d_1}\right) \circ \left(\frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}\right) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + a_1b_2 + b_1d_2}{(a_2c_1 + c_2d_1)z + b_2c_1 + d_1d_2} \in F$$

Se verifică ușor că legea de compunere e asociativă. Elementul neutru la compunere este z. Elementul invers al lui $\frac{az + b}{cz + d}$ este $\frac{dz - b}{-cz + a}$.

19. Se verifică pentru E structura de corp comutativ

20. Notăm

$$E^{-1} = \frac{1}{\det L} \begin{Vmatrix} L_{11} & L_{21} & \dots & L_{n1} \\ L_{12} & L_{22} & \dots & L_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{1n} & L_{2n} & \dots & L_{nn} \end{Vmatrix}$$

unde L_{ij} sînt complemenții algebrici ai elementelor l_{ij} din matricea L.

Avem

$$LA = \begin{Vmatrix} \sum_{i=1}^{n} l_{1i}a_{i1} & \sum_{i=1}^{n} l_{i1}a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} l_{i1}a_{in} \\ \sum_{i=1}^{n} l_{2i}a_{i1} & \sum_{i=1}^{n} l_{2i}a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} l_{2i}a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{n} l_{ni}a_{i1} & \sum_{i=1}^{n} l_{ni}a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} l_{ni}a_{in} \end{Vmatrix}$$

de unde $S(B) = \frac{1}{\det L}\left(L_{11} \sum_{i=1}^{n} l_{1i}a_{i1} + L_{12} \sum_{i=1}^{n} l_{1i}a_{i2} + \dots\right.$

$$\ldots L_{1n}\sum_{i=1}^{n} l_{1i}a_{in} + L_{21}\sum_{i=1}^{n} l_{2i}a_{i1} + L_{22}\sum_{i=1}^{n} l_{2i}a_{i2} + \ldots$$

$$\ldots + L_{2n}\sum_{i=1}^{n} l_{2i}a_{i2} + \ldots + L_{n1}\sum_{i=1}^{n} l_{ni}a_{i1} + L_{n2}\sum_{i=1}^{n} l_{ni}a_{i2} + \ldots$$

$$\ldots + L_{nn}\sum_{i=1}^{n} l_{ni}a_{in} = \frac{1}{\det L}\Big[a_{11}\sum_{i=1}^{n} l_{i1}L_{i1} + a_{21}\sum_{i=1}^{n} l_{i2}L_{i1} +$$

$$\ldots a_{n1}\sum_{i=1}^{n} l_{in}L_{i1} + a_{12}\sum_{i=1}^{n} l_{i1}L_{i2} +$$

$$+ a_{22}\sum_{i=1}^{n} l_{i2}L_{i2} + \ldots + a_{n2}\sum_{i=1}^{n} l_{in}L_{i2} + \ldots$$

$$+ a_{1n}\sum_{i=1}^{n} l_{i1}L_{in} + a_{2n}\sum_{i=1}^{n} l_{i2}L_{in} + \ldots + a_{nn}\sum_{i=1}^{n} l_{in}L_{in} =$$

$$= \frac{1}{\det L}(a_{11}\det L + a_{22}\det L + \ldots a_{nn}\det L) = S(A)$$

întrucît

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ij}L_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } j = k \\ 0 & \text{dacă } j \neq k \end{cases}$$

21. Eliminînd cu ajutorul primei ecuații L_1', necunoscuta x_1 din sistem obținem

$$2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 6x_4 = 1$$

$$x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 1$$

$$3x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 9x_5 = \lambda + 2$$

Apoi cu prima ecuație a noului sistem L_1' eliminăm pe x_2 și obținem $3x_3 - 2x_4 - x_5 = \frac{1}{2}$

$$0 = \lambda + \frac{1}{2}$$

Dacă $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ sistemul e incompatibil. Dacă $\lambda = -\frac{1}{2}$ sistemul e nedeterminat și are soluțiile $x_1 = 2 + 4m - 3n$, $x_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}m - \frac{7}{5}b$, $x_3 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$, $x_4 = a$, $x_5 = b$

22. Din $BM = MB$ obținem

$$\alpha x + \gamma y = \alpha x + \beta z$$
$$\beta x + \delta y = \alpha y + \beta t$$
$$\alpha z + \gamma t = \gamma x + \delta z$$
$$\beta t + \delta z = \gamma y + \delta t$$

de unde

$$\gamma y = \beta z$$
$$(\alpha - \delta)y = (x - t)\beta$$
$$(\alpha - \delta)z = (x - t)\gamma$$

Cum $\beta \neq 0$, ecuația $y = k\beta$ definește pe k și putem pune

$$z = k\gamma,\ x - t = k(\alpha - \delta)$$

Termenii x, y, z și t se exprimă prin parametrii k, t.

23. Se verifică fără dificultăți toate axiomele structurii de inel sau se arată că mulțimea M a matricelor B este subinel al inelului de matrici de dimensiune 2. Pentru aceasta se arată

că $B \in \mathfrak{M}$, $B' \in \mathfrak{M} \Rightarrow B - B' \in \mathfrak{M}$ și $BB' \in \mathfrak{M}$.

24. Determinantul principal este

$$\Delta = (a + 3)(a - 1)^3 \text{ și atunci :}$$

I) dacă $a \neq -3$, $a \neq 1$, sistemul este compatibil iar soluțiile sînt

$$x = -\frac{a^2 + 2a + 2}{a + 3},\ y = \frac{1 - a - a^2}{a + 3},\ z = \frac{2a + 1}{a + 3},$$

$$t = -\frac{a^3 + 2a^2 + 2a + 1}{a + 3}$$

II) dacă $a = -3$ sistemul este incompatibil

III) dacă $a = 1$ sistemul este compatibil nedeterminat avînd soluția $x = 1 - m - n - p$, $y = m$, $z = n$, $t = p$

25. a) Mulțimea Y nu e vidă fiindcă îl conține pe e. și este închisă pentru legea de compoziție a lui x, căci dacă x^{-1} și y^{-1} sînt simetricele lui x și y atunci

$$(y^{-1}x^{-1})(xy) = y^{-1}(x^{-1}x)y = y^{-1}ey = e$$

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = x\,e\,x^{-1} = e$$

Legea de compoziție din X induce o lege de compoziție internă pe Y iar axiomele grupului sînt satisfăcute.

b) Dacă x și y comută cu a, avem

$$(xy)a = x(ya) = x(ay) = (xa)y = (ax)y = a(xy)$$

adică xy comută cu a, deci mulțimea A este închisă și $A \neq 0$ căci are cel puțin un element (pe e).

26. $R: n(n-1)$

27. $R: (n, (n-1) \ldots 2, 1)$ cu $\frac{n(n-1)}{2}$ inversiuni

28. Izomorfismul căutat este dat de aplicația $h: (M, 0) \to (U,.)$ (unde (U) este grupul multiplicativ al rădăcinilor cubice ale unității), definită prin $h(f_1) = 1$, $h(f_2) = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$; $h(f_3) = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

29. Fie $X_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ -a_1 & 1 & -\frac{a_1^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $X_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & a_2 \\ -a_2 & 1 & -\frac{a_2^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ și avem

$$X_1X_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & a_1 + a_2 \\ -(a_1 + a_2) & 1 & -\frac{(a_1 + a_2)^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \in M$$

și

$$X^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -a_1 \\ a_1 & 1 & -\frac{a_1^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \in M, \text{ deci } M \text{ este subgrup}$$

al grupului multiplicativ al tuturor matricilor nesingulare de ordinul trei. Aplicația $f: (R, +) \to (M,.)$ definită prin

$$f(k) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & k \\ -k & 1 & -\frac{k^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \text{ este izomorfism}$$

30. Se verifică axiomele structurii de grup utilizînd faptul că G_1 și G_2 sînt grupuri.

31. Mai întîi observăm că M este subgrup al grupului multiplicativ al matricelor de ordinul doi peste Q. Apoi se verifică direct că $Q(\sqrt{3})$ este grup multiplicativ.
Aplicația $f : (Q(\sqrt{3})) \to (M, \cdot)$ definită de

$$f(a + b\sqrt{3}) = \begin{Vmatrix} a & b \\ 3b & a \end{Vmatrix} \text{ pentru } \forall\, a + b\sqrt{3} \in Q(\sqrt{3}) \text{ este un izo-}$$

morfism.

8. PROBLEME DE CONCURS

1. a) Relațiile dintre rădăcini și coeficienți se scrie dacă se ține seama de condiția $x_1 = x_2$ sub formă

$$2x_1 + x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1^2 + 2x_1(x_3 + x_4) + x_3x_4 = \lambda$$
$$2x_1x_3x_4 + x_1^2(x_3 + x_4) = 2$$
$$x_1^2x_3x_4 = 1$$

Eliminînd x_3x_4 și $x_3 + x_4$ între relațiile a întîia a treia și a patra, se obține:

$$x_1^4 - x_1^3 + x_1 - 1 = (x_1^3 + 1)(x_1 - 1) = 0$$

Cum $x_1 \neq 1$ $x_1 \neq -1$ avem două cazuri posibile

I. $x_1 = x_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ și atunci $x_3 = x_4 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

II. $x_1 = x_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ și atunci $x_3 = x_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

În aceste condiții $f(x) = (x^2 - x + 1)^2$ și deci $\lambda = 3$

b) Trebuie calculată $E = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n =$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n + \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]^n = 2\cos\frac{n\pi}{3}$$

2. $x^n + y^n = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n + \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^n =$

$$= 2\cos\frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} 2 \text{ pentru } n \equiv 3 \pmod 3 \\ -1 \text{ pentru } n \not\equiv 3 \pmod 3 \end{cases}$$

3. a) Deoarece $b > 0$ avem $a^n = (1+b)^n \geqslant 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}b^2 + \ldots$

$$\ldots > \frac{n(n-1)}{2}b^2 > \frac{b^2}{4}n^2 = \frac{(a-1)^2}{4}$$

Ultima în inegalitate este adevărată întrucît

$$\frac{n}{2} > 1 \to n-1 > \frac{n}{2} \to \frac{n(n-1)}{2} > \frac{n^2}{4}\Big).$$

b) Punînd în inegalitatea de la punctul a) $b = \frac{2}{\sqrt{n}}$ obținem

$n < \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(\frac{2+\sqrt{n}}{n}\right)^n$, de unde extrăgînd rădăcina de ordinul n obținem inegalitatea cerută.

4. Adunînd ecuațiile date se obține (*) $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{6}}{3}(3\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2})$. Scăzînd prima ecuație din relația (*) se obține $x = \frac{1}{2}$

Celelalte necunoscute se află adunînd ecuațiile a doua și a treia cu relația (*).

5. a) Se calculează cu ușurință că rădăcinile derivatei sînt $-\frac{2}{3}$ și 0 și că șirul lui Rolle are o singură variație de semn între 0 și (fx). Altfel, se pune fiind sub forma $f(x) = (x-1)(x^2+2x+2)$.

b) Rădăcinile lui $f(x)$ sînt $x_1 = 1$, $x_2 = -1 - i\sqrt{2}$, $x_3 = -1 + i\sqrt{2}$.

Scriind $ax_2^2 + bx_2 + c = x_3$, $ax_3^2 + bx_3 + c = x_2$ și scăzînd aceste egalități obținem după simplificări și înlocuirea lui

$$x_2 + x_3 \text{ cu } -2,$$

(x) $2a - b = 1$

Adunînd apoi relațiile și ținînd seama ca $x_2 + x_3 = -2$, $x_2x_3 = 2$ se obține

(xx) $b - c = 1$

Pe de altă parte $x_1 = 1$ ne dă

(xxx) $a + b + c = 1$

Din aceste relații rezultă $g(x) = \frac{1}{5}(4x^2 + 3x - 2)$

c) Funcția $h(x) - x = \frac{32}{125}(2x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x - 2)$ și se verifică ușor că admite rădăcina $x_1 = 1, x_4 = -\frac{1}{2}$ și apoi relațiile dintre rădăcini și coeficienți sînt verificate dacă $x_2 + x_3 = -2$ $x_2x_3 = 2$.

d) Cîtul cerut este $\frac{32}{125}(2x + 1)$.

6. Notînd membrul stîng al ecuației date cu $f(x)$ avem $f'(x) = 6x^2 - 6x + 6a(1 - a)$ cu rădăcinile a și $1 - a$.

Șirul lui Rolle ar fi în cazul $a < \frac{1}{2}$

$f(-\infty) = -\infty$

$f(a) = 3a^2 + 1 > 0$

$f(1 - a) = a(8a^2 - 9a + 6)$

$f(+\infty) = +\infty$

Pentru $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right) f(x)$ are o rădăcină reală $x_1 \in (-\infty, a)$

Pentru $a = 0$ $f(x)$ are trei rădăcini reale $x_1 = 1 = x_2, x_3 = -\frac{1}{2}$

Pentru $a < 0$ $f(x)$ are trei rădăcini reale $x_1 \in (-\infty, a)$
$$x_2 \in (a, 1 - a), \ x_3 \in (1 - a, \infty).$$

În cazul $a > \frac{1}{2}$ şirul lui Rolle este
$$f(-\infty) = -\infty, f(1-a) = a(8a^2 - 9a + 6), f(a) = 3a^2 + 1, f(+\infty) = +\infty$$
şi ecuaţia are o singură rădăcină reală în $(-\infty, 1 - a)$.

7. Numerele căutate sînt 1, 3, 5.
Pentru obţinerea lui m, n, p avem sistemul
$$m + n + p = -16$$
$$9m + 3n + p = -162$$
$$25m + 5n + p = -500$$
ale cărui soluţii sînt $m = -24$, $n = 23$, $p = -15$,
Rădăcinile lui $P(x)$ care lipsesc sînt $x_4 = i$ $x_5 = -i$.

8. Mai întîi observăm că $0 < x < 4$, $x \neq 1$, $n > 1$. Ecuaţia dată este echivalentă cu
$$\frac{\lg_x x(4-x)}{\lg_x 10} = \lg_{10} \lg_{10} n \text{ sau } \lg_{10} x(4-x) = \lg_{10} \lg_{10} n$$
de unde $x(4-x) = \lg_{10} n$ şi $x = 2 \pm \sqrt{\lg_{10} \frac{10^4}{n}}$

Cu acestea ţinînd seama de condiţiile $x \in (0, 4)$, $n > 1$ discuţia se poate face uşor.

9. Inegalitatea la stînga are soluţia $a \in (-1, 7)$ iar inegalitatea la dreapta are soluţia $a \in (-2, 6)$. Soluţia problemei este $a \in (-1, 6)$.

10. a) Se verifică imediat (din cauză că ecuaţia este reciprocă) că $P(a) = 0$ implică $P\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \left(P\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^5} P(a).\right)$

b) $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -2$, $x_5 = -\frac{1}{2}$

11. Se notează $3x - 5y = u$, $2x + y = v$ şi se găseşte apoi
$v_1^2 = 1$ $\quad v_2^2 = 25$

$u_1^2 = \frac{1}{25}$ $\quad u_2^2 = 1$

12. a) Se simplifică fracţia cu 3^x şi se găseşte

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = -3a, \text{ de unde } a < 0 \text{ şi } x = \frac{\log 3 + \log(-a)}{\log 2 - \log 3}$$

b) $a = -\frac{2n}{3^{n+1}}, \forall n \in N$

13. a) $\Delta' = \sin^2 a \sin^2 b > 0$
b) $x_1 = \cos(a + b)$, $x_2 = \cos(a - b)$
c) $2a = k\pi$, $2b = k\pi$, $k \in z$

14. a) Ecuaţia cerută va avea $x_2 = c - i \sin a$ şi este
$x^2 - cx + c^2 + \sin^2 a = 0$
b) Ecuaţia pentru a este $a = \arcsin \sqrt{|c(1-c)|}$. Pentru a exista valori reale ale lui a care să satisfacă condiţia dată trebuie ca $c \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$

15. a) Soluţiile sistemului sînt $x = -(1 \sin a)^2$; $y = \sin a(\sin a - 1)$
b) $z^2 + (1 - \sin a)x + \sin a(1 - \sin a)^2 = 0$
c) Inecuaţia dată se transcrie $\sin a\,[1 - 8(1 - \sin a)^3] > 0$.

16. Condiţiile problemei sînt $T(0)\,T\left(-\frac{m}{2}\right) < 0$. $T(2)T\left(-\frac{m}{2}\right) < 0$
sau alte condiţii echivalente $0 < -m < 4$ şi $0 < m^2 - 1 < 4$

17. a) Notăm $\sqrt{\frac{x}{y}} = u$ şi găsim din prima ecuaţie $u_1 = 2$,
$u_2 = \frac{1}{2}$

Apoi înmulţim ecuaţia a doua cu x şi găsim $x_1 = \frac{a}{4}$ şi $x_2 = a$ de unde rezultă apoi valorile lui y.
b) considerăm $a > 0$. Inecuaţia din care trebuie determinat n este $(3n - 1)(7 - 3n) > 0$ deci $n_1 = 1$, $n_2 = 2$
cazul $a < 0$ dă aceleaşi valori pentru n.

18. $p = \frac{25}{3}$. Relațiile între rădăcini și coeficienți ne dau

$$x_1 + x_2 = -x_3$$
$$x_3(x_1 + x_2) = -\frac{10}{3}$$
$$+ 5x_3 = +q$$

care constituie un sistem simplu pentru determinarea mai întîi a lui x_3, apoi a lui q și în cele din urmă a lui x_1 și x_2.

19. Ecuația dată se pune mai întîi sub forma
$f(x) = (p^2 + 4p + 3)x^2 - (3p^2 + 5p - 4)x + 2p^2 - 3p +$
$+ 1 = 0$
iar condițiile care trebuiesc satisfăcute sînt $(f - 1)\ f(1) < 0$.

20. Membrul stîng se pune sub forma $\lg_a 2 + \log_a 3 + \lg_a 4 +$
$\lg_a 5 = \lg_a 120 = \frac{1}{\lg_{120} a}$

21. a) $x_1 = m+1$; $x_2 = \frac{1}{m-1}$ b) Inegalitatea pentru m este $\frac{m^2}{m+1} < 1$

22. a) $\cos a = -\frac{1}{2}$ b) $y^2 - 2(\cos^2 a + 4 \cos a + 3)y + 1 = 0$

23. a) $a_1 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $a_2 = \arccos\frac{5}{18}$

b) Condiția ca ecuația dată să aibă rădăcini reale este $\cos a \in$ $\in \left(-1, -\frac{4}{9}\right) \cup (0, 1)$ care este îndeplinită în cazul relației date.

24. a) $x = \frac{\sin a}{\sin a - 2}$ $y = \frac{\sin a}{\sin a + 2}$ b) $a \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$.

25. a) $a = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ b) $E = \log A$

26. Avem $x_1^{k+2} + mx_1^{k+1} + x_1^k = 0$ și $x_2^{k+2} + mx_2^{k+1} + x_2^k = 0$ și prin adunare $S_{k+2} + mS_{k+1} + S_k = 0$. Scriind relația pentru $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ și sumînd rezultatele se obține

$S_{n+2} + (m+1)S_{n+1} + (m+2)\sum_{k=0}^{n} S_k = m + 2$ de unde reiese imediat relaţia cerută.

27. a) $y(x_1) + y(x_2) = x_1 + x_2 - 7$ iar $z(x) = x^2 - 7x + \frac{23}{2}$ de unde reiese imediat relaţia cerută

b) $y(x) = x - \frac{7}{2}$ este o dreaptă paralelă cu prima bisectoare $z(x) = x^2 - 7x + \frac{23}{2}$ este o parabolă

c) Trebuie arătat că $[y(x_1)\quad kz(x_1)]\quad [y(x_2) + kz(x_2)] < 0$ sau $y(x_1)\, y(x_2) = x_1x_2 - \frac{7}{2}(x_1 + x_2) + \frac{49}{4} < 0$ care se verifică imediat ţinînd cont că $x_1x_2 = \frac{23}{2}$ şi $x_1 + x_2 = 7$

28. Pentru $m = -1$ avem identitate. Pentru $m \neq -1$ ecuaţia dată se înscrie $(m-1)x^2 - 3x - 1 = 0$
a) $P < 0$ are loc pentru $m > 1$
b) $m = 4$ c) $m - \frac{5}{4}$. d) $x^2 - 15x + 9$

29. a) $a^2 + 2c = ad + b^2$. b) $(a-1)(3a^2 + 2) = 0$

30. a) $\Delta \geqslant 0$ pentru $a \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\Delta < 0$ pentru $a \in \left[0 \frac{\pi}{2}\right] \cup$ $\cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
$P > 0$ pentru $\forall a$
$S < 0$ pentru $a \in (0, 2\pi)$ $S = 0$ pentru $a = 0$, $a = 2\pi$
b) $S = 2(\cos a - 1)$ este maximă pentru $\cos a = 1$ $(a = 0,\ a = 2\pi)$ cînd $S = 0$

c) $a = \frac{\pi}{2}$, $a = \frac{3\pi}{2}$

31. a) $\Delta \geqslant 0$, $\forall m$ $(\Delta) = (m+3)^2)$
$P > 0$ pentru $m \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, $P < 0$, $m \in (-2, 0)$
$S > 0$ pentru $m \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (0, \infty)$, $S < 0$, $m \in \left(\frac{2}{3}, 0\right)$

b) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 5m^2 + 18m + 18 > 0$ $\forall m \in R$

32. a) $\mathcal{M}_0 = \left\{ \begin{Vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{Vmatrix} ; x \in Q \right\}$

Izomorfismul cu Q este evident din relaţia $\begin{Vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{Vmatrix} = Ix$,

unde I este matricea unitate a mulţimii.

b) Sistemul de ecuaţii care rezultă din ecuaţia

$$\begin{Vmatrix} a + 4b & 2b \\ -7b & a - 4b \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x + 4y & 2y \\ -7y & x - 4y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a + 4b & 2b \\ -7b & a - 4b \end{Vmatrix}$$

este

$(a + 4b)(x - 1) + 2(2a + b)y = 0$

$bx + ay = b$

$(a - 4b)(x - 1) + 2(2a + b)y = 0$

şi are soluţia unică $x = 1$ $y = 0$, deci matricea $Z = I$

33. Mai întîi observăm că $x_1 \neq 0$, $x_3 \neq 0$. Prima relaţie dintre rădăcini şi coeficienţi împreună cu relaţia dată ne conduc la $x_1x_2 = -1$ şi împreună cu a treia relaţie ne conduc la $x_3 = +q$.

Relaţia a doua a lui Viète ne dă $x_3(x_1 + x_2) = 1 + p$, de unde relaţia cerută este

$$1 + p + q^2 = 0$$

b) Întrucît $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, avem $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1x_2x_3$ (vezi problema 5 din paragraful 1). De aici ţinînd seama de relaţia obţinută la punctul a, avem $q = \frac{1}{2}$, $p = -\frac{5}{4}$ şi ecuaţia de rezolvat este $4x^3 - 5x + 3 = 0$, pentru care ştim deja rădăcina $x_3 = q = \frac{1}{2}$. Celelalte două se află uşor.

34. Ecuaţia pentru determinarea lui k este $k^2 - 6k + 5 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 5$ $\Delta \geqslant 0$ pentru $k \leqslant 4$, $P > 0$ pentru $k \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ $S > 0$ pentru $k \in (-\infty, 3) \cup (6, \infty)$

35. Relaţia întîi dintre rădăcini şi coeficienţi pentru $Q(x) = 0$ şi relaţia dată ne dau $x_2 = 1$ şi apoi $m = 8$ $x_1 = -2$ $x_3 = 4$.

b) Sistemul pentru determinarea lui a, b, c, este

$a + b + c = -13$

$4a - 2b + c = 296$

$16a + 4b + c = -448$

şi are soluţiile $a = -7$, $b = -110$, $c = 104$, $C(x) = x^2 - 4x + 13$

c) Avem $\alpha^3 - 4\alpha^2 + 13\alpha = 0$ de unde înlocuind $\alpha^3 = 4\alpha^2 - 13\alpha$ şi $3\alpha\beta = 39$ se verifică relaţia dată.

36. a) Trebuie să avem $P(i) = P(-i) = 0$, de unde rezultă prin adunarea acestor relaţii, $b = \frac{1}{2}[(1+i)^n + (1-i)^n] = -\sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}$ şi apoi ţinînd seama că $(i+i)^n = \sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$ se deduce $a = -\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}$

b) pentru $n > 4$ $\quad a = 0,\ b = 4$

37. a) Inecuaţia pentru m este $m^3 - m^2 - 6m > 0$ şi are soluţiile $m \in (-2, 0) \cup 3, \infty)$.

b) Condiţia pentru m este $(m+3)(3-m) < 0$ care are soluţiile $|m| > 9$.

38. Ecuaţia dată se scrie

$$\frac{x(a+b)-(a^2+b^2)}{ab} = \frac{x(a+b)-(a^2+b^2)}{x^2-(a+b)x+ab},\text{ de unde } x^2-(a+b)x+ + ab = ab$$

care are soluţiile $x_1 = 0,\ x_2 = a + b$

39. $R: x = \frac{\log 2}{\lg 2 - \lg 3}$

40. Vezi soluţia problemei (13) din paragraful 5.

41. a) $x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ b) $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. c) Se consideră două cazuri: $a > 1$ şi $a < 1$

42. a) $\alpha \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$

b) $\alpha = \frac{4}{\pi}$

c) $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right)$

43. a) $a\odot(b\odot c) = abc + ab + ac + bc + a + b + c$ este expresie simetrică în raport cu numerele a, b, c,

$a*(b*c) = \frac{abc}{ab+ac+bc}$ este de asemeni o expresie simetrică în raport cu a, b, c,

b) Operația „$\odot$“ are element neutru pe zero. Operația „*“ nu admite element neutru

c) $x = 1 \quad y = 2$ sau $x = 2, y = 1$

44. a) $m = +11$, $n = -6$ b) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

45. a) $S_1 = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}{x_1x_2x_3} - 3 = 0$

$$S_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \\ = \frac{(x_1+x_2+x_3)^3 - 2(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}{x_1x_2x_3} + 3 = -1$$

$$S_3 = y_1y_2y_3 = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}{x_1x_2x_3} - 1 = 2$$

b) Se pornește de la intervalul (+1,5, +1, 6) și se aplică odată metoda coardei

c) Nu este adevărată

46. a), $m \in [0, 2]$

b) Trebuie ca în ecuația studiată la punctul a) fie să nu existe soluții fie să depășească în modul pe 1 adică $m \in R \setminus [0, 2]$.

47. Întrucît prima matrice are două linii și trei coloane iar cea de-a doua are două coloane și trei linii, există și AB și BA

b) AB are dimensiunea 2×2 în timp ce BA are dimensiune 3×3 deci $AB \neq BA$

c) $a = -1$, $b = 0$, $c = 2$, $d = -1$

d) BA este singulară

48. Se verifică cu ușurință că c dotat cu operațiile date este corp. Elementul neutru la adunare (zero) este i. Elementul opus lui x este $2i - x$. Elementul unitate este $\frac{1-m}{mi}$

Elementul invers al lui x este

$$x^{-1} = \frac{2(1 - m) - m^2xi}{m^2(i - x)}$$

49. a) $a = -2$, $b = 12$

b) $u = 1 + i\sqrt{3}$, $v = 1 - i\sqrt{3}$ și sînt rădăcini ale ecuației $x^2 - 2x + 4 = 0$ iar $E = -20$

50. a) Rezolvăm mai întîi sistemul $4P - 5S + 4 = 0$, $P - S = \frac{1-m}{m}$

Ecuația cerută este $mx^2 - 4x + 5 - m = 0$

b) $m_1 = -2$, $m_2 = \frac{8}{9}$

c) În cazul $m_1 = -2$, rădăcinile ecuației sînt $x_{1,2} = -1 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$ care verifică relația dată la punctul b. Cazul celălalt verifică la fel de ușor această relație.

51. $E = \frac{2x^4}{x^8 - 16y^8}$; $E(\sqrt[4]{2}, \sqrt[8]{3}) = -\frac{1}{11}$.

52. a) $\Delta \geq 0$ pentru $m \in (3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$, $P < 0$ pentru $\forall m$, $S > 0$ pentru $m \in (-1, 1)$.

b) $m \in (3 + 2\sqrt{2}, \infty)$

53. a) $x = -m^2 - 2m + 5$, $y = -m^2 + 5$, $z = -m^2 + 2m + 5$

b) $m_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, $m_{3,4} \pm \frac{\sqrt{39}}{3}$

c) $m \in (-2, 0] \cup (4, \infty)$

54. a) $\Delta' = (m - 1)^4 \geq 0$

b) Relația dată este îndeplinită pentru orice $m \in R$.

55. $\Delta \geq 0$ pentru $m \in \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$, $P > 0$ pentru $m \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ $S > 0$ pentru $m < 0$

56. a) Șirul lui Rolle pentru această ecuație este
$-\infty, m + 20, m - 7, +\infty$
pentru $m \in (-\infty, -20)$ ecuația are o singură rădăcină reală
pentru $m \in (-20, 7)$ ecuația are trei rădăcini reale
pentru $m \in (7, \infty)$ ecuația are o singură rădăcină reală
pentru $m = -20$ ecuația are o rădăcină dublă negativă (-2)

b) $m = -7$, $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -\frac{7}{2}$

57. a) $\Delta \geqslant 0$ pentru $m \leqslant \frac{1}{2}$, $P > 0$ pentru orice m, $S > 0$ pentru $m > 1$

b) $m = 2 \pm \sqrt{2}$

c) $|m| > \frac{\sqrt{2}}{2}$

58. a) $\Delta \geqslant$ pentru $m \in [-1, 1]$

b) Inegalitatea $x_1^2 + x_2^2 < 2$ nu are soluţii ($x_1^2 + x_2^2 = 2$, $\forall m \in$ $\in R$).

c) $\alpha = 0$ şi $\alpha = \pi$.

d) $= \frac{\pi}{2}$ şi $\frac{3\pi}{2}$

59. Se împarte ecuaţia cu 9^x şi notînd $\left(\frac{2}{3}\right)^x = u$ avem $u^2 + u -$ $-1 = 0$, care dă soluţie valabilă, $u = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ şi deci

$$x = \frac{\log(\sqrt{5}-1) - \lg 2}{\lg 2 - \lg 3}$$

60. Condiţilie pentru ca $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in R$ sînt $\Delta \leqslant 0$ şi $3 +$ $+ 2\cos a - 2\sin a \geqslant 0$.

Calcule simple ne dau $\Delta' = 2(\cos a + 1)(\sin a - 1) \leqslant 0, \forall$ a şi $3 + 2(\cos a - \sin a) > 0$
căci $|\cos a - \sin a| \leqslant \sqrt{2}$
b) Valoarea minimă a lui $f(x)$ este

$$f_{min} = \frac{\Delta}{4(3 + 2\cos a - 2\sin a)} = \frac{2(\cos a + 1)(\sin a - 1)}{3 + 2\cos a - 2\sin a} = \frac{1}{5}$$

de unde se determină a

61. $x = -abc$ $\quad y = ab + ac + bc$, $z = -(a + b + c)$

62. a) $m = 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_4 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

b) $x_3^n + x_4^n = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\ \sin\frac{\pi}{3}\right)^n + \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\ \sin\frac{\pi}{3}\right)^n =$

$$= 2\ \cos\frac{n\pi}{3}$$

c) Notăm $Q(x) = P(x) - 2x^2 + 5x = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m$.

Şirul lui Rolle pentru polinomul $Q(x)$ este
$+\infty,\ m,\ m+1,\ m,\ +\infty$
Dacă $m < -1$ ecuaţia are două rădăcini reale una în $(-\infty, 0)$ şi una în $(2, \infty)$
Dacă $-1 > m < 0$, ecuaţia are patru rădăcini reale,

$$x_1 \in (-\infty,\ 0),\ x_2 \in (0,\ 1),\ x_3 \in (1,\ 2),\ x_4 \in (2,\ \infty)$$

Dacă $m > 0$ ecuaţia nu are nici o rădăcină reală
Dacă $m = -1$ ecuaţia are două rădăcini confundate ($x_1 = x_2 = 1$)
Dacă $m = 0$ ecuaţia are două rădăcini multiple

$$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = x_4 = 2.$$

63. Se rezolvă analog cu problema (69) din paragraful 3.

64. $E = \frac{1\,659}{3\,900}$

65. $E = \frac{156 - 11\,i}{1\,322}$

66. $x = \frac{500}{33}$, $y = \frac{5}{33}$

67. Ecuaţia dată se poate scrie, după calcule elementare, în forma

$$(m-1)x^2 - 2x - m + 3 = 0$$

a) $m_1 = -1$, $m_2 = \frac{5}{3}$, b) $m \in (-\infty,\ 1) \cup (3,)$

68. a) $m = -2$, b) $m = 6$ c) $m_1 = 3$, $m_2 = \frac{5}{7}$, d) $m = 6$.

69. $E = -\frac{54}{25} = -2{,}16$

70. a) $x = x = z = \frac{1}{2-m^2}$. Dacă $m \neq \pm\sqrt{2}$ sistemul este compatibil şi are soluţie unică; dacă $m = \pm 2$ sistemul este incompatibil

b) Pentru ca soluţiile să fie raţionale este necesar ca m^2 să fie raţional deci m să fie de forma $k\sqrt{2} (k \in Q)$.

71. a) Se exprimă şi suma $y_1 + y_2$ şi produsul $y_1 y_2$ în funcţie de $\sin 2\alpha$ şi cum avem $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = -\frac{2}{p}$

se obţine în cele din urmă ecuaţia

$$p^3y^2 - p(p+2)(p-4)y - 2(p^2-8) = 0$$

b) Se verifică că valoarea comună a celor doi membrii ai egalităţii este $p(p-2)$

72. $\Delta \geqslant 0$ pentru $m > -\frac{1}{2}$; $P > 0$ pentru $\forall m \in R$, $S > 0$ pentru $m \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$

73. Ecuaţia echivalentă este $\sin x \sin 2x = 4 \cdot \frac{\cos 2x}{\cos x}$

74. Inegalitatea la stînga este satisfăcută pentru $m \in (5, 11)$ iar inegalitatea cealaltă pentru $m \in (-\infty, -7) \cup (1, \infty)$, deci soluţia problemei este $m \in (5, 11)$

75. a) $x_1 = m - \sqrt{m^2-1}$, $y_1 = m + \sqrt{m^2-1}$ şi $x_2 = m +$

$$+\sqrt{m^2-1}, \quad y_2 = m - \sqrt{m^2-1}$$

b) $m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

c) $x = \cos\alpha + i \sin\alpha$, $y = \cos\alpha - i \sin\alpha$, şi relaţia se demonstrează imediat folosind formula lui Moivre.

76. a) $x = \frac{m}{m-2}$ $\quad y = \frac{m}{m+2}$

b) Relaţia cerută se verifică prin calcul direct.

77. a) Se va folosi procedeul şi rezultatele intermediare ale problemei (45)

b) $m = -15$, $x_1 = \frac{3+i\sqrt{11}}{2}$, $x_2 = \frac{3-i\sqrt{11}}{2}$, $x_3 = 3$

78. a) $\Delta = (m+5)^2 \geqslant 0$, $\forall m \in R$, $P > 0$ pentru $m < -2$, $S > 0$ pentru $m > 1$

b) $x_1 = -3$, $x_2 = m + 2$

c) Se poate determina m fie direct fie folosind relațiile între rădăcini și coeficienți.

d) $F = \dfrac{x - m - 2}{x - 1}$.

79. a) Asociativitatea și comutativitatea se studiază cu ușurință. Operația nu admite elementul neutru.

b) Se observă că $T(\alpha) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}$ și

relația care trebuie determinată este:

$$T(\alpha 0 \beta) = \begin{vmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & a_2b_1 + a_3b_2 + a_1b_3 \\ a_2b_1 + a_3b_2 + a_1b_3 & a_3b_1 + a_1b_2 + a_2b_3 \\ a_3b_1 + a_1b_2 + a_2b_3 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_3b_1 + a_1b_2 + a_2b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_2b_1 + a_2b_1 + a_3b_2 + a_1b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & b_1 \\ b_3 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = T(\alpha) \cdot T(\beta)$$

Se observă imediat că $T(\alpha 0 \beta)$ nu este altceva decît produsul $T(\beta) \cdot T(\alpha)$, conform regulii obișnuite de înmulțire a determinanților.

80. a) Se verifică proprietățile izomorfismului și se constată că aplicația dată este izomorfism.
b) Se verifică prin inducție.
c) Se calculează N^2 și se introduce în identitate, de unde rezultă $x = 1$, $y = 2$, $z = 4$

81. Ecuația dată se transcrie, ținînd seama că $1 - \lg 5 = \lg 2$ $\lg 2^x = \lg(2^x + x - 1)$, de unde $x = 1$.

Capitolul VI

TRIGONOMETRIE

1. IDENTITĂȚI TRIGONOMETRICE

1. $E = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\varphi + a)] + \frac{1}{2}[\cos(2\varphi + a) + \cos a] =$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos a) = \cos^2\frac{a}{2}.$

2. Se folosește formula $\text{tg}\frac{u}{2} = \frac{\sin u}{1 + \cos u}$

3. Avem $3 \text{ arc tg } u = \text{arc tg}\frac{3u - u^3}{1 - 3u^2}$

4. Se arată că ambii membrii ai egalității E_1 și E_2 sînt egali cu $-\frac{1}{2}$ în modul următor

$$\sin\frac{\pi}{7}E_1 = \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7}$$

5. Notînd cu E exprimă din membrul stîng avem

$$E = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{9}\right)\cos\frac{4\pi}{9} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{16} \text{ căci } \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} = 0$$

6. A doua condiție a problemei o scriem pentru $\varphi \neq k\pi$ sub forma $\cos\beta \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sin a_i + \sin\beta \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cos a_i = 0$, de unde ținînd seama că $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sin a_i = 0$, rezultă și $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cos a_i = 0$ ceea ce asigură anularea sumei $\sum \lambda_i \sin(a_i + \varphi) = \sin\varphi \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \cos a_i + \cos\varphi \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sin a_i$.

7. $E = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) =$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3\lambda^2}{4}$

8. $E = (\sin x + \cos x)[\sin^6 x + \cos^6 x + \sin x \cos x(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) + 6\sin^3 x \cos^3 x]$.

Din problema precedentă avem $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3\lambda^2}{4}$, apoi $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2$

Suma $\sin x + \cos x$ o transformăm astfel:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = \sqrt{1 - \lambda}$$

9. Notăm primul radical cu E^+ și pe al doilea cu E^- iar suma sinusurilor cu S și cantitatea de sub al doilea radical din E^+ cu P. Astfel $E = \sqrt{S + \sqrt{P}} + \sqrt{S - 2\sqrt{P}}$. Calcule simple ne arată:

$P = (\sin\alpha + \sin\beta)\sin\gamma$ și

$S^2 - 4P = (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 - 4\sin\alpha \sin\gamma - 4\sin\beta\sin\gamma = (\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma)^2$ și atunci

$$E^+ = \sqrt{\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + |\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma|}{2}} + \sqrt{\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - |\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma|}{2}}$$

$$E = 2\sqrt{\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + |\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma|}{2}} =$$

$$= \begin{cases} 2\sqrt{\sin\alpha + \sin\beta} & \text{dacă } \alpha + \beta > \gamma \\ 2\sqrt{\sin\gamma} & \text{dacă } \alpha + \beta < \gamma \end{cases}$$

$$\left(\text{se ține seama că } \alpha, \beta, \gamma, \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

10. Transformăm în produs expresia

$$E = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 - 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 0.$$

Pentru aceasta transformăm mai întîi

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \right.$$

$$\left. - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\cos x - 1 = -2\sin^2\frac{x}{2}, \text{ cu care}$$

$$E = 2\left[\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\right] = 2\left[\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)^2\right] =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right) = 2\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \right.$$

$$\left. + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)\right]\left[\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)\right] =$$

$$= -8\sin\frac{\pi+\beta+\gamma-\alpha}{4}\sin\frac{\pi+\alpha+\gamma-\beta}{4}\sin\frac{\pi+\alpha+\beta-\gamma}{4}$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{4} = 0$$

În concluzie relația dintre α, β, γ este una din următoarele

$$\alpha + \beta + \gamma = (4n + 1)\pi \quad \alpha + \beta - \gamma = (4n - 1)\pi$$

$$\alpha + \gamma - \beta = (4n - 1)\pi \text{ sau } \beta + \gamma - \alpha = (4n - 1)\pi.$$

11. Transformăm expresia $E = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ în modul următor:

$$E = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - (\cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\alpha\cos^2\beta) + \cos^2\alpha\cos^2\beta = (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta) - (\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta)^2 = (\sin\alpha\sin\beta - \cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta)(\sin\alpha\sin\beta + \cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta) = [\cos(\alpha-\beta) - \cos\gamma][\cos\gamma - \cos(\alpha+\beta)] = 4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2}$$

de unde rezultă relațiile cerute

$$\alpha+\beta+\gamma = 2k\pi \qquad \alpha+\beta-\gamma = 2k\pi$$

$$\alpha+\gamma-\beta = 2k\pi \qquad \beta+\gamma-\alpha = 2k\pi$$

12. Identitatea de demonstrat se poate scrie sub forma

$$\frac{2\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha} + \frac{2\sin\beta}{1-\sin^2\beta} + \frac{2\sin\gamma}{1-\sin^2\gamma} = \frac{8\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)(1-\sin^2\gamma)}$$

dar dacă notăm $\sin\alpha = \operatorname{tg}\frac{u}{2}$, $\sin\beta = \operatorname{tg}\frac{v}{2}$, $\sin = \operatorname{tg}\gamma\frac{w}{2}$

problema se transformă în modul următor:

Dacă $\operatorname{tg}\frac{u}{2}\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \operatorname{tg}\frac{u}{2}\operatorname{tg}\frac{w}{2} + \operatorname{tg}\frac{v}{2}\operatorname{tg}\frac{w}{2} = 1$ să se arate că

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w = \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v \operatorname{tg} w$$

Condiția o mai scriem $\operatorname{tg}\frac{u}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \operatorname{tg}\frac{w}{2}\right) - \left(1 - \operatorname{tg}\frac{v}{2}\operatorname{tg}\frac{w}{2}\right) = 0$

și împărțind-o cu $1 - \operatorname{tg}\frac{v}{2}\operatorname{tg}\frac{w}{2}$ obținem

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2}\operatorname{tg}\frac{v+w}{2} - 1 = 0 \text{ sau } \operatorname{tg}\frac{u}{2} = \operatorname{ctg}\frac{v+w}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{v+w}{2}\right),$$

de unde $\frac{u}{2} + \frac{v+w}{2} - \frac{\pi}{2} = k\pi$ sau $u + v + w = (2k+1)\pi$

Cu aceasta condiţie, echivalentă cu cea dată, rezultă imediat, din formula tangentei sumei de trei arce identitatea

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w = \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v \operatorname{tg} w$$

13. $f(x) = \frac{a+c}{2} + \frac{1}{2}[(c-a)\cos^2 x + b \sin 2x] = B +$

$$+ \frac{1}{2(c-a)}\left[\cos 2x + \frac{b}{2a}\sin 2x\right] = B +$$

$$+ \frac{1}{2(c-a)\cos\varphi}[\cos 2x \cos\varphi - \sin\varphi \sin 2x] = A \cos(2\varphi +$$

$$+ x) + B, \text{ unde } B = \frac{a+c}{2}, \ \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a-c}$$

Din această formă a lui $f(x)$ rezultă imediat extremele ei.

14. O condiţie necesară ca suma din membrul stîng să fie finită este $|\operatorname{tg} x| < 1$ şi atunci

$$1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \ldots = \frac{1}{1+\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} =$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sqrt{2}\cos x}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$$

15. $E_n(x) = \frac{\sin x}{\sin(n+1)\sin nx}$ şi ţinînd seama de formula

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}, \text{ se obţine}$$

$$\operatorname{ctg} nx - \operatorname{ctg}(n+1)x = \frac{\sin x}{\sin nx \sin(n+1)x}, \text{ de unde } \lambda = 1$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} [\operatorname{ctg} kx - \operatorname{ctg}(k+1)x] = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}(n+1)x =$$

$$= \frac{\sin nx}{\sin x \sin(n+1)x}.$$

16. Calcule simple ne dau $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ şi $\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, cu care
$E(x) = 16\cos^4 x - 16\cos^3 x - 12\cos^2 x + 8\cos x + 4$
Punînd condiţia ca $E(x)$ să fie patrat perfect obţinem
$m = 2$, $n = -4$ şi $E(x) = 4(2\cos^2 x - \cos x - 1)^2$.

17. Înmulţim relaţia dată cu $a+b$ şi avem după simplificări $\frac{b}{a}\sin^2\alpha+\frac{a}{b}\cos^2\alpha=0$, de unde obţinem, de exemplu $\sin^2\alpha=\frac{a^2}{a^2-b^2}$, $\cos^2\alpha=\frac{b^2}{b^2-a^2}$, ceea ce este evident imposibil.

În concluzie nu există două numere reale care să satisfacă relaţia dată.

18. Calculăm primul membru E_1 al identităţii

$$E_1=\frac{\text{tg } x+1}{\text{tg } x-1}+\frac{\text{tg}^2\, x+3}{\text{tg } x-1}=\frac{2(\text{tg } x-1)}{\text{tg}^2\, x-1}=\frac{2}{\text{tg } x+1}$$

19. Se utilizează identităţile $\sec k\alpha \sec(k+1)\alpha=$

$$=\frac{\text{tg}(k+k)\alpha-\text{tg } k\alpha}{\sin\alpha} \text{ şi } \operatorname{cosec} k\alpha \operatorname{cosec}(k+1)\alpha=$$

$$=\frac{\text{ctg } k\alpha-\text{ctg}(k+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

20. Se transformă în produs sumele primelor şi ultimilor doi termeni după care scoţînd $2\cos a$ în factor se transformă din nou în produs.

21. Analog cu precedenta problemă.

22. Utilizînd formulele de tranformare a produselor de funcţii trigonometrice în sume se obţine imediat rezultatul cerut.

23. Se demonstrează în mod analog cu problema (20)

24. Analog cu problema (20).

25. Calculăm membrul drept

$$E_2=\text{tg }\alpha\frac{\sqrt{3}+\text{tg }\alpha}{1-\sqrt{3}\,\text{tg}\,\alpha}\cdot\frac{\sqrt{3}-\text{tg }\alpha}{1+\sqrt{3}\,\text{tg }\alpha}=\frac{\text{tg }\alpha(3-\text{tg}^2\, x)}{1-3\,\text{tg}^2\,\alpha}=$$

$$=\frac{3\,\text{tg }\alpha-\text{tg}^3\,\alpha}{1-3\,\text{tg}^2\,\alpha}=\text{tg } 3\alpha.$$

26. Ţinînd seama de formula care exprimă diferenţa $\text{tg } a-\text{tg } b$ în produs se obţine imediat $E=0$.

27. $E = \dfrac{1}{\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)}[\sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-$

$$-a) + \sin c \sin(a-b)].$$

Mai departe se tranformă produsele din paranteze în sume şi se obţine $E = 0$.

28. Se procedează în mod analog ca în problema precedentă.

29. $E = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x) -$

$$-\frac{3}{2}(\sin^4 x + \cos^4 x) = -\frac{1}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = -\frac{1}{2}$$

30. Eliminăm mai întîi pe x din relaţiile de condiţie

$$\sin x\,(b \cos a - a \cos b) = \cos x(b \sin a - a \sin b)$$

$$\sin x(B \sin a - A \sin b) = \cos x(A \cos b - B \cos a)$$

Făcînd raportul celor două egalităţi şi aducînd rezultatul la acelaşi numitor obţinem :

$$bA \cos a \cos b - aA \cos^2 b - bB \cos^2 a + aB \cos a \cos b =$$

$$= bB \sin^2 a - bA \sin A \sin B - aB \sin a \sin b + aA \sin^2 b,$$

sau

$bA \cos(a-b) + aB \cos(a-b) = aA + bB$, de unde rezultă rezultatul cerut.

31. Din ultima relaţie se scoate prin ridicare la puterea a doua

$$\sin^2 u = \frac{n^2 \cos^2 v}{m^2}; \qquad \cos^2 u = \frac{m^2 - n^2 \cos^2 v}{m^2}$$

Introducem a doua din aceste valori în relaţia a doua şi obţinem

$$\cos 2v = \frac{m^2-1}{n^2} \qquad \mathrm{tg}^2 v = \frac{1-\cos 2v}{1+\cos 2v} = \frac{n^2-m^2+1}{n^2+m^2-1}$$

Procedînd în mod analog la eliminarea lui v între ultimele două relaţii date, obţinem

$$\cos^2 u = \frac{1-n^2}{m^2}; \qquad tg^2 u = \frac{m^2+n^2-1}{m^2-n^2+1}$$

Introducînd relațiile în tg u și tg v în prima relație avem

$$\frac{m^2(m^2+n^2-1)}{m^2-n^2+1}+\frac{m^2(n^2-m^2+1)}{n^2+m^2-1}=1$$

32. Adunăm și scădem relațiile date, după care rezolvăm sistemul obținut, în raport cu $x+y$ și cu $x-y$.
Se constată că $(x+y)^2$ și $(x-y)^2$ se exprimă simplu în funcție de $\sin\alpha\cos\alpha=u$ și se va elimina u între cele două relații prin substituție.

33. Ținînd seama de identitatea de la problema (27) se ajunge imediat la rezultatul eliminării: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=0$

34. Exprimă dată se pune sub forma:

$$E=\frac{\mathrm{tg}^2(a+b)+p\,\mathrm{tg}(a+b)+q^2}{1+\mathrm{tg}^2(a+b)}$$

Pe de altă parte avem

$$\mathrm{tg}(a+b)=\frac{\mathrm{tg}\,a+\mathrm{tg}\,b}{1-\mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b}=\frac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}=\frac{p}{q-1}$$

și înlocuind valoarea aceasta a lui tg$(a+b)$ în E se obține rezultatul dorit.

35. Rezultatul eliminării este

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{vmatrix}=3abc-a^3-b^3-c^3$$

36. Să notăm primul grup de relații cu (x) și al doilea (xx) și să arătăm că grupul (x) implică grupul (xx).
Înmulțind în grupul (x) prima ecuație cu a și a doua cu b și a treia cu c și adunînd termen cu termen obținem
$a^2+b^2-c^2=2\,ab\cos c$
adică a treia ecuație din (xx). În mod analog se obțin și celelalte relații (xx) sau se observă că relațiile din grupul (x) se obțin una din alta prin permutări circulare și în consecință efectuînd permutări circulare în relația deja obținută din (xx), le obținem și pe celelalte.
Pentru a demonstra implicația inversă dintre grupurile (x), (xx), adunăm primele două ecuații din grupul (xx) și obținem $2c^2-2bc\cos A-2ac\cos B=0$, de unde
$c=b\cos A+a\cos B$

Celelalte relaţii se obţin fie analog, fir prin permutări circulare.

37. Din prima relaţie scoatem

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \text{ de unde}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A =$$

$$= \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2 \cos b \cos c \cos a}{\sin^2 b \sin^2 c} =$$

$$= \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

Mai departe

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

Formula care-l dă pe $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}$ este simetrică în a, b, c, ceea ce demonstrează că este egală şi cu $\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b}$ şi cu $\frac{\sin^2 C}{\sin^2 c}$.

De aici, ţinînd seama că $a, b, c, A, B, C \in [0, r]$ rezultă relaţiile

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

38. Trecînd toţi termenii identităţii în membrul stîng şi notînd cu E această expresie, avem:

$$E = \cos a + \cos b - \cos(a - b) - \frac{3}{2} = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} -$$

$$- 2\cos^2\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left[\left(2\cos\frac{a+b}{2} - \cos\frac{a-b}{2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sin^2\frac{a-b}{2}\right] = 0$$

Suma de pătrate din membrul drept este nulă numai dacă

$$2 \cos \frac{a+b}{2} = \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin \frac{a-b}{2} = 0$$

De aici, ținînd seama de intervalul unde se află a și b avem $a - b = 0$, $\frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{3}$ de unde rezultă imediat concluzia.

39. Transformînd relațiile de condiție în produse și făcînd raportul lor obținem

$$\operatorname{tg} \frac{u+v}{2} = \frac{b}{a}, \text{ de unde } \operatorname{tg}(u+v) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

40. Ridicînd la patrat și adunînd cele două relații obținem

$$\sin^6 u + \cos^6 u = \frac{1}{m^2}, \text{ de unde } 3 \sin^2 u \cos^2 u = 1 - \frac{1}{m^2}$$

$$\text{și } 3(\cos^4 u + \sin^4 u) = 1 + \frac{2}{m^2}$$

Apoi dezvoltînd relațiile date și reducînd termenul în sin a obținem
$\cos a = m(\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x) = 4m(\cos^6 u + \sin^6 u) - 3m(\sin^4 u + \cos^4 u)$ de unde rezultă în fine, prin eliminarea lui u, $m^2 + m \cos a - 2 = 0$

41. $E = 4(\cos \alpha + 1) = 8 \cos^2 \alpha$.

42. $E(x) = (\sin x + \cos x)(3 - 2 \sin x \cos x - \sin^2 x \cos^2 x)$.
Pentru exprimarea lui $\cos x$ ca funcție de a avem

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2 - \sin^2 x - \cos^2 x =$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 - 1).$$

$$R: E = -\frac{a}{4}(a^4 + 2a^2 - 15).$$

43. $$E = \frac{1 + m(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x)}{1 - 3\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{4(1+m) - 2mu^2}{4 - 3u^2} =$$

$$= \frac{(1+v^2)^2 + m(1+v^4)}{1 - v^2 + v^4}$$

Pentru $m = -3$, $E = -2$ deci e independentă de x.

44. Utilizînd formula $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, înlocuim pe cu $\frac{x}{3^k}$ şi obţinem

$$(*) \quad 3^k \sin^3\frac{x}{3^k} = \frac{1}{4}\left((3^{k+1}\sin\frac{x}{3^k} - 3^k\frac{x}{3^{k-1}}\right)$$

Punînd în relaţia (*) $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ şi sumînd

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \sin^3\frac{x}{3^k} = \frac{1}{4}\left[3^{n+1}\sin\frac{x}{3^n} - \sin 3x\right]$$

45. $E = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

46. Fie pentru un x dat ecuaţia binoamă de gradul n în z

$$z^n - \cos 2nx - i\sin 2nx = 0$$

avînd rădăcinile $z_k = \cos\left(2x + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(2x + \frac{2k\pi}{n}\right)$

Conform teoremei generale a algebrei putem scrie

$$z^n - \cos 2nx - i\sin 2nx = \prod_{k=0}^{n-1}(z - z_k) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z - 1 + \right.$$

$$\left. + 1 - \cos\left(2x + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(2x + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] = \prod_{k=0}^{n-1}\left\{\left(z - 1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right)\left[\sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) - i\cos\left(x + \frac{k\pi}{n}\right)\right]\right.\right]$$

Făcînd în această identitate $z = 1$, obţinem

$$1 - \cos 2nx - i\sin 2x = \prod_{k=0}^{n-1}\left\{2\sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right)\left[\left(\cos\left(x + \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. + 3\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right) + i\sin\left(x + \frac{3\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right)\right]\right\}$$

Deoarece două numere complexe egale au modulele egale rezultă imediat că

$$2 \sin nx = \prod_{k=0}^{n-1} \left[2 \sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right)\right] = 2^n \prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(x + \frac{k\pi}{n}\right)$$

De aici avem produsul căutat

$$\prod_{k}^{n-1} \sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin nx}{2^{n-1}}$$

47. Împărțind identitatea de la problema precedentă cu $\sin x$ și trecînd la limită pentru $x \to 0$ obținem egalitatea cerută.

48. Punînd egalitatea dată sub formă de proporție obținem

$$\frac{\sin(x-y)}{\sin x} = \frac{\sin x + \sin(x-2y)}{\sin(x+y)\sin(x-y)} = \frac{2 \sin(y-x) \cos y}{2 \sin x \cos y}$$

de unde rezultă că această egalitate este o identitate.

49. Grupînd termeni cu același argument, avem $\sin\left(a + \frac{b}{4}\right) + \cos\left(a + \frac{b}{4}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - a - \frac{b}{4}\right)$. Notînd cu E suma tuturor termenilor avem :

$$\frac{E}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - a - \frac{b}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - b - \frac{c}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - c - \frac{a}{4}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2} - \frac{b+c}{8}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2} + \frac{b-c}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + c + \frac{a}{4}\right)$$

Ținînd seama că $a + b + c = \pi$ se obține imediat

$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2} - \frac{b+c}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{c}{2} + \frac{a}{8}\right)$ și cu aceasta se ajunge la

$$E = 4\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{A}{2} + \frac{B}{8}\right) \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{B}{2} + \frac{C}{8}\right) \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{C}{2} + \frac{A}{8}\right).$$

50. Notînd expresia de transformat în produs cu E avem

$$E = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{c}{4}\right)\right]=$$

$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{8}\right)\cos\left(\frac{a-b}{8}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{c}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{c}{8}\right)\right]=4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{c}{8}\right)\left[\cos\frac{a-b}{8}+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a+b}{8}\right)\right]=$$

$$=4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{a}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{b}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{c}{8}\right).$$

51. $R: \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4 \sin a \sin b \sin c$

52. Mai întîi transformăm.

$$\sin^3 a\cdot\cos(b-c)=\frac{1}{2}\sin^2 a[\sin(a+b-c)+\sin(a-$$

$$-b+c)]=\frac{1}{2}\sin^2 a(\sin 2c+\sin 2b)=\sin^2 a(\sin b\cos b+$$

$$+\sin c\cos c).$$

Cu aceasta expresia pe care trebuie s-o transformăm în produs, notată cu E, devine:

$E = \sin a\cdot\sin b(\sin a\cos b+\sin b\cos a)+\sin b\sin c(\sin b\cos c+\sin c\cos b)+\sin a\sin c(\sin a\cos c+\sin c\cos a)=\sin a\sin b\sin(a+b)+\sin b\sin c\sin(b+c)+\sin a\sin c\sin(a+c)=3\sin a\sin b\sin c.$

53. Utilizăm formula $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ şi avem:

$$\sin 3a\cos^3(b-c)=\frac{1}{4}\sin 3a[3\sin(b-c)-\sin 3(b-c)]=$$

$$=\frac{3}{4}\sin 3(b+c)\sin(b-c)-\frac{1}{4}\sin 3(b+c)\sin 3(b-c)=$$

$$=\frac{3}{8}[\cos(2b-4c)-\cos(4b+2c)]-\frac{1}{8}[\cos 6c-\cos 6b)\ \text{de}$$

unde, notînd cu E expresia de transformat în produs,

$$E=\frac{3}{8}[\cos 2(b+2c)-\cos 2(c+2b)+\cos 2(c+2a)-$$

$$-\cos 2(a+2c)+\cos 2(a+2b)-\cos 2(b+2a)]-$$

$$-\frac{1}{8}(\cos 6c-\cos 6b+\cos 6a-\cos 6c+\cos 6b-\cos 6a).$$

Ţinînd seama de condiţia $a + b + c = \pi$, avem

$\cos(2b + 4c) = \cos(2b + 4a)$ căci $\cos(2b + 4c) = \cos(4a + 4b + 4c - 2b - 4c)$

$\cos(2c + 4b) = \cos(2c + 4a).$

$\cos(2a + 4c) = \cos(2a + 4b)$

şi cu aceasta $E = 0$.

54. $R: 4 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x$ sau $\dfrac{\sin 2x \cos \frac{5x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$

55. Notăm $S_1 = \sum_{k=1}^{n} \cos^2 kx$, $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \sin^2 kx$ şi avem

$S_1 + S_2 = 2n$

$S_1 - S_2 = \cos 2x + \cos 4x \ldots \cos 4nx$. Înmulţind cu $\sin x$ avem

$$(S_1 - S_2) \sin x = \frac{1}{2} [(\sin 3x - \sin x + \sin 5x - \sin 3x + \ldots + \sin(4n+1)x - \sin(4n-1)x] = \frac{1}{2} [\sin(4n+1)x - \sin x] = \sin 2nx \cos(2n+1)x$$

de unde $S_1 - S_2 = \dfrac{\sin 2nx \cos(2n+1)x}{\sin x}$

şi în continuare

$$S_1 = n + \frac{\sin 2nx \cos(2n+1)x}{2 \sin x}$$

$$S_2 = n - \frac{\sin 2nx \cos(2n+1)x}{2 \sin x}$$

Expresia pe care trebuie s-o transformăm în produs este

$$S_1 - n = \frac{\sin 2nx \cos(2n+1)x}{2 \sin x}$$

56. Utilizînd notațiile problemei precedente avem de transformat în produs expresia $n - S_2$ și rezultatul rezultă imediat în problema indicată.

57. Notînd cu E suma pe care trebuie s-o transformăm în produs avem

$$E = \frac{\sin 5x}{\cos x \cos 4x} + \frac{\sin 5x}{\cos 8x \cos 3x} = \frac{\sin 5x(\cos 3x \cdot \cos 2x + \cos 5x \cos x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x} =$$

$$= \frac{\sin 5x\,(4 \cos^2 2x - \cos 2x - 1)}{\cos 2x \cos 3x \cos 4x} =$$

$$= \frac{\sin 5x\left(2 \cos 2x - \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(2 \cos 2x - \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)}{\cos 2x \cos 3x \cos 4x}$$

58. Notăm cu E expresia din primul membru și avem

$$E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \cos \frac{(m-n)\pi k}{p+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \cos \frac{(m+n)\pi k}{p+1}.$$

Dacă $m+n$ e divizibil cu $2(p+1)$, $\cos \frac{(m+n)\pi k}{p+1} = 1$ și

$$E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \cos \frac{(m-n)\pi k}{p+1} - \frac{1}{2}p$$

Utilizînd formula cunoscută (V) unul din modurile de obținere a fost ilustrat în problema (55). (V)

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad \text{găsim}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \cos \frac{(m-n)\pi k}{p+1} = -1$$

și de aici

$$S = -\frac{p+1}{2}$$

Celelalte alternative se demonstrează analog.

59. Ştim că $\operatorname{arc\,tg} u + \operatorname{arc\,tg} v = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{u+v}{1-uv}$. Notăm $u + v = 2k$ şi $1 + k^2 + k^4 = -uv$ şi atunci

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2k}{2+k^2+k^4} = \operatorname{arc\,tg}(k^2+k+1) - \operatorname{arc\,tg}(k^2-k+1)$$

şi de aici

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arc\,tg}\frac{2k}{2+2k^2+k^4} = \operatorname{arc\,tg} 3 - \operatorname{arc\,tg} 1 + \operatorname{arc\,tg} 7 -$$
$$- \operatorname{arc\,tg} 3 \ldots + \operatorname{arc\,tg}(n^2+n+1) - \operatorname{arc\,tg}(n^2-n+1) =$$
$$= \operatorname{arc\,tg}(n^2+n+1) - \frac{\pi}{4}.$$

60. Utilizînd formula de adunare a funcţiei arc tg avem

$$\operatorname{arc\,tg} a_{k+1} - \operatorname{arc\,tg} a_k = \operatorname{arctg}\frac{a_{k+1}-a_k}{1+a_{k+1}\,a_k} = \operatorname{arc\,tg}\frac{r}{1+a_k a_{k+1}}$$

De aici

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{r}{1+a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}(\operatorname{arc\,tg} a_{k+1} - \operatorname{arc\,tg} a_k) =$$
$$= \operatorname{arc\,tg} a_{n+1} - \operatorname{arc\,tg} a = \operatorname{arc\,tg}\frac{a_{n+1}-a_1}{1+a_1 a_{n+1}}.$$

61. Pornim de la formula

$$\operatorname{arc\,tg}(k+1)x - \operatorname{arc\,tg} kx = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{1+k(k+1)x^2}$$

şi cu aceasta suma noastră devine

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{1+k(k+1)x^2} = \sum_{k=1}^{n}[\operatorname{arc\,tg}(k+1)x - \operatorname{arc\,tg} kx] =$$
$$= \operatorname{arc\,tg}(n+1)x - \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg}\frac{nx}{1+(n+1)x^2}$$

62. $E(x) = p(\sin^4 x + \cos^4 x) + q\cos^2 x(1-\cos^2 x) = p +$

$$+ (q-2p)\cos^2 x \sin^2 x = p + \frac{q-2p}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) =$$
$$= \frac{6p+q}{8} + \frac{2p-q}{8}\cos 4x$$

Se observă că pentru $p > q > 0$ nu există valori p şi q pentru care $E(x) \equiv \cos 4x$ (căci $6p + q > 0$).
Dacă nu se impun relaţii de ordine faţă de zero atunci $E(x) \equiv \cos 4x$ implică $6p + q = 0$ şi $2p - q = 8$ de unde $p = 1$, $q = -6$.

63. Considerăm împreună sumele S_1 şi S_2 din această problemă şi din cea următoare şi calculăm $S = S_1 + i\, S_2$.
$S = \cos x(\cos x + i \sin x) + \cos^2 x(\cos 2x + i \sin 2x) + \ldots$
$\ldots \cos^n x(\cos nx + i \sin nx) = (\cos^2 x + i \sin x \cos x) +$
$+ (\cos^2 x + i \sin x \cos x)^2 + \ldots (\cos^2 x + i \sin \cos x)^n =$

$$= \frac{(\cos^2 x + i \sin x \cos x)[1 - (\cos^2 x + i \sin x \cos x)^n]}{1 - (\cos^2 x + i \sin x \cos x)} =$$

$$= \frac{\cos x(\cos x + i \sin x)\,[1 - \cos^n x \cos nx - i \cos^n x \sin nx]\,[1 - \cos^2 x + i \sin x \cos x]}{\sin^2 x}$$

de unde separîndu-se partea reală cu cea imaginară se obţin S_1 şi S_2.

64. Vezi problema precedentă.

65. Înlocuind tg a şi ctg a în funcţie de sin a şi cos a, primul membru al identităţii se transformă

$$\left(\frac{\cos a + \sin a}{\cos a}\right)^2 + \left(\frac{\sin a + \cos a}{\sin a}\right)^2 = (1 + \sin 2a)\left(\frac{1}{\cos^2 a} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\cos^2 a}\right) = \frac{4(1 + \sin 2a)}{\sin^2 2a}$$

2. INEGALITĂŢI TRIGONOMETRICE

2. Ştim că $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $|\sin x| < 1$ $|\cos x| < 1$ şi avem
$|\cos x|^n < \cos^2 x$
$|\sin x|^n < \sin^2 x$
Adunînd cele două inegalităţi şi ţinînd seama că $\sin^n x + \cos^n x < |\sin x|^n + |\cos x|_n < \sin^2 x + \cos^2 x < 1$.

3. Simplificînd termenul median al inegalităţii obţinem

$$\frac{2}{\operatorname{tg} x - 1} < \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1} < \frac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1}$$

Pentru $\operatorname{tg} x - 1 > 0$, înmulţim cu $\operatorname{tg} x - 1$ şi avem de demonstrat

$$2 < 1 + \operatorname{tg} x < 2 \operatorname{tg} x$$

Ambele inegalităţi sînt echivalente cu condiţia
Pentru $\operatorname{tg} x - 1 < 0$ se raţionează în mod analog

4. Avem

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \frac{(n-1)\operatorname{tg} b}{1 + n \operatorname{tg}^2 b} \text{ şi de aici}$$

$$\operatorname{tg}^2(a - b) = \frac{(n-1)^2}{(\operatorname{ctg} b + n \operatorname{tg} b)^2} = \frac{(n-1)^2}{(\operatorname{ctg} b + n \operatorname{tg} b)^2 + 4n} \leqslant \frac{(n-1)^2}{4n}$$

5. Se observă mai întîi că pentru unul din unghiuri egal cu 0 sau $\frac{\pi}{2}$ inegalitatea este adevărată întrucît membrul stîng este negativ iar cel din dreapta este nul.

Pentru a, b, c, diferiţi de 0 sau $\frac{\pi}{2}$ împărţim cu membrul drept şi efectuînd calculele obţinem

$$\frac{\sin(a+b)\sin(b+c)\sin(c+a)}{\sin 2a \sin 2b \sin 2c} = \frac{1}{8}[2 + \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} b +$$
$$+ \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} c + \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} c +$$
$$+ \operatorname{ctg} b \operatorname{tg} c].$$

Examinînd grupul $\operatorname{tg} a \operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b$ constatăm că este o sumă de două numere pozitive şi inverse deci va fi cel puţin egal cu 2. Acest fapt se demonstrează în modul următor pornind de la $(a-1)^2 \geqslant 0 \rightarrow a^2 + 1 \geqslant 2a \rightarrow a + \frac{1}{a} \geqslant 2$).

În paranteză se află trei astfel de grupuri şi numărul 2 deci întreaga paranteză din membrul drept este superioară lui 8 ceea ce demonstrează inegalitatea propusă.

6. Pornim de la formula cunoscută.

$$\operatorname{ctg} a = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{a}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{a}{2}}$$

cu ajutorul căreia putem scrie

$$1 + \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg}\frac{a}{2} = 1 + \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{a}{2} - 1}{2\operatorname{ctg}\frac{a}{2}} - \operatorname{ctg}\frac{a}{2} =$$

$$= -\frac{\left(1 - \operatorname{ctg}\frac{a}{2}\right)^2}{2\operatorname{ctg}\frac{a}{2}} \leqslant 0$$

7. Din formula care dă $\cos 2c$ în funcție de $\operatorname{tg} c$ rezultă că $\cos 2c \leqslant 0$ sau $1 - \operatorname{tg}^2 c \leqslant 0$ sînt echivalente.

$$1 - \operatorname{tg}^2 c = \frac{\cos^2 a \cos^2 b - (1 + \sin a \sin b)^2}{\cos^2 a \cos^2 b} =$$

$$= \frac{(1 - \sin^2 a)(1 - \sin^2 b) - (1 + \sin a \sin b)^2}{\cos^2 a \cos^2 b} = -\frac{(\sin a + \sin b)^2}{\cos a \cos b} \leqslant 0$$

8. Din condiția problemei și din faptul că funcția $\operatorname{tg} x$ este crescătoare avem

$$\operatorname{tg} a_1 \leqslant \frac{\sin a_i}{\cos a_i} \leqslant \operatorname{tg} a_n \text{ pentru } \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

De aici ținînd seama că $\cos a_i > 0$ $(\forall\, i)$ avem $\operatorname{tg} a_1 \cos a_i \leqslant \sin a_i \leqslant \operatorname{tg} a_n \cos a_i$. Sumînd aceste inegalități și împărțind apoi cu $\sum_{i=1}^{n} \cos a_i$ obținem relațiile de ordine cerute.

9. $$0 \leqslant \left(\operatorname{tg}\frac{a}{2} - \operatorname{tg}\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{tg}\frac{a}{2} - \operatorname{tg}\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{tg}\frac{b}{2} - \operatorname{tg}\frac{c}{2}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\operatorname{tg}^2\frac{a}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{b}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{c}{2}\right) - 2\left(\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2} + \operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}\right).$$

Dar în condițiile date $(a + b + c = \pi)$ știm că $\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2} + \operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} + \operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} = 1$ [Relația ce se obține imediat din formula care dă $\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right)$].

Cu aceasta inegalitatea cerută rezultă imediat.

10. $1-8\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}=1-4\left(\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a+b}{2}\right)\sin\frac{c}{2}=$

$=\sin^2\frac{a-b}{2}+\cos^2\frac{a-b}{2}-4\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}+$

$+4\cos^2\frac{a+b}{2}=\sin^2\frac{a-b}{2}+\left[\cos\frac{a-b}{2}-2\cos\frac{a+b}{2}\right]^2\geqslant 0$

În transformările de mai sus am ținut seama că în condițiile problemei $\sin\frac{c}{2}=\cos\frac{a+b}{2}$

De aici rezultă imediat inegalitatea cerută.

11. Se știe că dacă $a+b+c=\pi$,

$\cos a+\cos b+\cos c=1+4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$

(vezi problema II.1.10).
iar de aici, ținînd seama de rezultatul problemei precedente rezultă imediat inegalitatea cerută.

12. Utilizînd problema (II.1.23) se obține imediat

$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}=\frac{1}{4}(\sin a+\sin b+\sin c)$

Suma din partea dreaptă, așa cum vom arăta în problema următoare își atinge valoarea maximă atunci cînd $\sin a=$ $=\sin b=\sin c$, adică atunci cînd $a=b=c=\frac{\pi}{3}$.

Cum valoarea maximă a acestei sume este $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, inegalitatea cerută rezultă imediat

13. Mai întîi avem:

$\sin\frac{a_i+a_j}{2}-\frac{1}{2}(\sin a_i+\sin a_j)=\sin\frac{a_i+a_j}{2}\left(1-\cos\frac{a_i-a_j}{2}\right)\geqslant 0$

adică $\sin\frac{a_i+a_j}{2}\geqslant\frac{\sin a_i+\sin a_j}{2}$.

Folosind raționamentul inducției complete [vezi și problema (22)] obținem ușor $\sin\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin a_i$

Ținînd seama că $\sum_{i=1}^{n} a_i = \pi$, obținem

$$S \leqslant n \sin \frac{\pi}{n}$$

Pe de altă parte se obțservă că S atinge valoarea $n \sin\frac{\pi}{n}$ atunci

cînd $a_i = \frac{\pi}{n}$, $\forall\ i$ deci $S_{max} = n \sin\frac{\pi}{n}$.

14. Notînd cu $\vec{u}$ și $\vec{v}$ versorii direcțiilor din problemă avem componentele $u_1 = \cos a_1$, $u_2 = \cos b_1$, $u_3 = \cos c_1$ și $v_1 = \cos a_2$, $v_2 = \cos b_2$, $v_3 = \cos c_3$. Produsul scalar al celor doi versori va fi, dacă notăm cu θ unghiul lor,
$\cos\theta = u_1 \cdot v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \cos a_1 \cos a_2 + \cos b_1 b_2 +$
$+ \cos c_1 \cos c_2$
De aici ținînd seama că $\cos\theta < 1$ obținem inegalitatea cerută.

15. Se arată mai întîi că $\cos^2 a_1 + \cos^2 b_1 + \cos^2 c_1 = 1$.
Acest fapt reprezintă tocmai faptul că vectorul $\vec{u}$ definit în problema precedentă este versor.
Cu aceasta avem
$(\cos a_1 + \cos b_1 + \cos c_1)^2 = 1 + 2(\cos a_1 \cos b_1 +$
$+ \cos a_1 \cos c_1 + \cos b_1 \cos c_1) \leqslant 3$.
Pentru evaluarea acestei expresii am ținut seama de problema precedentă unde versorul v are componentele $\cos b_1$, $\cos c_1$, $\cos a_1$. Din relația obținută rezultă imediat relația cerută.

16. Mai întîi este evident că
$0 \leqslant (\cos a - \cos b)^2 = \cos^2 a + \cos^2 b - 2\cos a \cos b$:
de aici $\cos^2 a - \cos a \cos b + \cos^2 b \geqslant \cos a \cos b$ și
$\cos^3 a + \cos^3 b \geqslant \cos a \cos b(\cos a + \cos b)$.
La această inegalitate scrisă sub forma $3(\cos^3 a + \cos^3 b) \geqslant$
$\geqslant 3 \cos a \cos b(\cos a + \cos b)$ adăugăm în ambii membrii $\cos^3 a + \cos^3 b$ și obținem
$4(\cos^3 a + \cos^3 b) \geqslant (\cos a + \cos b)^3$, de unde rezultă inegalitatea cerută.

17. Ținînd seama de cele arătate la problema (12) inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu

$\frac{1}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) \geqslant \sqrt[3]{\sin A \cdot \sin B \sin C}$ care este

o consecinţă directă a relaţiei generale dintre media aritmetică şi cea geometrică a trei numere pozitive, demonstrată în introducerea paragrafului 2 din capitolul 1.

18. Vezi problema (I.2.30).

19. Se ţine seama de relaţia dintre media aritmetică şi geometrică a trei numere tg a, tg b, tg c şi se constată că valoarea maximă a mediei geometrice (deci a produsului tg a tg b tg c) se realizează cînd tg a = tg b = tg c adică cînd $a = b = $

$$= c = \frac{\pi}{6}.$$

20. Efectuînd transformări identice ale inegalităţii date se arată că aceasta este echivalentă cu

$(\text{tg } a + \text{tg } c)(\text{tg } a + \text{tg } b)(\text{tg } x + \text{tg } d)(\text{tg } b + \text{tg } d) -$
$- (\text{tg } a + \text{tg } b + \text{tg } c + \text{tg } d)[\text{tg } a \text{ tg } c(\text{tg } b + \text{tg } d) +$
$+ \text{tg } b \text{ tg } d(\text{tg } a + \text{tg } c)] \geqslant 0$

şi mai departe, după simplificări, ambele sînt echivalente cu

$(\text{tg } a \text{ tg } d - \text{tg } b \text{ tg } c)^2 \geqslant 0.$

21. Vezi problema (13).

22. Ţinînd seama de rezultatul problemei precedente putem scrie

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4} = \sin\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\gamma+\delta}{2}}{2} \geqslant \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\gamma+\delta}{2}}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}+\frac{\sin\gamma+\sin\delta}{2}}{2} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta}{4}$$

În această relaţie putem scrie $= \alpha = A$, $\beta = B$, $\gamma = C$,

$$\delta = \frac{A+B+C}{3}$$

$$\sin\frac{A+B+C+\frac{A+B+C}{3}}{4} = \sin\frac{A+B+C}{3} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sin A + \sin B + \sin C + \sin\frac{A+B+C}{3}}{4}$$ de unde rezultă imediat $\sin\frac{A+B+C}{3} \geqslant \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}$

23. $|a \cos x + b \sin x| = |a|\ |\cos x + \operatorname{tg} \varphi \sin x| =$

$$= \frac{|a|}{|\cos \varphi|} |\cos|x - \varphi||. \leqslant \frac{|a|}{|\cos \varphi|} \text{ unde } \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \text{ și de unde}$$

$$|\cos \varphi| = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Cu aceasta, înlocuind $\frac{|a|}{|\cos \varphi|}$ cu $\sqrt{a^2 + b^2}$ obținem

$$|a \cos \varphi + b \sin \varphi| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}.$$

24. $$\sin a + \operatorname{tg} a = \frac{4 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} > 4 \operatorname{tg} \frac{a}{2} > 4 \frac{a}{2} = 2a$$

Am folosit inegalitatea cunoscută $\operatorname{tg} a > a$, $\forall\ a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

25. Știm că $|\cos a| < 1$ și $\cos \alpha > 0$, $\forall\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Dar $[-1, 1] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ceea ce demonstrează proprietatea cerută.

26. Trecînd toți termenii în membrul stîng obținem inegalitatea echivalentă cu cea dată

$$\cos(\sin x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) > 0 \text{ sau}$$

$$(*)\ 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin x - \cos x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin x - \cos x}{2}\right) < 0$$

Dar știm că $\sin x \pm \cos x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ceea ce demonstrează faptul că argumentele sinusurilor din inegalitatea (*) sînt cuprinse între 0 și $\frac{\pi}{2}$ și cu aceasta inegalitatea dată este demonstrată.

27. Ținînd seama că $\sin x < 1$, $\cos x < 1$, avem

$$\sqrt{\sin x} > \sin x > \sin^2 x$$

$$\sqrt{\cos x} > \cos x > \cos^2 x$$

Adunînd cele două șiruri de inegalități obținem rezultatul cerut.

28. Presupunem cunoscute inegalitățile $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și atunci avem

$$\sin x = 2 \operatorname{tg}\frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)$$

Cum $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ și $\sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}$ rezultă că $\sin x > x\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$, ceea ce trebuia demonstrat.

29. Utilizînd rezultatul problemei precedente și inegalitatea $\sin x < x$ avem :

$$\sin\frac{1}{n-1} - 2\sin\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{6}\left[\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^3}\right] - \frac{2}{n}$$

Semnul expresiei din membrul drept se găsește, după calcule elementare că depinde de cel al fracției.

$$E(n) = \frac{2n^4 - 8n^2 + 3}{3n(n^2 - 1)^3}$$

iar semnul lui $E(n)$ se demonstrează ușor că este pozitiv pentru $n \geqslant 2$.

30. Avem $\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} > 0$, în condițiile problemei.

Cum $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b > 0$ rezultă
$1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b > 0$ și de aici rezultatul cerut.

31. Folosind rezultatele problemei (1.62), expresia $E(x)$ se poate pune sub forma

$$E(x) = \frac{6p + q}{8} + \frac{2p - q}{8}\cos 4x.$$

Valoarea maximă a lui $E(x)$ se realizează pentru $\cos 4x = 1$ și este egală cu $E_{max} = p$ ceea ce demonstrează prima concluzie. (S-a ținut seama de condițiile problemei).
Pentru a completa răspunsul observăm că E_{min} se realizează pentru $\cos 4x = -1$ și

$$E_{min} = \frac{p}{2}$$

32. Ţinînd mai întîi seama pentru $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem (*) $\sin a > a - \frac{a^3}{6}$ [vezi problema (28)] şi apoi folosind acest rezultat demonstrăm că $\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}$, în modul următor $\cos a - \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2} - (1 - \cos a) = \frac{a^2}{2} - 2\sin^2\frac{a}{2} =$

$$= 2\left(\frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}\right)$$

Dar (inegalitatea *)

$$\frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2} < \frac{a^3}{48}$$

$$\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2} < 2\frac{a}{2} = a\left(\text{din } \sin\frac{a}{2} < \frac{a}{2}\right)$$

Cu acestea

$$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + 2\cdot\frac{a^3}{48}\cdot a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}$$

În continuare avem

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} > \frac{a - \frac{a^3}{6}}{1 - \frac{a^2}{6} + \frac{a^4}{24}} > a + \frac{a^3}{2}$$

Pentru a verifica ultima inegalitate se ţine seama că în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ expresia $1 - \frac{a^2}{6} + \frac{a^4}{24} > 0$.

33. Rezultatul cerut rezultă astfel:

$$\sin x = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right) > x\left(1 - \frac{x^2}{4}\right),$$

deoarece $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ şi $\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}$.

34. Prima inegalitate este evidentă. Pentru a demonstra $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{4}$ procedăm astfel:

$$0 \leqslant 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \leqslant 2\cdot\frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$$

De aici obţinem rezultatul complet.

Interpretarea geometrică se referă la situaţia curbei $y = \cos x$ între dreapta $y = 1$ şi parabola $y = 1 - \frac{x^2}{2}$.

35. Pentru a arăta că $f(x) = x - \sin x$ este crescătoare pentru $x \in (-\infty, \infty)$ vom arăta că

$\operatorname{sgn} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 1$ adică dacă $x_2 > x_1$ rezultă $f(x_2) > f(x_1)$.

Efectuăm calculele pentru $x_2 - x_1 > 0$.

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1 - (\sin x_2 - \sin x_1) = x_2 - x_1 -$$
$$- 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2}$$

Dar

$$\left|\sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_2}{2}\right| \leqslant \left|\sin \frac{x_2 - x_1}{2}\right| < \frac{|x_2 - x_1|}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

ceea ce înseamnă că semnul diferenţei $f(x_2) - f(x_1)$ este dat de diferenţa $x_2 - x_1$ adică e pozitivă şi atunci $f(x)$ e crescătoare.

36. Inegalitatea dintre sinus şi argumentul său ne dă

$$\sin^2 \frac{x}{2m} < \frac{x^2}{4m^2} \text{ de unde}$$

$$\cos^m \frac{x}{m} = \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2m}\right)^m > \left(1 - \frac{x^2}{2m^2}\right)^m = \left(1 - m \frac{x^2}{2m^2} +\right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^2 + \ldots + (-)^{m-1} C_m^m \left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^m\right) > 1 - m \frac{x^2}{2m^2} -$$
$$- m^2 \left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^2 + \ldots + (1)^{m+1} m^m \left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^m > 1 - \frac{x^2}{2m}\left[1 +\right.$$
$$\left. + \frac{x^2}{2m} + \ldots \left(\frac{x^2}{2m}\right)^k + \ldots\right]$$

În condiţiile problemei ($|x| < 2m$ în paranteză avem o progresie geometrică a cărei sumă este finită şi avem

$$\cos^m \frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m\left(1 - \frac{x^2}{2m}\right)} = 1 - \frac{x^2}{2m - x^2}$$

3. ECUAȚII TRIGONOMETRICE

2. Scriem ecuația dată sub forma echivalentă
$\text{ctg } 2\pi x^2 = \text{ctg } (-4\pi x)$, de unde rezultă
$2\pi x^2 = -4\pi x + k\pi$ și pentru soluțiile ecuației date se rezolvă ecuația

$$2x^2 + 4x - k = 0 \text{ cu } k \in Z$$

3. Ținînd seama că $\text{tg } u$ și $\text{ctg } u$ au același semn, ecuația dată este echivalentă cu

$$\text{tg } 2x + \text{ctg } 2x = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ sau } \text{tg } 2x + \text{ctg } 2x = -\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Prima dintre aceste ecuații se rezolvă înlocuind $\text{ctg } 2x$

$$3 \text{ tg}^2 2x - 4\sqrt{3} \text{ tg } 2x + 3 = 0$$

$$\text{tg}^2 x = \frac{2\sqrt{3} \mp \sqrt{3}}{3} = \begin{cases} \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\text{de unde } x_1 = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, \; x_2 = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$$

Cea de a doua ecuație se rezolvă în același mod și dă soluțiile principale opuse.
Un alt mijloc de rezolvare a ecuației date este acela de a o ridica la pătrat, cînd dispune modulul.

4. Observăm mai întîi că

$$2 \cos^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 4x}{3} \leqslant 2, \; 2^x + 2^{-x} \geqslant 2$$

și deci ecuația poate fi satisfăcută doar de soluțiile comune ale sistemului

$$\cos^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 4x}{3} = 1$$
$$2^x = 1$$

A doua ecuație are soluția unică $x = 0$, care satisface și prima ecuație, deci soluția ecuației date este $x = 0$.

5 Întrucît $|\sin 2x| < 1$ şi $|\sin 5x| < 1$, ecuaţia dată poate fi satisfăcută numai dacă

$$\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 5x = 1 \end{cases} \text{ şi } \text{ sau } \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin 5x = -1 \end{cases}$$

Primul sistem de ecuaţii simultane se rezolvă astfel: Prima ecuaţie ne dă $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

Introducînd în ecuaţia a doua avem

$$\sin 5\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(k\pi + \frac{5\pi}{4}\right) \neq 1, \forall k \in Z \left[= (-1)^{k-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

deci primul sistem, simultan nu are soluţii.

Cel de-al doilea sistem se analizează în mod analog.

6. Ecuaţia dată poate fi satisfăcută numai de soluţiile comune ale ecuaţiilor

$$\begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \sin 7x = -1 \end{cases}$$

Analiza soluţiilor acestui sistem de ecuaţii simultane se face ca în problema precedentă.

7. Avem pentru $\sin x > 0$
$\sin^3 x \leqslant \sin^2 x$, semnul egal avînd loc pentru $\sin x = 1$
$\cos^8 x \leqslant \cos^2 x$, semnul egal ariilor pentru $\cos x = 1$
Sumînd cele două inegalităţi obţinem
$\sin^3 x + \cos^8 x \leqslant 1$, semnul egal (cazul ecuaţiei date verificîndu-se numai cînd $\sin x = 1$ şi $\cos x = 0$ sau $\sin x = 0$, $\cos x = \pm 1$
Soluţiile ecuaţiei date sînt deci

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ şi } x = k\pi \ \forall k \in Z.$$

8. Ecuaţia dată se poate scrie în forma echivalentă

$$4\cos^2\frac{x+y}{2} - 4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 1 - \cos^2\frac{x-y}{2} = 0 \text{ sau}$$

$$\left[2\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}\right] + \sin^2\frac{x-y}{2} = 0$$

De aici este evident că soluţiile ecuaţiei date sînt comune cu ale sistemului

$$\begin{cases} 2\cos\dfrac{x+y}{2} - \cos\dfrac{x-y}{2} = 0 \\ \sin\dfrac{x-y}{2} = 0 \end{cases}$$

Se scoate apoi din a doua ecuaţie $x - y = 2k\pi$ şi ţinînd seama de aceasta în prima ecuaţie, obţinem

$$\frac{x+y}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

În final se rezolvă sistemul algebric liniar pentru x şi y.

9. Din ecuaţia dată obţinem

$$\frac{1}{5}\arcsin x = 2k\pi.$$

De aici rezultă $x = \sin 10k\pi = 0$

10. Ecuaţia dată o scriem mai întîi

$$4\cos 2x = \frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \sin x\cos\frac{\pi}{3}}{\sin x\cos x} = \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin x\cos x}$$

De aici rezultă

$$\sin 4x = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right),\ \text{de unde}$$

$$4x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{3}\ \text{sau}\ 4x = (2k+1)\pi - x - \frac{\pi}{3}$$

11. Membrul stîng al ecuaţiei E_1 se poate transforma:

$$E_1 = (\sin^4 x + \cos^4 x)\left(1 + \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\right) + 4 = \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)$$

$$\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}\right) + 4 \text{ şi are valoarea minimă. } E_{min} = \frac{1}{2}\cdot 17 + 4 =$$

$$= 12 + \frac{1}{2}$$

Valoarea maximă a membrului drept este $12 + \frac{1}{2}$, deci ecuaţia dată poate fi satisfăcută numai cînd

$$(* \begin{cases} \sin^2 2x = 1 \\ \sin\ y = 1 \end{cases}$$

Sistemul (*), de ecuaţii ne dă soluţiile $y = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{2}$

şi $x = \frac{p\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $\forall k,\ p \in N$

12. Utilizînd formula

$\operatorname{arc\,tg} u + \operatorname{arc\,tg} v + \operatorname{arc\,tg} v = \operatorname{arc\,tg} \frac{u + v + w - uvw}{1 - uv - uw - vw}$ şi avem

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x(3 + a^2 - x^2)}{1 + a^2 - 3x^2} = \operatorname{arc\,tg} 3x$$

de unde rămîne de rezolvat ecuaţia algebrică,

$$\frac{x(3 + a^2 - x^2)}{1 + a^2 - 3x^2} = 3x.$$

13. Comparînd valorile extreme ale celor doi membri ai ecuaţiei date rezultă că trebuie să avem simultan

$$\begin{cases} \sin\ ax = 0 \\ \cos\ x = 1 \end{cases}$$

şi trebuie să determinăm valorile lui a pentru care acest sistem are soluţie unică.

Soluţia generală a primei ecuaţii este $ax = k\pi$, $\forall k \in Z$, iar cea a celei de-a doua ecuaţie este $x = 2p\pi$, $\forall p \in Z$.

Din aceste soluţii generale trebuie alese soluţiile comune adică între k şi p trebuie să avem relaţia

$$2ap\pi = k\pi.$$

Observăm apoi că $x = 0$ este soluţie a sistemului pentru orice a şi o analiză simplă ne arată că pentru a iraţional nu mai există alte soluţii în timp ce pentru a raţional mai există şi alte soluţii. Deci răspunsul la problema dată este $a \in R/Q$.

14. Observăm că primul termen din prima ecuaţie este o sumă de două numere pozitive şi inverse deci este mai mare sau egal cu 2, în timp ce membrul sting este mai mic sau cel mult egal cu 2, deci sistemul dat este echivalent cu

$$\operatorname{tg}^2 x = 1$$
$$\sin^2 y = 1$$
$$\cos^2 z = 0$$

Acest ultim sistem se rezolvă imediat.

15. Sistemul dat îl punem sub forma

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \sin a$$

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \cos a$$

de unde prin împărţire termen cu termen (presupunînd $\cos a \neq 0$ (se analizează separat cazul $\cos a \neq 0$) Obţinem

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \operatorname{tg} a$$

de unde $x + y = 2k\pi + 2a, \ \forall k \in Z$

Rezolvînd apoi prin substituţie sistemul

$$\begin{cases} x + y = 2k\pi + 2a \\ \cos x + \cos y = \cos a \end{cases}$$

obţinem $x = a \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \ y = a \mp \frac{\pi}{3} + 2(p-k)\pi.$

Analiza cazului $\cos a = 0$ se face simplu.

16. Ţinînd seama de problema (II.1.45), ecuaţia dată este echivalentă cu

$$\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} = 2 - \sqrt{3}, \text{ sau}$$

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}, \text{ a cărei soluţie este}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \ \forall k \in Z$$

17. Membrul stîng al ecuației date se transformă identic în forma $\frac{1}{2}$ $(\sin 2x + \cos 2x - \sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x)$. Înmulțind acum ecuația dată cu 2 și trecînd pe 1 din membrul drept în cel stîng obținem ecuația echivalentă.

$$(\sin 2x + \cos 2x)(1 - \sin 2x) = 0$$

ale cărei soluții se află cu ușurință.

18. Ecuația dată este echivalentă cu

$$\operatorname{tg} 4x = 2\sqrt{3} \cos 2x$$

de unde prin transformări identice obținem

$$\cos 2x\,(2\sqrt{3} \sin^2 2x + \sin 2x - \sqrt{3}) = 0,$$

ecuație ale cărei soluții se pot afla cu ușurință.

19. Transformînd ambii membri ai ecuației date în produse obținem $3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$

Ținînd seama că perechile de arce $\frac{\pi}{4} - x$, $\frac{\pi}{4} + x$ și $\frac{\pi}{4} - 7x$ sînt complementare, soluțiile ecuației date vor fi date de ecuațiile simple

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 \text{ și } \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = 0$$

20. Se observă mai întîi că $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2|x|$ și notînd $|x| = u$ avem de rezolvat ecuațiile echivalente.

$$\frac{\sin \frac{u}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)} = \pm \operatorname{tg} u$$

sau dezvoltînd expresia de la numitor și simplificînd cu $\cos \frac{u}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{u}{2} - 1} = \pm \frac{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}}$$

Ultimele ecuații se rezolvă cu ușurință

21. Ținînd seama de inegalitatea
$|p \sin x + q \cos x| \leqslant \sqrt{p^2 + q^2}$ (vezi problema (2.2), condiția cerută este

$$|r| \leqslant \sqrt{p^2 + q^2}$$

Un alt mod de rezolvare a problemei constă în substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$ și cerința ca ecuația $(r + q)u^2 - 2pu + r - q = 0$ să aibă rădăcini reale.
Rezultatul este, așa cum era de așteptat, același.

22. Scriind că $\cos(10x + 12) = 1 - 2 \sin^2(5x + 6)$, ecuația dată se reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul doi în necunoscuta $\sin(5x + 6)$.

23. După ce se trec toți termenii ecuației în membrul stîng și se scoate în factor $\operatorname{ctg}\frac{\pi(1 - x)}{1 + x}$, rămîne de rezolvat în continuare o ecuație de gradul al doilea în $\operatorname{ctg} \frac{\pi(1 - x)}{1 + x}$

Apoi ecuațiile algebrice pentru determinarea lui x sînt simple.

24. După ce se transformă produsele din membrul stîng în sume rămîne de rezolvat ecuația.

$$\cos x + \cos 3x - \cos 2x - \cos 4x = 0.$$

Transformăm sumele în produs și avem de rezolvat ecuația

$$\cos x(\cos 2x - \cos 3x) = 0$$

ale cărei soluții se obțin cu ușurință.

25. Ecuația dată este echivalentă cu $\cos x(\cos 2x - \sin 6x) = 0$.

26. Ecuația dată este echivalentă cu $\cos^2 x(\cos 6x - \sin 6x)$ $(\cos 6x + \sin 6x) = 0$.

27. Soluțiile ecuației date se obțin din :

$$\sin 4x = 0 \quad \text{și}$$

$$2 \sin 2x \sin 6x - 1 = 0$$

Prima ecuaţie este banală iar în a doua primul membru se transformă identic.

$2 \sin 2x \sin 6x - 1 = \cos 4x - \cos 8x - 1 = \cos 4x(1 - 2 \cos 4x)$

Deci celelalte soluţii se vor obţine din

$$\cos 4x = 0 \text{ şi } \cos 4x = \cos \frac{\pi}{3}.$$

28. Primul membru al ecuaţiei este egal cu $\sin 3x$ şi deci ecuaţia dată este echivalentă cu

$$\sin 3x(\cos 5x - 1) = 0$$

29. Ţinînd seama că $\sin 3x = 4 \sin x \cos^2 x - \sin x$, $\cos 3x = \cos x - 4 \sin^2 x \cos x$ putem exprima $E(x)$ în forma:

$$E(x) = (\sin 2x - 1)\,[4(\sin x + \cos x) - 1]$$

Pentru exprimarea lui $\sin 2x$ în funcţie de u folosim identitatea $u^2 = 1 + \sin 2x$ şi cu aceasta

$$E(u) = (u^2 - 2)\,(4u - 1).$$

Rezolvarea ecuaţiei $E(x) = 0$ se face acum simplu.

30. Folosim identitatea care exprimă pe $\operatorname{tg} 3x$

$$\operatorname{tg} 3x(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x) \equiv \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x$$

pe care scăzînd-o din ecuaţia dată obţinem ecuaţia echivalentă cu cea dată

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x = 0$$

31. Mai întîi observăm că pentru definirea corectă a sistemului $\sin y \neq 0$. Substituind $x = \frac{2\pi}{3} - y$ în ecuaţia a doua, obţinem pentru y ecuaţia

$$\operatorname{ctg} y = \sqrt{3}$$

de unde soluţiile sistemului se obţin cu uşurinţă.

32. Dezvoltînd $\sin(x + y)$ şi $\sin(x - y)$ obţinem sistemul echivalent

$$2 \sin x \cos y + \sin y \cos x = 1$$
$$\sin x \cos y + 3 \sin y \cos x = 0$$

Rezolvăm acest sistem în raport cu sin x cos y și sin y cos x și avem:

$$\sin x \cos y = \frac{3}{5}, \quad \sin y \cos x = -\frac{1}{5}$$

Cu acestea construim $\sin(x + y) = \frac{2}{5}$ $\sin(x - y) = -\frac{1}{5}$ de unde aflăm soluțiile

$$x = (k + p)\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[(-1)^k \text{ arc sin } \frac{2}{5} + (-1)^p \text{ Arc sin } \frac{4}{5}\right]$$

$$y = (k - p)\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[(-1)^k \text{ Arc sin} \frac{2}{5} + (-1)^{p+1} \text{ Arc sin } \frac{4}{5}\right],$$

$$\forall\ k,\ p \in Z$$

33. Ținînd seama de formula care ne dă $\text{tg}(x + y + z)$, obținem că în cazul $x + y + z = \pi$, avem $\text{tg } x + tg\ y + tg\ z) = tg\ x \text{ tg } y \text{ tg } z$ și notînd $\text{tg } x = u$, $\text{tg } y = v$, $\text{tg } z = w$ avem de rezolvat sistemul $uw = 3$, $vw = 6$ $u + v + w = uvw$

care are soluțiile

$u_1 = 1,\ v_1 = 2,\ w_1 = 3$

$u_2 = -1,\ v_2 = -2\ w_2 = -3$

de unde rezultă apoi cu ușurință soluțiile sistemului dat.

34. Mai întîi observăm că $|x| \leqslant 1$.

Notînd $u = \text{arc sin } \frac{3x}{5}$, $v = \text{arc cos } \frac{4x}{5}$, avem

$$\sin u = \frac{3x}{5}, \cos u = \frac{\sqrt{25 - 9x^2}}{5}, \cos v = \frac{4x}{5}, \sin v = \frac{\sqrt{25 - 16x^2}}{5}$$

de unde rezultă imediat

$$\text{arc sin} \frac{3x}{5} + \text{arc cos } \frac{4x}{5} = \text{arc cos } \left(\frac{4x\sqrt{25 - 9x^2}}{25} - \frac{3x\sqrt{25 - 16x^2}}{25}\right)$$

Ecuația dată este deci echivalentă cu $4x\sqrt{25 - 9x^2} - 3x\sqrt{25 - 16x^2} = 25x$.

O soluţie evidentă este $x = 0$ şi dacă se analizează existenţa altor rădăcini reale se constată că asemenea rădăcini nu mai există.

35. Folosim formula $\cos(\text{arc} \sin x) = \sqrt{1 - x^2}$ a cărei demonstrare este foarte simplă.
Trecem 2 arc sin x în membrul drept şi calculînd sinusurile celor doi membri ai ecuaţiei obţinem

$1 - x = \cos(2 \text{ arc} \sin x) = \cos^2(\text{arc} \sin x) - \sin^2(\text{arc} \sin x) = 1 - 2x^2$ de unde $x = 2x^2$ şi soluţia ecuaţiei este $x = 0$ care, se verifică cu uşurinţă, satisface ecuaţia dată.

36. Observăm mai întîi că $x \in (0, 1]$. Apoi trecem termenul negativ în membrul drept şi calculăm sinusul ambilor membri ai ecuaţiei.

$\frac{1}{\sqrt{x}} = \cos\left(\text{arc} \quad \sin\sqrt{1 - x}\right) = \sqrt{x}$, de unde soluţia ecuaţiei date este $x = 1$.

37. Folosim pentru sin $3x$ formula $\sin 3x = 4 \sin x \cos^2 x - \sin x$ şi ecuaţia dată devine:

$\sin x(4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 - m) = 0$

ale cărei soluţii sînt date de ecuaţiile $\sin x = 0$ şi

$4 \cos^2 x + 2 \cos x - (1 + m) = 0.$

Ultima ecuaţie în cos x se discută în mod obişnuit, ţinînd seama că soluţiile ei trebuie să satisfacă condiţia $|\cos x| < 1$.

38. Ecuaţia a doua a sistemului se mai poate scrie

$$\cos x \cos y = \frac{3}{4}$$

Mai departe se explicitează modulul şi se consideră sistemele

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{3}{4} \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{4} \\ 2k\pi \leqslant x \leqslant (2k + 1)\pi \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{3}{4} \\ \sin x \sin y = \frac{1}{4} \\ (2k + 1)\pi \leqslant x \leqslant (2k + 2)\pi \end{cases}$$

Rezolvarea acestor sisteme se face adunînd şi scăzînd primele două ecuaţii după care se obţin sisteme algebrice liniare de ecuaţii ale căror soluţii trebuie să satisfacă condiţiile de mărginire pentru x.

39. Pentru ecuaţia cu necunoscuta $\operatorname{tg} x = u$ avem

$\Delta' = (p+1)^2(4-q)$ şi ecuaţia are soluţii u reale dacă $q \leqslant 4$ şi soluţii complexe în caz contrar. (Deci ecuaţia dată are soluţii pentru $q \leqslant 4$).
În cazul $q \leqslant 4$, semnele rădăcinilor se discută în mod obişnuit.

b) $\operatorname{tg} x = 8\sqrt{2}\cos^2 a \sin\left(\frac{\pi}{8} \pm a\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} \mp a\right)$

c) $x = k\pi$ şi $x = \operatorname{arc\,tg} 2(2+\sqrt{2})$.

40. Sistemul dat este echivalent cu

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{tg} y$$

$$x - y = \frac{\pi}{6}$$

sau mai departe cu

$$\begin{cases} x + y = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x - y = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

de unde se obţin soluţiile cu uşurinţă.

41. Simplificînd ecuaţia dată cu $\frac{b}{\cos\varphi}$, unde $\varphi = \operatorname{Arc\,tg}\frac{a}{b}$, obţinem ecuaţia echivalentă

$$\sin(\varphi + x) = \sin(\varphi + mx).$$

de unde se obţin soluţiile

$$x = \frac{2k\pi}{m-1},\quad x = \frac{(2k+1)\pi - 2\varphi}{m+1},\quad \forall\ k \in Z.$$

42. Înlocuind $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ și $\operatorname{ctg} 2x$ în funcție de $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, ecuația dată devine

$$m \sin 2x = n \sin x$$

ale cărei soluții sînt date de ecuațiile

$$\sin x = 0 \quad \cos x = \frac{n}{2m}$$

43. Trecînd $\sin x \cos x$ în membrul drept și ridicînd la pătrat se obține

$$\cos x \sin x (\sin x \cos x + 4) = 0$$

ale cărei soluții rezultă imediat și verifică ecuația de origine.

44. Trecînd toți termenii în membrul stîng și punînd $\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$, $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$, ecuația devine

$$\cos x (1 + 2 \cos x)(2 \sin x - 1) = 0$$

și sub această formă se rezolvă imediat.

45. Ținînd seama că pentru $x + y + z = \pi$, avem $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z$ și folosind proprietățile șirului de rapoarte egale se obține prin operații elementare $\operatorname{tg} x = a\lambda$, $\operatorname{tg} y = b\lambda$, $\operatorname{tg} x = c\lambda$ unde $\lambda = \sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}$ iar de aici x, y, z rezultă imediat.

46. Notăm valoarea comună a celor trei rapoarte cu λ și atunci

$$\cos x = a\lambda, \quad \cos y = b\lambda, \quad \cos z = c\lambda.$$

În plus din ecuația a treia rezultă $\cos z = \sin(x + y)$. Pentru determinarea lui λ avem atunci relația

$$c = b\sqrt{1 - a^2\lambda^2} + a\sqrt{1 - b^2\lambda^2}$$

care ne dă pentru λ^2 soluția

$$\lambda^2 = \frac{4a^2b^2 - c^4 - (a^2 + b^2)^4 + 2c^2(a^2 + b^2)}{4a^2b^2c^2}$$

de unde notînd $a + b + c = 2p$, obținem pentru $\lambda = \pm \frac{2}{abc}\sqrt{p(p-a)(p-b).(p-c)}$.

4. INECUAȚII TRIGONOMETRICE

1. Împărţind inecuaţia dată cu 2 obţinem

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{1}{4} = \cos x_0$$

unde am notat cu x_0 arcul din cadranul întîi care are cosinusul egal cu $\frac{1}{4}$.

De aici ţinînd seama de variaţia lui $\cos x$ între 0 şi 2π se obţine imediat

$$x - \frac{\pi}{6} \in [-x_0,\ x_0] \text{ sau } x \in \left[\frac{\pi}{6} - x_0,\ x_0 + \frac{\pi}{6}\right].$$

2. Trecînd pe -1 în membrul stîng obţinem inecuaţia echivalentă $2 \sin \frac{x}{2}\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right) > 0.$

Întrucît toate funcţiile care intră în inecuaţia dată sînt periodice, cu perioada 4π, este suficient să determinăm valorile lui x din $[0, 4\pi]$ pentru care inecuaţia este satisfăcută. Factorul $\sin \frac{x}{2}$ este nenegativ pentru orice valoare a lui

$x \in [0,\ 2\pi]$. Studiul factorului $\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}$ ne dă

$$\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} > 0 \text{ pentru } \forall\ \frac{x}{2} \in \left(0,\ \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4},\ 2\pi.\right)$$

Cu acestea soluţia inecuaţiei date este

$$\left(4k\pi,\ 4k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cup \left((4k+2)\pi, (4k+2)\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

3. Mai întîi observăm că ambii membri ai inecuaţiei date sînt pozitivi pentru orice valoare a lui x, ceea ce ne permite să o ridicăm la pătrat obţinînd inecuaţia echivalentă:

$$4 \sin^4 x - 23 \sin^2 x + 9 \sin x + 10 \leqslant 0$$

De aici avem

$$(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)(2 \sin x - 5)(\sin x - 2) \leqslant 0$$

ale cărei soluţii sînt

$$x \in \left[2k\pi - \frac{5\pi}{6},\ 2k\pi - \frac{\pi}{6}\right] \cup \left\{2k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}.$$

4. Inecuaţia dată este echivalentă cu

$$\lg_{\frac{\cos x}{\sqrt{2}}} \frac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{\cos^2 x} \leqslant 0$$

şi mai departe cu sistemele simultane

$$\begin{cases} 0 < \cos x < \sqrt{2} \\ \cos^2 2x \geqslant 1 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \cos x > \sqrt{2} \\ \cos^2 2x \leqslant 1 \end{cases}$$

Primul sistem admite drept soluţie $x = 2k\pi$, al doilea nu are soluţii.

5. Inecuaţia dată este echivalentă cu

$$\frac{\operatorname{tg} x + 2}{\operatorname{tg} x + 1} > 0$$

sau mai departe cu $\operatorname{tg} x < -2$ sau $\operatorname{tg} x > -1$ ale căror soluţii se obţin uşor.

6. Mai întîi este necesar ca $\operatorname{ctg} x > 0$, $\operatorname{ctg} x \neq 1$ şi

$\frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} > 0$, $\cos x \neq 1$, ceea ce ne dă pentru x

$$x \in \left(k\pi,\ k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{4}\right\}, \quad \forall\, k \in Z.$$

În aceste condiţii inecuaţia dată este echivalentă cu sistemele de inecuaţii simultane.

$$\begin{cases} 0 < \operatorname{ctg} x < 1 \\ \dfrac{\sin x(1 + \sin x)}{\cos x(1 - \cos x)} > 1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} x > 1 \\ 0 < \dfrac{\sin x(1 + \sin x)}{\cos x(1 - \cos x)} < 1 \end{cases}$$

Pentru rezolvarea acestor inecuaţii este necesar să se studieze semnul expresiilor $1 + \sin x - \cos x$ şi $\cos x(1 - \cos x)$ ceea ce se poate face cu uşurinţă dacă se foloseşte identitatea

$$1 + \sin x - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2}\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right).$$

7. Mai întîi trebuiesc satisfăcute condițiile $\operatorname{tg} x > 0$, $\operatorname{tg} x \neq 1$ și $\sin^2 x > \frac{5}{12}$.

În aceste condiții inecuația dată este echivalentă cu sistemele de inecuații simultane.

$$\begin{cases} 0 < \operatorname{tg} x < 1 \\ \operatorname{tg} x \sqrt{\sin^2 x - \frac{5}{12}} > 1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x > 1 \\ \operatorname{tg} x \sqrt{\sin^2 x - \frac{5}{12}} > 1 \end{cases}$$

Ținînd seama că una din condițiile de definire a inecuației este $\operatorname{tg} x > 0$, pentru rezolvarea inecuațiilor simultane vom împărți ultimele inecuații cu $\operatorname{tg} x$ și le vom ridica apoi la pătrat. Ca rezultat vom avea de studiat semnul expresiei.

$$12 \sin^4 x + 7 \sin^2 x - 12$$

ale cărei rădăcini reale sînt $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Cu aceste indicații inecuația dată se rezolvă fără dificultăți.

8. Se înmulțește inecuația cu 2, se trec toți termenii în membrul stîng și se descompune acest membru aducîndu-se inecuația dată la forma echivalentă.

$$(1 - 2 \sin x)(1 - 2 \cos x) > 0$$

care se rezolvă fără dificultăți.

9. Observăm mai întîi că membrul drept al inecuației este nenegativ ceea ce impune pentru membrul stîng condiția $\sin x + \cos x \geqslant 0$ adică $2k\pi < x < (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{4}$ sau $2(k + 1)\pi < x < 2(k + 1)\pi - \frac{\pi}{4}$. În aceste condiții se poate ridica inecuația dată la pătrat și se rezolvă ușor că inecuația echivalentă de gradul al doilea în $\sin 2x$

$$2 \sin^2 2x - 5 \sin 2x + 1 < 0$$

10. Avem

$$|\sin^3 x + \cos^3 x| \leqslant |\sin^3 x| + |\cos^3 x| \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1 < \sqrt{3}.$$

Deci inecuația dată nu are soluții.

11. Sistemul dat este echivalent cu

$$(\cos x - \sin x)(1 + 2 \sin x) > 0$$

$$-\frac{1}{2} > \cos x > \frac{1}{2}$$

Prima inecuație are drept soluție

$$x \in \left(2k\pi,\ 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(2k + 1)\pi + \frac{\pi}{6},\ (2k + 1)\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cup$$

$$\cup \left((2k + 2)\pi,\ (2k + 2)\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

A doua inecuație are soluția

$$x \in \left(2k\pi,\ 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(2k\pi + \frac{2\pi}{3},\ (2k + 1)\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cup$$

$$\cup \left((2k + 2)\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

Deci soluția sistemului cerut va fi

$$x \in \left(2k\pi,\ 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cup \left((2k + 1)\pi + \frac{\pi}{6},\ (2k + 1)\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cup$$

$$\cup \left((2k + 2)\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

12. Utilizînd formulele $\sin 3x = \sin x\ (4 \cos^2 x - 1)$, $\cos 3x = \cos x(1 - 4 \sin^2 x)$ sistemul de inecuații date devine

$$\sin x(1 - 2 \cos^2 x) > 0$$

$$\sin^2 x \cos x > 0$$

ale cărui soluții sînt

$$x \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{4},\ 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cup \left((2k + 2)\pi,\ (2k + 2)\pi - \frac{\pi}{4}\right).$$

13. Ținînd seama că $\frac{3}{2} - \cos x > 0$, $\forall x \in R$ inecuația dată se poate scrie

$$\frac{3}{2} - \cos x \leqslant 2\left|\sin \frac{x}{2}\right|$$

iar mai departe, notînd $\left|\sin \frac{x}{2}\right| = u$ avem :

$$4u^2 - 4u + 1 \leqslant 0$$

a cărei soluție este $t = \frac{1}{2}$ adică $\sin \frac{x}{2} = \pm \frac{1}{2}$.

14. Inegalitatea dată este satisfăcută de punctele din domeniile haşurate în figura 6.1.

15. Mai întîi trebuie să avem $\sin 2x > 0$, adică $x \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = I$. Pentru k par, şi $x \in I$ avem $\sin x > 0$ $\cos x > 0$ şi inecuația dată se scrie

$$(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x})^2 > 1$$

şi ținînd seama de problema (4.2.27) găsim că această inecuație este satisfăcută $\forall x \in I$.

Pentru k impar şi $x \in I$ avem $\sin x < 0$, $\cos x < 0$ şi inecuația dată se scrie.

$$(\sqrt{-\sin x} + \sqrt{-\cos x})^2 > 1.$$

În concluzie soluția problemei propuse este $x \in I$.

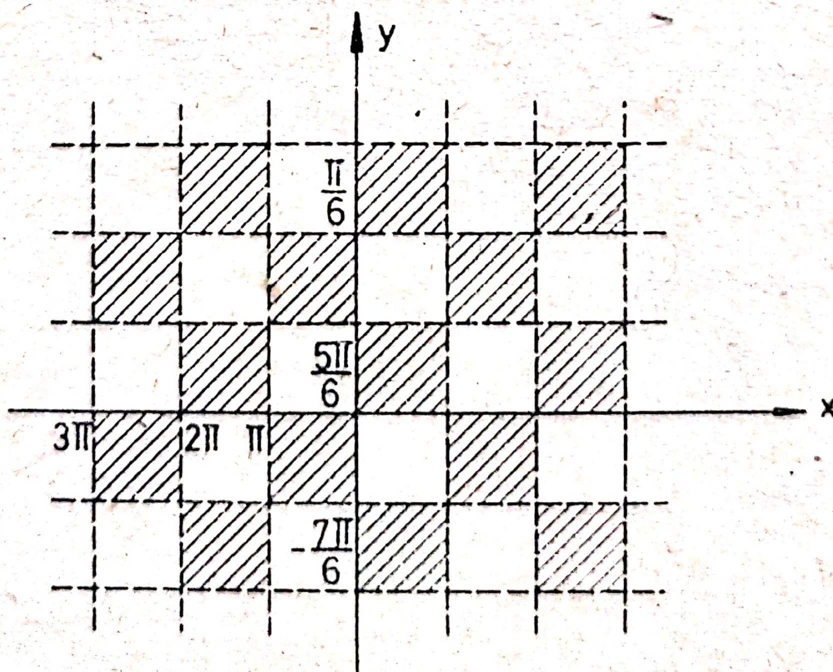


Fig. 6.1.

16. Reprezentăm grafic cei doi membri ai inecuației sau rezolvînd inecuația $x^2 + x + 1 > 1$ constatăm că $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$, $x^2 + x + 1 > 1 \geq \sin x$ deci toate aceste valori ale lui x satisfac inecuația dată.

Rămîne deci de studiat dacă inecuația mai are soluții și în intervalul $(-1, 0)$. În acest interval $x^2 + x + 1 > 0$ iar $\sin x < 0$ deci inecuația dată este adevărată pentru orice $x \in R$.

17. Reprezentînd cei doi membri ai inecuației date vom avea șase puncte de intersecție ale curbelor $y_1 = \sin x$ și $y_2 = \lg|x|$ (fig. 6.2) ale căror abscise le notăm x_1, x_2, x_3 și x_1', x_2', x_3'. În aceste condiții inecuația dată va fi satisfăcută pentru

$x \in (-\infty, x_3') \cup (x_2', x_1') \cup (x_1, x_2) \cup (x_3, \infty)$.

18. Pentru $x \in \left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ avem $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 2$ iar $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ deci inecuația dată este satisfăcută pentru toate aceste valori ale lui x.

Pentru $x \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right)$ avem $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \leq -2$ și inecuația dată nu poate avea soluții.

Pentru $x \in \left((2k+1)\pi, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, avem $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 2$ iar $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ este negativ, deci inecuația e satisfăcută oricare ar fi x din aceste intervale.

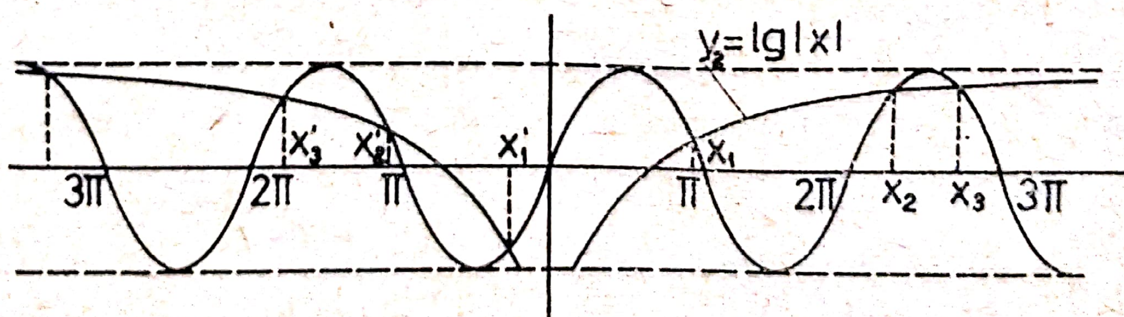


Fig. 6.2

Pentru $x \in \left[(2k+2)\pi,\ (2k+2)\pi - \frac{\pi}{2}\right)$ inecuaţia nu are soluţii.

19. Inecuaţia dată este echivalentă cu

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 3x\right)^2 \leqslant 0$$

şi soluţiile ei se găsesc din ecuaţia

$\sin x = \frac{1}{2}\sin 3x$ care se rezolvă uşor.

20. Inecuaţia dată se poate scrie sub forma

$$(*)\ \frac{4\sin^2 x + \sin^2 3x - 4\sin x \sin^2 3x}{4\sin x \sin^2 3x} \geqslant 0.$$

Formînd la numărător un pătrat perfect, îl vom putea scrie $(2\sin x - \sin^2 3x)^2 + \sin^2 3x(1 - \sin^2 3x)$.

De aici rezultă că semnul fracţiei din inecuaţia (*) va fi dat de $\sin x$ şi deci inecuaţia e satisfăcută pentru orice $x \in (0, \pi)$.

21. Ridicînd inecuaţia la pătrat obţinem :

$$|\sin 2x| > 0$$

ceea ce este adevărat pentru $x \in R \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}\right\}$.

22. Notînd $\operatorname{tg} x = u$, inecuaţia dată se transformă în $\frac{u(3-u)^2}{1-3u^2} > 1$

care după ce se pune sub forma echivalentă

$\frac{(u+1)(4u-u^2-1)}{1-3u^2} \geqslant 0$, se rezolvă cu uşurinţă.

23. Mai întîi este necesar ca $1 + \cos x \neq 0$, adică $x \neq (2k+1)\pi$

În aceste condiţii înmulţind inecuaţia cu $\frac{1+\cos x}{2}$ (> 0)

o putem pune sub forma

$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < \sin\frac{\pi}{3}$ şi o putem rezolva uşor.

O altă metodă constă în transformarea inecuaţiei date în forma $\operatorname{tg}\frac{x}{2} < \sqrt{3}$ care, de asemenei ne conduce imediat la soluţii.

24. Inecuaţia dată se poate pune sub forma $\sin^2 2x > \frac{3}{4}$ sau $\left(\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0$ de unde se obţin cu uşurinţă soluţiile.

25. Membrul stîng al inecuaţiei date se poate transforma identic în

$$\frac{\cos x}{2(1 + \sin x)}$$

după care inecuaţia dată se rezolvă uşor.

26. Notînd $\operatorname{tg} x = t$, inecuaţia dată devine
$4t^3 - 4t^2 + 4t - 1 \leqslant 0$, cu condiţia $0 < t < 1$.
Studiind rădăcinile reale ale polinomului $4t^3 - 4t^2 + 4t - 1$ se constată că acesta are o singură astfel de rădăcină situată între 0,3 şi 0,4. Se caută această rădăcină iraţională cu ajutorul metodelor coardei şi tangentei şi dacă notăm t_1 această rădăcină avem pentru necunoscuta t soluţia $t \in (0, t_1)$ de unde rezultă şi soluţia pentru x.

27. Inecuaţia dată este echivalentă cu

$$\frac{2}{\operatorname{tg} x + 1} < 1$$

iar aceasta la rîndul ei se poate scrie

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) < 0$$

ale cărei soluţii se găsesc imediat.

28. Inecuaţia dată este echivalentă cu

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 4x > 1$$

care se mai poate scrie

$$\operatorname{tg} x > \operatorname{tg}(90° - 4x)$$

ale cărei soluţii se găsesc uşor.

29. Inecuaţia dată se transformă identic în

$$8\cos^2 x > 2$$

care devine imediat $|\cos x| > \frac{1}{2}$

iar soluţiile ultimei inecuaţii se află uşor.

30. Inecuaţia dată este echivalentă cu

$$\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} < 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{sau } \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \operatorname{tg} 15^\circ$$

ale cărei soluţii se află cu uşurinţă.

31. Perioada funcţiei $\operatorname{tg} x$ este π iar a lui $\cos 3x$ este $\frac{2\pi}{3}$. Cel mai mic multiplu al celor două perioade este 2π, deci este necesar să studiem cele două inegalităţi pe intervalul $[0, 2\pi]$. Intersectînd intervalele pentru care sînt satisfăcute cele două inecuaţii se găseşte soluţia sistemului din intervalul $[0, 2\pi]$

(*) $$x \in (80^\circ, 90^\circ) \cup (225^\circ, 270^\circ).$$

Soluţia generală a problemei se obţine adăugînd la (*) un multiplu de 360°.

32. Soluţia problemei este dată de domeniul haşurat din figura 6.3.

33. Inecuaţia dată este echivalentă cu

$$\frac{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}} > 0$$

care se poate rezolva direct sau pusă sub forma

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) > 0.$$

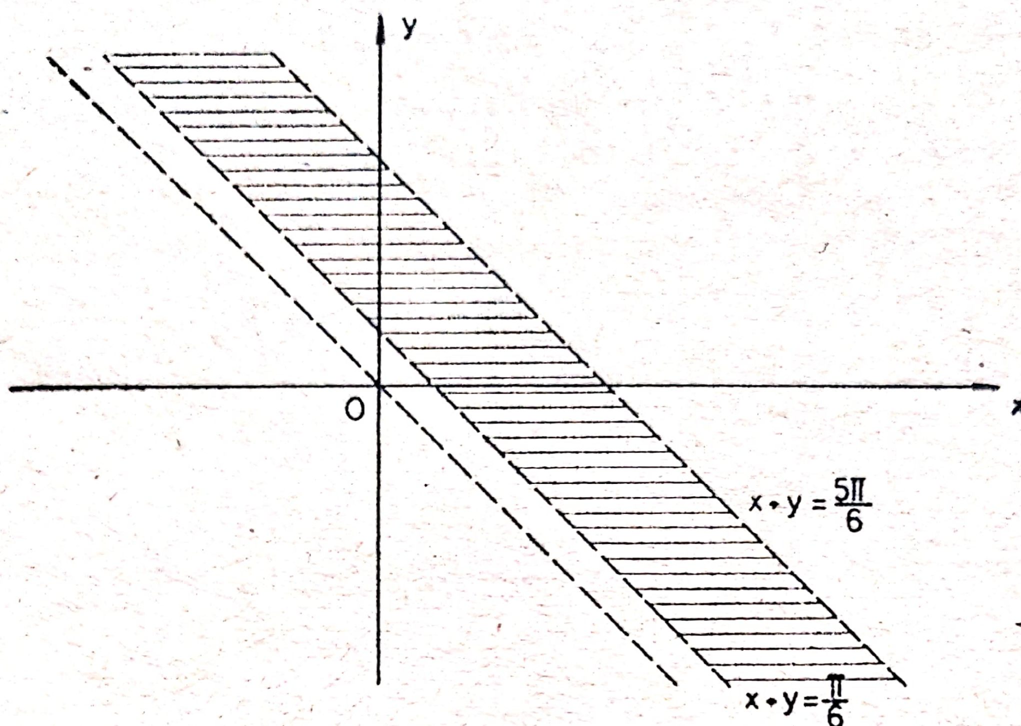


Fig. 6.3.

Considerăm funcția Arc tg $x : (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și notăm Arc tg $x = u$; inecuația dată este satisfăcută pentru $u \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ și ținînd seama de domeniul valorilor funcției $u =$ Arc tg x avem $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$

Considerăm graficul funcției $u =$ arc tg x și dreptele $u = 1$ și $u = 3$ găsim mai întîi $x \in (-\infty, \text{tg } 1)$

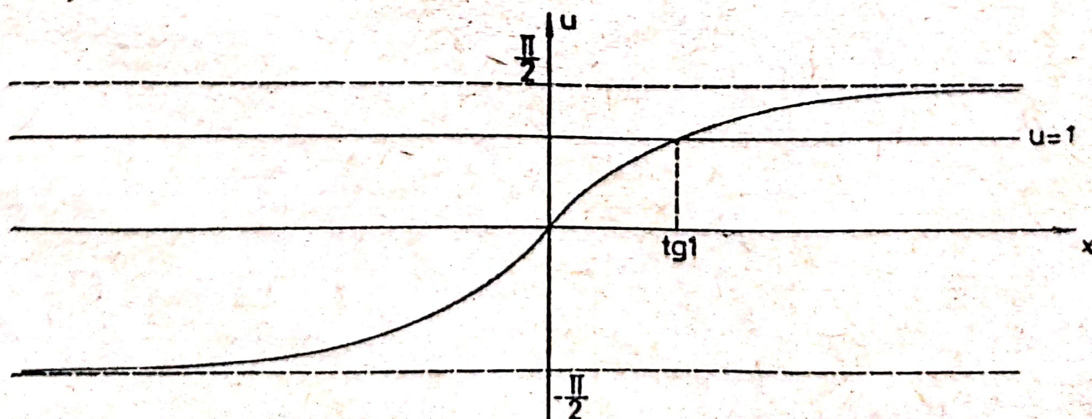


Fig. 6.4.

35. Mai întîi observăm că pentru a fi definiţi toţi termenii inegalităţii trebuie ca $x \in [0, 1]$.
În aceste condiţii inecuaţia dată se poate scrie ţinînd seama de relaţia
$\arcsin u - \arcsin v = \arcsin(u\sqrt{1-v^2} - v\sqrt{1-u^2})$
sub forma

$$\arcsin[(1-x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{x(2-x)}] > 0$$

Se consideră funcţia $y = \arcsin w : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \overset{\prime +}{\to} [-1, 1]$

pentru care avem
$\arcsin w > 0$. Dacă $w \in (0, 1)$,
Cu acestea inecuaţia dată se reduce la sistemul

$$0 < (1-x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{x(2-x)} < 1$$
$$x \in [0, 1].$$

36. Ştim că pentru a fi definit $\arcsin(x^2+1)$ trebuie ca $x^2 + 1 \leqslant 1$ adică $x = 0$ pentru care dacă avem în vedere funcţia $y = \sin(x^2+1) : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ obţinem arc

$\sin 1 = \frac{\pi}{2} < 2.$

37. Soluţia inecuaţiei date se obţine din inecuaţia echivalentă

$$\frac{y}{x} > \frac{\pi}{4}$$

ale cărei soluţii sînt în domeniul haşurat din figura 6.5.

38. Întrucît pentru orice $x, y \in R$ avem $x^2 + y^2 \geqslant 0$ inecuaţia dată este echivalentă cu

$(2k+1)\pi < \pi(x^2+y^2) < 2(k+1)\pi$ pentru $k = 0, 1, 2,$

$3\ldots$, adică $\sqrt{2k+1} < \sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{2(k+1)}$

Punctele care satisfac aceste inegalităţi se află în domeniile haşurate din figura 6.6 pentru $k = 0, 1$ adică se află în nişte coroane circulare deschise care alternează cu alte coroane circulare în care inegalitatea nu este adevărată.

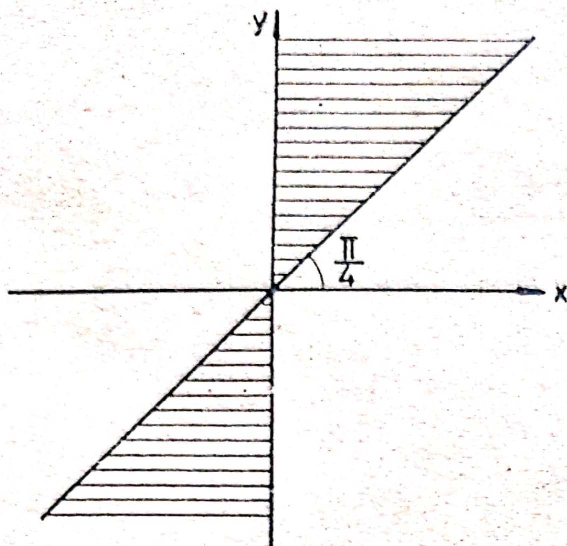


Fig. 6.5.

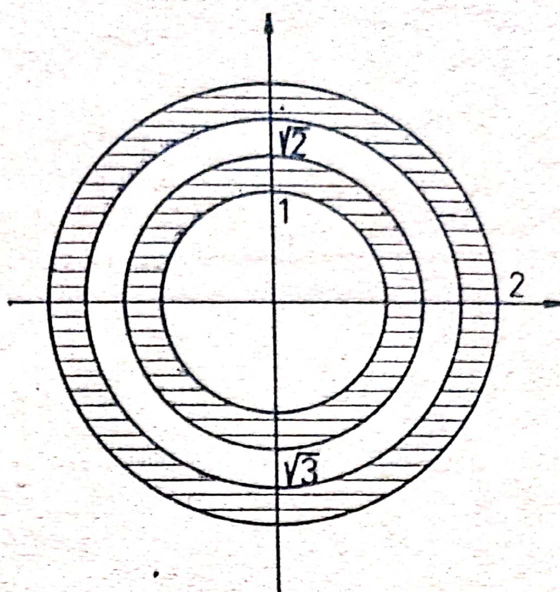


Fig. 6.6.

39. Condițiile de existență ale lui $f(x)$ sînt

$$x^2 - 1 > 0$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) > 0,$$

ale căror soluții se găsesc prin intersecția soluțiilor pentru fiecare inecuație în parte.

40. Condițiile de existență ale funcției date sînt date de

$$\left|\frac{2x}{1+x}\right| \leqslant 1$$

iar soluțiile acestei duble inegalități (nestricte!) se află ușor.

41. Condițiile de existență pentru $f(x)$ sînt date de inegalitatea dublă $-\frac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant \frac{1}{2}$ ale cărei soluții se găsesc ușor.

42. Condițiile de existență pentru $f(x)$ sînt date de sistemul de inecuații simultane.

$$x > 0$$

$$\sin\sqrt{x} > 0$$

A doua inecuație este echivalentă cu $2k\pi < \sqrt{x} < (2k+1)\pi$.

43. Condițiile de existență a lui $f(x)$ sînt date de relațiile

$$x \neq 0$$

$$\sin \frac{\pi}{x} > 0$$

44. Condițiile de existență a lui $f(x)$ sînt

$$x > 0$$

$$\cos(\lg x) > 0$$

a doua inecuație este echivalentă cu

$$\lg x \in \left(2k\pi,\ 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2},\ (2k+2)\pi\right).$$

5. PROBLEME REFERITOARE LA TRIUNGHIURI ȘI POLIGOANE

1. Utilizînd teorema lui Pithagora generalizată ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$) relația dată devine

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1$$

care poate fi pusă sub forma echivalentă

$$\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - 1\right) + \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} - 1\right) + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + 1\right) = 0.$$

După calcule elementare se găsește că relația dată poate fi pusă sub forma

$$\frac{(a + b - c)(a + c - b)(c + b - a)}{2abc} = 0$$

Această ultimă relație contrazice cel puțin una din relațiile de ordine care trebuie să fie satisfăcute de către laturile unui triunghi.

2. Ținînd seama de relațiile de bază ale trigonometriei avem

$$E = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2} - \frac{B+C}{8}\right)\cos\left(\frac{A-B}{4} + \frac{B-C}{8}\right) +$$

$$+ \sin\left(\frac{\pi}{4} + c + \frac{A}{4}\right)$$

Dar ținînd seama că $A + B + C = \pi$, avem :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2} - \frac{B+C}{8}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} + \frac{C}{2} + \frac{A}{8}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{C}{2} + \frac{A}{8}\right).$$

și cu aceasta

$$E = 2\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{C}{2} + \frac{A}{8}\right)\left[\cos\left(\frac{A-B}{4} + \frac{B-C}{8}\right) +\right.$$

$$\left. + \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{C}{2} + \frac{A}{8}\right)\right] =$$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{A}{2} + \frac{B}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{B}{2} + \frac{C}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{C}{2} + \frac{A}{8}\right).$$

3. Adunînd numărătorul cu numitorul și scăzînd numitorul din numărător, relația de condiție se poate scrie

$$\frac{1 + \cos(A+B)}{1 + \cos(A-B)} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = \left[\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}\right]^2$$

Pe de altă parte din relația sinusurilor se scoate

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}$$

Din cele două relații se obține imediat

$$\frac{a+b}{c} = \sqrt{\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}}$$

4. Condițiile problemei se pot scrie

$$\begin{cases} A + B + C = 180° \\ A + C = 2B \\ \sin A + \sin C = \cos^2 B. \end{cases}$$

Primele două relații ne dau $B = 60°$ de unde rezultă

$$A + C = 120°$$

$$\sin A + \sin C = \frac{1}{4}$$

iar acest ultim sistem se rezolvă fără dificultăți.

5. Din relația sinusurilor rezultă relațiile

$$a = c\,\frac{\sin A}{\sin C},\quad b = c\,\frac{\sin B}{\sin C}$$

cu ajutorul cărora expresia dată pe care o vom nota E devine

$$E = \frac{\sin A \cos A + \sin B \cos B - \sin C \cos C}{\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C} = \frac{\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C}{\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C}$$

care se transformă dacă ținem seama că $A + B + C$ în $E = \operatorname{tg} C \operatorname{ctg} B$.

6. a) Considerăm mai întîi dată relația

$$\sin\frac{B}{2} = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Ținînd seama de ea și de faptul că $\frac{B}{2} = 90 - \frac{A + C}{2}$ putem

scrie și $\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A + C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} =$

$$= \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

de unde rezultă $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$.

Considerînd acum dată ultima relație avem :

$$2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \text{ sau } \cos \frac{A+C}{2} = $$
$$= \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}$$

şi în virtutea condiţiei $A + B + C = 180°$ rezultă

$$\sin \frac{B}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}$$

În acest fel echivalenţa celor două relaţii este demonstrată.

b) Din relaţiile sinusurilor rezultă

$$\frac{a-c}{b} = \frac{\sin A - \sin C}{\sin B} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} - \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}}$$

Pe de altă parte din aceleaşi relaţii şi din $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$ rezultă

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\sin A - \sin C}{\sin A + \sin C} = \operatorname{tg} \frac{A-C}{2} \operatorname{ctg} \frac{A+C}{2} = \frac{1}{3} \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} - \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{c}{2}}$$

Din cele două relaţii obţinute rezultă relaţia cerută:

c) $\cos 2B = 1 - 2 \sin^2 B = 1 - 8 \sin^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{B}{2} = 1 - 8 \sin^2 \frac{B}{2} + 8 \sin^4 \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. De aici rezultă imediat

$$2 B = 90 - \frac{B}{2} \text{ şi } B = 36°.$$

$$\cos \frac{A-C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = 3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = + \frac{3}{4} (\sqrt{5} - 1)$$

Pentru aflarea unghiurilor A şi C avem relaţiile

$$A + C = 144°.$$
$$A - C = 2 \operatorname{Arc} \cos \frac{3}{4} (\sqrt{5} - 1)$$

7. $1 - 8 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1 - 4\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\cdot$

$$\cos\frac{A+B}{2} = \left[\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos\frac{A+B}{2}\right]^2 + 1 - \cos^2\frac{A-B}{2}.$$

8. Ținînd seama de formula

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}} = \cos u$$ și de definiția arcelor α, β, γ, obținem

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{b+c-a}{a+b+c}, \quad \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} = \frac{a-b+c}{a+b+c}, \quad \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$$

de unde rezultă imediat identitatea cerută.

9. Ținînd seama de formulele care dau tangentele jumătăților de unghiuri ale unui triunghi avem:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{S}{p^2}$$

unde p este semiperimetrul și $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ este aria triunghiului.

Pe de altă parte ținînd seama de expresiile pentru tg α, tg β, tg γ din problema precedentă se verifică imediat relația cerută.

10. Laturile triunghiului ABC sînt $r_1 + r_2$, $r_1 + r_3$, $r_2 + r_3$ semiperimetrul $p = r_1 + r_2 + r_3$ și

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{r_2 r_3}{r_1(r_1+r_2+r_3)}}, \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{r_1 r_3}{r_2(r_1+r_2+r_3)}}, \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{r_1 r_2}{r_3(r_1+r_2+r_3)}}$$

Ținînd seama de formula din problema precedentă care dă o relație între S și p, găsim: $S^2 = (r_1 + r_2 + r_3) r_1 r_2 r_3$.

11. Demonstrăm mai întîi că în orice triunghi avem:

(*) $\operatorname{ctg} A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$ (A, B, C, a, b, c, sînt unghiurile și laturile triunghiurilor).

Pentru aceasta avem din relațiile sinusurlior și a lui Pithagora

$\sin A = \frac{a}{2R}$ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ și deci

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\frac{abc}{4R}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \left(\text{am folosit formula } S = \frac{abc}{4R}\right)$$

Aplicînd această formulă în triunghiul format de mediana din a (m_a) latura $AB (= c)$ și jumătatea laturii $BC \left(= \frac{a}{2}\right)$ avem dacă ținem seama că aria acestui triunghi este $\frac{1}{2} S$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{m_a^2 + \frac{a^2}{4} - c^2}{2S} = \frac{4m_a^2 + a^2 - 4c^2}{8S} = \frac{b^2 - c^2}{4S}$$

Înlocuind $4S = 2bc \sin(B + C)$ și apoi rapoartele $\frac{b}{c}$ și $\frac{c}{b}$ din teorema sinusurilor obținem :

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin^2 B - \sin^2 C}{2 \sin B \sin C \sin(B + C)} = \frac{\sin(B + C)}{\sin B \sin C}$$

12. Scriind teorema lui Pithagora generalizată pentru diagonala BD în triunghiurile ABD și CBD, ținem seama de relația $\measuredangle A + \measuredangle C = 180°$ și scăzînd rezultatele obținem :

(*) $\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$ (Am notat $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$).

Calculul lui $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$ ne dă

$$\sin A = \frac{2}{ad + bc} \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$$

Scriind acum aria S ca suma ariilor triunghiurilor ABD și CBD obținem

$$S = S_{ABD} + S_{CBD} = \frac{1}{2}(ad \sin A + bc \sin C) = \frac{ad + bc}{2} \sin A$$

de unde rezultă formula cerută.

13. Ţinînd seama de rezultatul problemei (11) pentru a obţine rezultatul cerut, este suficient să demonstrăm că

$$\frac{\sin(B-C)}{\sin B\cdot\sin C}+\frac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}+\frac{\sin(C-A)}{\sin A\sin C}=0$$

Aducînd la acelaşi numitor şi transformînd produsele în sume obţinem identitatea de mai sus.

14. Ţinînd seama de relaţia sinusurilor într-un triunghi, identitatea cerută este echivalentă cu
$\sin^3 A\cos(B-C)+\sin^3 B\cos(C-A)+\sin^3 C\cos(A-B)$ $=3\sin A\sin B\sin C.$
Notînd cu E_1 membrul stîng al acestei relaţii îl vom transforma succesiv (ţinînd seama că $A+B+C=180°$).

$$E_1=\frac{1}{2}\Big[\sin^2 A(\sin 2B+\sin 2C)+\sin^2 B(\sin 2C+\sin 2A)+$$

$$+\sin^2 c(\sin 2A+\sin 2B)\Big]=\sin A\sin B(\sin A\cos B+$$

$$+\sin B\cos A)+\sin A\sin C(\sin A\cos C+\sin C\cos A)+$$
$$+\sin B\sin C(\sin B\cos C+\sin C\cos B)=3\sin A\sin B$$
$$\sin C.$$

15. Procedînd ca în problema precedentă se arată că relaţia dată este echivalentă cu:
$\sin^3 A\sin(B-C)+\sin^3 B\sin(C-A)+\sin^3 C\sin(A-$ $-B)=0$
Notînd cu E_1 expresia din membrul stîng al egalităţii, o transformăm succesiv (ţinem seama că $A+B+C=$ $=180°$).

$$E_1=\frac{1}{2}\Big[\sin^2 A(\cos 2C-\cos 2B)+\sin^2 B(\cos 2A-\cos 2C)+$$

$$+\sin^2 C(\cos 2B-\cos 2A)\Big]=\sin^2 A(\sin^2 B-\sin^2 C)+$$

$$+\sin^2 B(\sin^2 C-\sin^2 A)+\sin^2 C(\sin^2 A-\sin^2 B)=0$$

16. Folosind relaţia (*) din problema (11) avem

$$4(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)=\frac{a^2+b^2+c^2}{S}$$

de unde rezultă imediat relaţia cerută.

17. Ridicînd relația sinusurilor la pătrat, folosind proprietatea șirurilor de rapoarte egale și ținînd seama de relația de condiție, găsim imediat

$$(*)\ \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$$

Înlocuind $\sin C = \sin(A + B)$ și efectuînd unele transformări ale ecuației (*) obținem

$$\cos A \cos B(\sin A \sin B - 1) = 0$$

ceea ce ne arată că triunghiul în care se verifică relația dată este dreptunghic. Fie $A = 90°$. Avem atunci:

$$a = 2R,\ b^2 + c^2 = a^2 = 4R^2$$
$$b + c = a + 2r = 2(R + r)$$

De aici rezultă b și c și apoi unghiurile B și C.

18. Fie $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Ținînd seama că din teorema sinusurilor rezultă $\sin A = \frac{\overline{BD}}{2R} = \sin C$ și $\sin B = \sin D = \frac{\overline{AC}}{2R}$, avem $S = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{(ad + bc)\overline{BD}}{4R} = \frac{(ab + cd)\overline{AC}}{4R}$. De aici $16\, R^2S^2 = (ad + bc)(ab + cd)\overline{AC}\cdot\overline{BD} = (ad + bc)(ab + cd)(ac + bd)$ unde $\overline{AC}\cdot\overline{BD} = ac + bd$ reprezintă teorema lui Ptolomeu.

Dacă se ține seama de problema (12), se obține imediat rezultatul cerut.

19. Ținînd seama de teorema sinusurilor, identitatea de demonstrat este echivalentă cu

$$E = \frac{\sin^2 A \sin(B - C)}{\sin B + \sin C} + \frac{\sin^2 B \sin(C - A)}{\sin C + \sin A} + \frac{\sin^2 C \sin(A - B)}{\sin A + \sin B} = 0$$

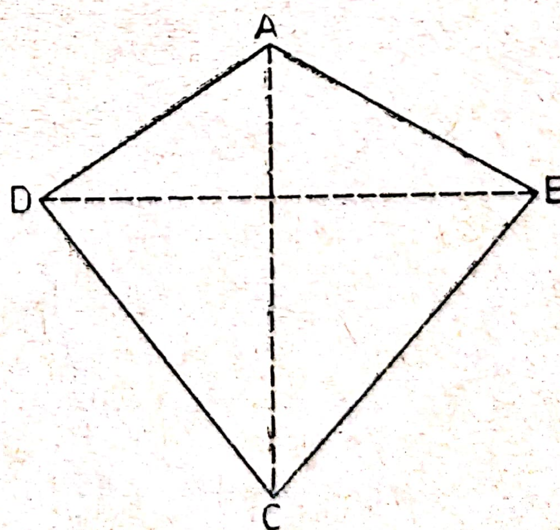


Fig. 6.7.

Expresia E o putem transforma succesiv

$$E = \frac{\sin A \sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin B + \sin C} + \frac{\sin B \sin(A+C)\sin(C-A)}{\sin C + \sin A} +$$

$$+ \frac{\sin C \sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin A + \sin B} = \sin A(\sin B - \sin C) +$$

$$+ \sin B(\sin C - \sin A) + \sin C(\sin A - \sin B) = 0$$

20. Notăm cu S şi p aria şi semiperimetrul triunghiului dat şi utilizăm formula cunoscută $S = pr$, unde r este raza cercului înscris. Aplicăm apoi teorema sinusurilor în triunghiul a cărei arie o căutăm şi ţinînd seama că unghiurile acestui triunghi sînt respectiv $\frac{B+C}{2}$, $\frac{C+A}{2}$, $\frac{A+B}{2}$ găsim aria căutată sub forma

$$\frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \sin\frac{A+B}{2} \sin\frac{B+C}{2} \sin\frac{C+A}{2}.$$

21. Ţinînd seama de un rezultat intermediar din problema (11) pe care îl aplicăm în triunghiul format de două laturi ale paralelogramului şi de diagonală şi de teorema sinusurilor în acest triunghi obţinem :

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4S}{a^2 - b^2} = \frac{2ab \sin A}{(a-b)(a+b)}$$

22. Vom calcula aria S, a $\triangle ABO$ ale cărui unghiuri sînt $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ şi $180 - \frac{A+B}{2}$.

$$S = \frac{ar}{2} = \frac{r}{2}(\overline{AE} + \overline{EB}) = \frac{r^2}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right)$$

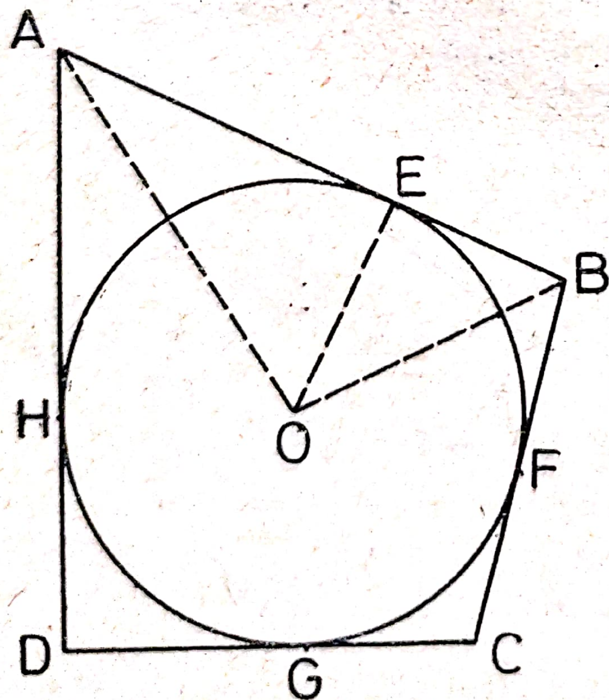


Fig. 6.8.

Din această relație se obține $a \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = r \sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)$

Repetînd același procedeu pentru $\triangle DCO$ și ținînd seama

că $\sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C+D}{2}$ $\left(\frac{A+B}{2}\right.$ și $\frac{C+B}{2}$ sînt suplimentare$\left.\right)$,

obținem prima relație cerută. A doua relație se obține în mod analog.

23. Împărțind aria patrulaterului în două părți S_{ABD} și S_{BCD}, prin diagonala BD avem

$$S = \frac{1}{2}(ad \sin A + bc \sin C)$$

Pe de altă parte teorema lui Pithagora ne dă

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$$

Cu cele două relații alcătuim sistemul

$$ad \sin A + bc \sin c = 2S$$

$$bc \cos C - ad \cos A = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)$$

care ne dă

$$a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \cos(A + C) = 4S^2 + \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2$$

De aici rezultă că valoarea maximă pentru S^2 (și deci pentru S) se realizează pentru $\cos(A+C)$ minim adică pentru $A + C = 180°$.

24. Relații trigonometrice cunoscute ne dau :

$$E = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cos A \cos B \cos C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C).$$

De aici avem

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 = 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Dacă triunghiul e ascuţit unghi dreptunghi sau obtuzunghi, atunci membrul drept e respectiv pozitiv, nul sau negativ, ceea ce demonstrează proprietatea cerută.

25. Folosind formulele cunoscute $S = pr$ $S = \frac{ab \sin C}{2}$ şi teorema sinusurilor avem succesiv:

$$\frac{1}{r} = \frac{p}{S} = \frac{a+b+c}{ab \sin C + bc \sin A + ac \sin B} = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2R \sin A \sin B \sin C}$$

Pe de altă parte exprimînd aria S prin formulele de tipul

$$S = \frac{1}{2} a\, h_a = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} \text{ găsim}$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin C \sin A} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin A \sin B}\right) = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2R \sin A \sin B \sin C}$$

26. Relaţia pentru $\frac{1}{r}$ din problema precedentă ne dă imediat

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \text{ sau } r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Pentru calculul lui r_a (de exemplu) avem:

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} = R(\sin A + \sin B + \sin C) \operatorname{tg} \frac{A}{2} =$$

$$= 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Cu acestea avem:

$$r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = 256R^4 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} =$$

$$4R^4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C = S^2$$

27. Notînd $\lambda = \frac{b-c}{h_a}$ (dat) şi ţinînd seama de problema (25) avem:

$$\lambda = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B \cdot \sin C} = \frac{4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{\cos(B-C) + \cos A}$$

Din această relație rezultă $\sin\frac{B-C}{2}=u$ din ecuația

$$u^2+2u\sin\frac{A}{2}-\lambda\cos^2\frac{A}{2}=0$$

Împreună cu $B+C=180-A$, relația de mai sus ne permite determinarea unghiurilor B și C.

Apoi în funcție de elementul liniar dat suplimentar se rezolvă triunghiul dat. De exemplu dacă se dă o latură se utilizează teorema sinusurilor, dacă se dă o înălțime se poate afla R (vezi problema 25) și apoi laturile și aria, etc.

28. Ținînd seama de expresia lui r din problema (26) și de relația sinusurilor avem

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{p}{r}$$

Apoi avem date unghiul A și $A+B+C=180°$.
Aceste date constituie un sistem de ecuații care determină unghiurile B și C. Restul elementelor se află prin metodele obișnuite.

29. Din relația lui Pithagora referitoare la latura C și din formulele cunoscute:

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4},\quad m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}$$

obținem pentru determinarea laturilor a și b sistemul

$$\frac{3}{4}(b^2-a^2)=m_a^2-m_b^2$$

$$\frac{5}{4}(a^2+b^2)-2ab\cos C=m_a^2-m_b^2$$

Acest sistem omogen de gradul II în a și b se rezolvă prin reducerea termenului liber. Apoi din teorema lui Pitagora rezultă c și mai departe, celelalte elemente se află ușor.

30. Din teorema sinusurilor rezultă

$$b+c=2R(\sin B+\sin C)=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$$

Notînd ca de obicei lungimea bisectoarei din A cu l_a găsim uşor relaţia

$$l_a = \frac{2R \sin B \sin C}{\cos \frac{B-C}{2}}$$

Din aceste două relaţii se găseşte

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{(b+c)\, l_a}{2bc}$$

De aici rezultă A şi cu aceasta problema dată se reduce la una clasică.

31. Se utilizează un rezultat intermediar din problema (25) care dă $h_a = 2R \sin B \sin C$, $h_b = 2R \sin A \sin C$, $h_c = 2R \sin A \sin B$ de unde se obţine

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{h_a}{h_b}; \quad \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{h_a}{h_b}$$

Împreună cu relaţia $A + B + C = 180°$ cele două relaţii pentru rapoartele $\frac{h_a}{h_b}$, $\frac{h_a}{h_a}$ (cunoscute) constituie un sistem de trei ecuaţii pentru necunoscutele A, B şi C.
După aflarea unghiurilor se pot afla laturile cu uşurinţă din formulele de tipul

$$h_a = c \sin B = b \sin C$$

6. PROBLEME DE CONCURS

1. Ecuaţia dată se poate scrie

$$\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi \sin x\right),$$

de unde

$\pi \cos x = k\pi + (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} - \pi \sin x\right)$, ecuaţie care se mai scrie

$$\cos x + (-1)^k \sin x = k + (-1)^k \cdot \frac{1}{2}$$

Cum $|\cos x \pm \sin x| \leqslant \sqrt{2}$, rezultă că putem avea soluții pentru $k = 0$, $k = 1$.
Pentru $k = 0$ ecuația $\sin x + \cos x = 0$ se rezolvă ușor și se găsesc soluțiile $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$.

Pentru $k = 1$ a em ecuația

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$$

care se rezolvă, de exemplu, prin substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$.

2. Ecuația dată se poate scrie

$$2 \sin \frac{\pi \lg x}{2} \cos \frac{\pi \lg x}{2} - 2 \sin^2 \frac{\pi \lg x}{2} = 2 \sin \frac{\pi \lg x}{2}.$$

$\left[\cos \frac{\pi \lg x}{2} - \sin \frac{\pi \lg x}{2}\right] = 0$ ale cărei soluții se obțin ca reuniune a soluțiilor ecuațiilor.

$$\frac{\pi \lg x}{2} = k\pi \text{ de unde } x = 10^{2k} \ (k \in Z).$$

$\cos \frac{\pi \lg x}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi \lg x}{2}\right)$, de unde $\frac{\pi \lg x}{2} = 2k\pi \pm$

$\pm\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \lg x\right)$ iar mai departe $\lg x = \frac{4k+1}{2}$, $x = 10^{\frac{4k+1}{2}}$

3. Din relația sinusurilor rezultă $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$ $c = 2R \sin C$ și introducînd aceste valori în relația lui Pitagora $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ se obține relația cerută

4. Punînd funcția dată sub forma

$f(x) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5}{n} + n\right)x + \sin\left(\frac{5}{n} - n\right)x\right]$, condiția de periodicitate cerută devine

$$\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{15\pi}{n} + n\pi + \frac{5x}{n} + nx\right) + \sin\left(\frac{15\pi}{n} - n\pi + \frac{5x}{n} - nx\right)\right]$$

și conduce la soluțiile $n \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$.

5. Ţinînd seama că $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ ecuaţia dată devine

$$\sin x(4 a \sin^2 x + 1 - 3 a) = 0$$

şi se rezolvă uşor. Pentru a se pune condiţia $\left|\frac{3a-1}{4a}\right| \leqslant 1$

6. Ecuaţia dată se transformă identic în forma

$$\sin 2x(1 + 2 \cos x) = 0$$

şi apoi se rezolvă uşor.

7. Funcţia dată se pune sub forma

$$f(x) = \frac{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{2 \sin^3 x \cos^3 x}$$

şi apoi se ţine seama că $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(1 - y^2)$

8. Ţinînd seama că $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x)$, ecuaţia dată se poate scrie

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x = 0$$

şi sub această formă se rezolvă uşor.

9. Membrul întîi al identităţii se transformă succesiv:

$$\frac{\left[\cos ka - \cos\left(\frac{2\pi}{3} - ka\right)\right]\left[\cos^2 ka + \cos ka \cos\left(\frac{2\pi}{3} - ka\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - ka\right)\right]}{\cos ka - \cos\left(\frac{2}{3} - ka\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + \cos 2 ka + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2ka\right) + \cos\left(\frac{4}{3} - 2ka\right)\right] = \frac{3}{4}$$

10. Sistemul pentru determinarea catetelor este

$$b^2 + c^2 = 4$$

$$bc = \sqrt{3}$$

care ne dă $b = \sqrt{3}$, $c = 1$ şi deci unghiurile vor fi $c = 30°$ şi $B = 60°$.

11. Ţinînd seama de teorema sinusurilor, relaţia dată devine $\sin A \operatorname{tg} A + \sin B \operatorname{tg} B = (\sin A + \sin B) \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} =$

$$= \frac{(\sin A + \sin B)^2}{\cos A + \cos B}$$

Întrucît această relaţie se presupune îndeplinită, avem

$$\frac{\sin^2 B \cos A}{\cos B} + \frac{\sin^2 A \cos B}{\cos A} = 2 \sin A \sin B$$

iar de aici rezultă

$$(\sin A \cos B - \sin B \cos A)^2 = 0$$

Ultima relaţie ne dă $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B$ adică $A = B$

12. Ecuaţia dată se descompune în factori

$$2(\cos^2 x - 1)(2 \cos x + \sqrt{2}) = 0$$

şi sub această formă se rezolvă cu uşurinţă

Soluţiile din intervalul $[-2\pi, 2\pi]$ sînt $0, \pm\frac{3\pi}{4}, \pm\pi, \pm\frac{5\pi}{4}, \pm 2\pi$.

13. Efectuînd produsul celor trei factori ecuaţia dată devine

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}.$$

a) De aici rezultă $x = \frac{1}{5}\left(2k\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$

b) Trebuiesc calculate sin 90° şi sin 54°. Pentru calculul lui sin 54° se foloseşte latura decagonului stelat şi se găseşte $\sin 54^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$

14. $E = \dfrac{2 \sin^2 x + a \operatorname{tg}^2 x}{a + 2 \cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$

15. a) $4(m+1)\sin^2 x - 4m \sin x + m - 1 = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$ şi

$$\sin x = \frac{m-1}{2(m+1)}$$

b) condiția de existență a lui sin x este $\left|\frac{m-1}{m+1}\right| \leqslant 2$

c) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = k(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4}$

16. $E = \dfrac{\sin A \sin B \sin C}{\cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}}$

17. Din relația dată rezultă $\operatorname{tg} x = \frac{1+m}{1-m}$

a) $E = \dfrac{1 + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1 - 2 - m^2}{1 + m^2}$

b) Ecuația dată se poate pune sub forma

$$\cos(2x - 60°) = \cos 60°$$

și apoi se rezolvă cu ușurință.

18. Rădăcinile ecuației date sînt

$\sin x = p - 1$ și $\sin x = \frac{1}{p+1}$. Discuția se face cu ajutorul condiției $|\sin x| \leqslant 1$

Cînd $p = 1{,}5$ avem $\sin x = \frac{1}{2}$ și $\sin x = \frac{2}{5}$

19. a) $E = \dfrac{\operatorname{tg}(a+b)}{\operatorname{tg}(b-a)}$ b) $E\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right) = -1$

c) Ecuația dată se poate scrie sub forma

$\cos(p^x - 60°) = \frac{q}{2}$ și în cazul $|q| \leqslant 2$ se rezolvă cu ușurință.

20. Condiția care determină domeniul de existență este $x^2 - 3x + 3 \neq$ și se realizează pentru $\forall x \in R$.

21. a) După simplificări elementare, soluțiile ecuației sînt date de reuniunea soluțiilor ecuațiilor.

$$\sin x = 0 \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

b) Soluția din primul cadru este $x = \frac{\pi}{6}$. Membrul întîi al identității de demonstrat este egal cu $\sqrt{3}\cos\alpha$, cu care este egal și al doilea, dacă se ține seama că $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

22. Ecuația nu are rădăcini reale pentru $\Delta < 0$ și pentru $\Delta > 0$,

$$\operatorname{sign} f(-1) = \operatorname{sign} f(+1) = -\operatorname{sign} m$$

23. $R: a = 2k\pi$ sau $b = 2k\pi$, $k \in Z$.

24. Mai întîi se observă că $\sin x < 0$ și atunci ecuația devine $\sin x = -1$ ale cărei soluții se scriu ușor.

25. a) Se calculează $y - 1$ și $y + 1$ și se constată că în ambele cazuri numitorii fracției sînt pozitivi iar numărătorii sînt ori negativi (pentru $y - 1$) ori pozitivi (pentru $y + 1$).

b) Rezultă imediat din prima proprietate demonstrația.

c) Expresiile care trebuiesc transformate în produse sînt

$$X_1 = \frac{1-\cos(a+z)}{\cos a - \cos z} = \frac{\sin\frac{a+z}{2}}{\sin\frac{z-a}{2}}, \quad x_2 = \frac{1-\cos(z-a)}{\cos x - \cos z} = \frac{\sin\frac{z-a}{2}}{\sin\frac{a+z}{2}}$$

26. a) Rădăcinile lui $I(x)$ sînt $\cos a \pm i \sin a$.

$$P(\cos a \pm \sin a) = \cos 8a \sin a - \sin 8a \cos a + \sin 7a = 0 = \text{deci } P(x) : I(x).$$

$$Q(x) = x^6 \sin a + x^5 \sin^2 a + x^4 \sin 3a + x^3 \sin 4a + x^2 \sin 5a + \sin 6a + \sin 7a.$$

b) $E(a) = \cos 6a \sin a + \cos 5a \sin 2a + \cos 4a \sin 3a$ $\sin 4a + \cos 2a \sin 5a + \cos \sin 6a + \sin 7a = 4 \sin 7a$.

Rezultatul se obține grupînd primul termen cu al șaselea, al doilea cu al cincelea și al treilea cu al patrulea.

c) $S(a) = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \sin 5a + \sin 6a$.

Calculăm $2S(a)\sin\frac{a}{2} = \cos\frac{a}{2} \cos\frac{3a}{2} + \cos\frac{3a}{2} - \cos\frac{5a}{2} +$

$$+\cos\frac{5a}{2}-\cos\frac{7a}{2}+\cos\frac{7a}{2}-\cos\frac{9a}{2}+\cos\frac{9a}{2}-\cos\frac{11a}{2}+$$

$$+\cos\frac{11a}{2}-\cos\frac{13a}{2}=\cos\frac{a}{2}-\cos\frac{13a}{2}=2\sin\frac{7a}{2}\sin 3a,$$

de unde $S(a)=\dfrac{\sin 3a\sin\frac{7a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$

27. a) $E=4(y-1)(y^2-2)$

b) Soluţiile ecuaţiei în y sînt $y_1=1$, $y=\sqrt{2}$, $y_3=-\sqrt{2}$ Ecuaţia $\sin x+\cos x=1$ are soluţiile $x=2k\pi$ şi $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

Ecuaţia $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ are soluţiile $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$

Ecuaţia $\sin x+\cos x=-\sqrt{2}$ are soluţiile $x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}$

28. a) $(1-\cos A\cos B)^2-\sin^2 A\sin^2 B=1-\cos^2 A\cos^2 B-$
$-(1-\cos^2 A)(1-\cos B)-2\cos A\cdot\cos B=\cos^2 A+$
$+\cos^2 B-2\cos A\cos B=(\cos A-\cos B)^2$

b) $x_1=\dfrac{1-\cos B}{1-\cos A}\quad x_2=\dfrac{1+\cos B}{1+\cos A}$

c) $E=\dfrac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{B-A}{2}}$; $E\left(\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=-2$

(Dacă se notează invers rădăcinile $E=2$).

29. Vezi problema (5.24)

30. a) $\sin x=\frac{1}{2}$ şi $\sin x=\dfrac{p}{p-1}$

b) parametrul p se determină din condiţia $0\leqslant\dfrac{p}{p-1}\leqslant 1$

31. a) $\operatorname{tg}15°=2-\sqrt{3}$

b) $R:15°$ şi $75°$

32. a) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\right]$

b) Sub forma algebrică $Z=\frac{1}{x^2+y^2}(x^3+3ix^2y-3x^2y-iy^3)$

$$(z=x+iy)$$

Sub formă trigonometrică $Z=\rho(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$;

$$[Z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)]$$

33. Vezi problema (1.11)

34. $R: x=\cos(a-b),\ y=\sin(a-b)$

Sistemul e compatibil determinat dacă $\sin a\neq 0$; dacă $a=2k\pi$ sistemul e nedeterminat; dacă $a=(2k+1)\pi$, sistemul este incompatibil.

35. a) Simplificînd pe E cu $2\cos^2 kx$ obținem

$$E=\frac{2\cos(k+1)x\cos(k+2)x-\cos 2kx\cos 3x+\sin^2 kx\sin 3x}{2(1+\sin x)}=$$

$$=\frac{\cos(2k+3)x+\cos x-\cos(2k+3)x}{2(1+\sin x)}=\frac{\cos x}{2(1+\sin x)}$$

b) Ecuația de rezolvat este $\frac{\cos x}{1+\sin x}-\operatorname{tg}5x=0$

Primul termen al ecuației este egal cu $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ și atunci ecuația devine

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}-5x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos 5x}=0$$

și sub această formă se rezolvă imediat.

36. Ecuația dată se scrie

$$(\cos x+\sin x)(\sqrt{2}-\cos x+\sin x)=0$$

și are soluțiile $x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$ și $x=2k\pi-\frac{\pi}{4}$.

37. $R:\ \operatorname{tg}(a+b)=\dfrac{32\sqrt{5}-27\sqrt{7}}{17}$

38. a) $E=4\cos x\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$

b) Ecuaţia $E=0$ se rezolvă uşor.

39. Ecuaţia dată se poate scrie $2\sin^2 x+7\sin x+3=0$ care conduce la $\sin x=-\dfrac{1}{2}$; $x=k\pi+(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}$.

40. $R: x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\quad x=k\pi+(-1)^k\dfrac{\pi}{6}$.

41. a) $E=-\sin x+\cos^2 x+\sin x-\cos x=\cos 2x-\cos x$

b) $E=-4\sin^2\dfrac{x}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)$

c) Ecuaţia $E+1=0$ se scrie $\cos x(2\cos x-1)=0$ şi sub această formă se rezolvă uşor.

42. $E=\dfrac{2\sin a(\cos a-1)}{2\sin 2a\sin a}=-\dfrac{2\sin^2\dfrac{a}{2}}{2\sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2}}=-\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}$

43. $E(x)=\sin 2x(2\cos x+1)=2\sin 2x\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$

44. a) $E(a)=\dfrac{a(15-2a^2-a^4)}{4}$

b) $|a|\leqslant\sqrt{2}$

c) Singurele soluţii sînt date de ecuaţia $\sin x+\cos x=0$

45. a) Din ecuaţia a doua se obţine ţinînd seama că $B+C=90°$

$\dfrac{\operatorname{tg}B(4\operatorname{tg}B-1-\operatorname{tg}2B)}{1+\operatorname{tg}2B}$ care ne dă soluţia $B=75°$, $C=15°$.

Pentru determinarea laturilor b şi c avem sistemul

$$\begin{cases} b + c = 6 \\ \dfrac{b}{c} = \operatorname{tg} B = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

care ne dă $c = 3 - \sqrt{3}$, $b = 3 + \sqrt{3}$. Apoi rezultă $a = 2\sqrt{6}$

b) Din triunghiul dat avem $\cos B = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

şi cu aceasta se calculează uşor $\sin \dfrac{B}{2}$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}}$$

Capitolul VII

GEOMETRIE

1. GEOMETRIE PLANĂ

1. Fie D cea de-a doua intersecţie a cercurilor date.

a) Din ipoteză rezultă $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = 90$, deci $\sphericalangle ADB + \sphericalangle ADC = 180°$

b) Fie O_1, O_2 centrele cercurilor date.
$\sphericalangle O_1AF = \sphericalangle O_1FA$ căci $\triangle AO_1F$ e isoscel
$\sphericalangle AFO_1 = \sphericalangle FAC$ ca alterne interne. De aici rezultă că AF e bisectoarea $\sphericalangle BAC$. În mod analog se arată că AH e bisectoarea $\sphericalangle BAC$ ($\sphericalangle O_2HA = \sphericalangle O_2AH = \sphericalangle HAO_1$) Cum unghiul BAC are o singură bisectoare interioară rezultă A, H, F sînt coliniare.

c) Dreapta AHF e perpendiculară pe AG şi pe AE deci E, A, G sînt coliniare.

d) Proprietatea cerută s-a demonstrat la punctul b.

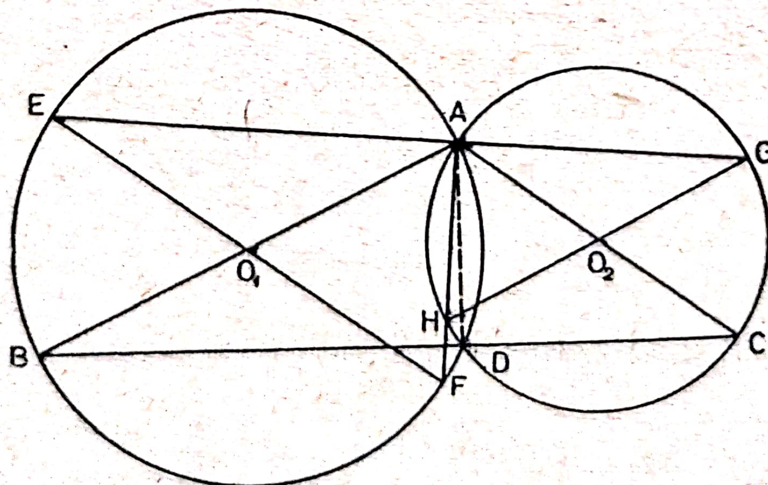


Fig. 7.1.

2. Mediatoarele segmentelor AB' şi AC' sînt bisectoarele unghiurilor ABB' şi ACC' căci $\triangle ABB'$ şi $\triangle ACC'$ sînt isoscele. Cu aceasta, primele două puncte rezultă imediat.

c) $\sphericalangle BOA = 90 - \sphericalangle B'AO = 90 - \frac{A+B}{2} = \frac{C}{2}$.

Deci $\sphericalangle AOB' = \sphericalangle ACB$ şi în mod analog se arată că $\sphericalangle AOC' = \sphericalangle ABC$

3. a) Dreapta AD este bisectoarea unghiului EDG şi mediatoare a segmentului BE.

b) Unghiurile $BB'C$ şi ACB' rezultă din sistemul

$\sphericalangle BB'C + \sphericalangle ACB' = 180° - \hat{A}$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin BB'C} = \frac{\overline{AB}}{\sin BC'B}$$

După aflarea lui $AC'B'$, unghiul BCB' rezultă uşor.

4. Să presupunem că bisectoarele din A şi B sînt egale cu l_a, l_b şi că $l_a = l_b$.

Din formulele care dau lungimile bisectoarelor rezultă

$$bc\left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right] = ac\left[1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right]$$

După simplificări admisibile această relaţie se mai scrie

$$(c-b)\left[1 + \frac{ab(a^2+b^2+c^2+ab+2ac+2bc)}{(a+c)^2(b+c)^2}\right] = 0$$

de unde rezultă că $b = c$.

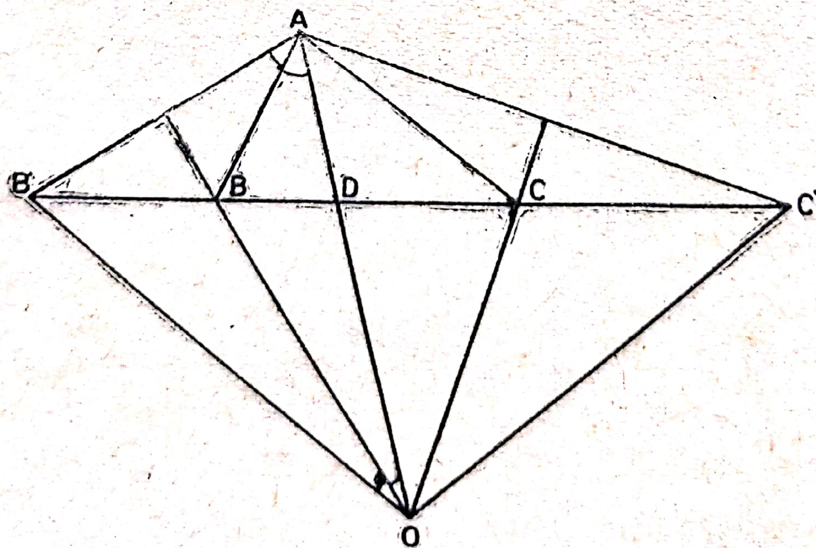


Fig. 7.2.

5. Fie D mijlocul laturii BC în $\triangle ABC$ şi A' simetricul lui A faţă de BC (fig. 7.3). Patrulaterul $ABA'C$ e paralelogram şi $AA' = 2AD \leqslant AB + A'B = AB + AC$.

De aici $AD \leqslant \dfrac{AB + AC}{2}$ (x)

Notînd a, b, c şi m_a, m_b, m_c respectiv laturile şi lungimile medianelor în $\triangle ABC$. relaţia (x) şi analoagele ei ne arată că

$$m_a + m_b + m_c \leqslant \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} + \frac{a+b}{2} = a + b + c$$

6. Fie A' simetricul lui A faţă de punctul D. Din A' ducem $A'G \parallel CF$ $(G \in AB)$.

a) Avem $\overline{A'C} \parallel AB$ şi deci $\overline{A'G} = \overline{CF}$.
Mai departe $\overline{A'C} = \overline{FG} = \overline{AB}$ şi deci $\overline{BF} = \overline{BG} = \overline{DE}$.
În plus $DE \parallel BC$ deci patrulaterul $BE\,DG$ este paralelogram,

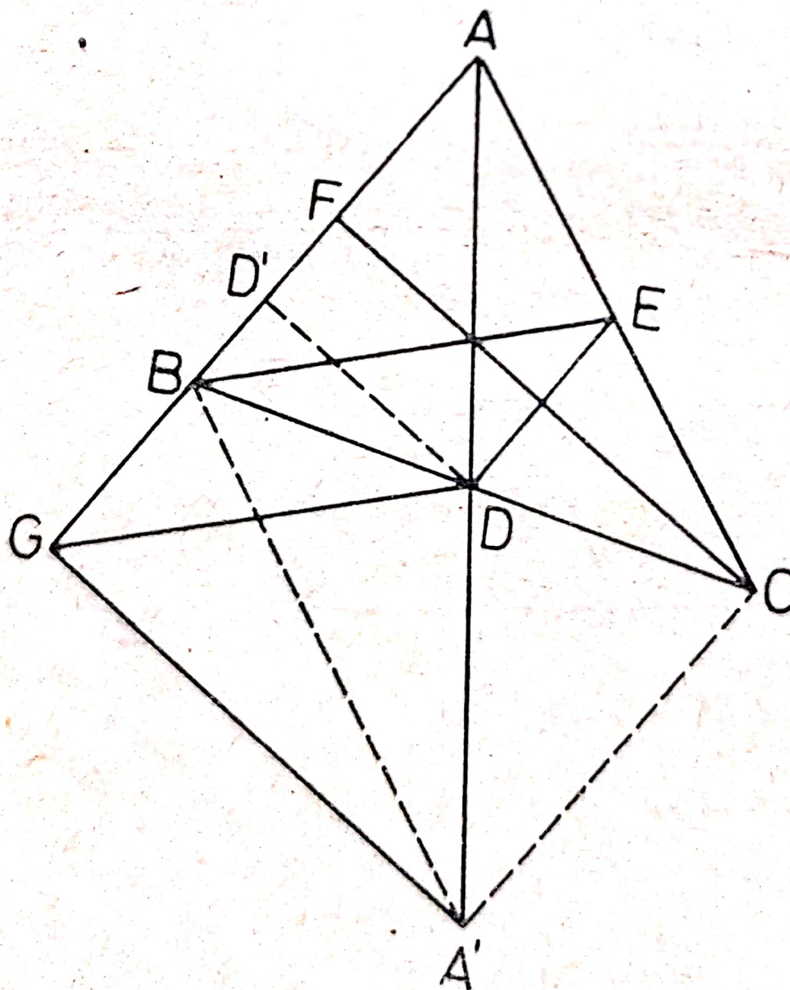


Fig. 7.3.

are laturile egale $DG = BE$ și $\triangle ADG$ are laturile egale cu AD, CF și BE.

b) $S_{A'DG} = S_{ADG}$ (avînd bazele egale $AD = A'D$ și același vîrf, G)

$$S_{ADG} = S_{ABD} + S_{BDG} = \frac{1}{2} S_{ABC} + \frac{1}{2} BG \cdot DD' = \frac{1}{2} S_{ABC} + \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} \cdot \frac{h_c}{2} = \frac{3}{4} S_{ABC}$$ (D' este proiecția lui D pe AB).

7. a) $\triangle BMI$ este isoscel avînd $\sphericalangle MBI = \sphericalangle MIB = \sphericalangle IBC$. La fel se arată că $\triangle NIC$ e isoscel. Atunci

$$\overline{MB} + \overline{MC} = \overline{MI} + \overline{IN} = \overline{MN}$$

b) Mediatoarele segmentelor $\overline{BI}$ și $\overline{CI}$ sînt bisectoare respectiv ale unghiurilor $\widehat{BMI}$ și $\widehat{CNI}$ deci sînt concurente cu AI în centrul centrului exînscris în $\triangle AMN$.

8. Din ipoteză (cercul de centru O fiind exînscris $\triangle AMN$) rezultă că $\sphericalangle BMO = \frac{1}{2} \sphericalangle BMN = 90° - \frac{\widehat{AMN}}{2}$.

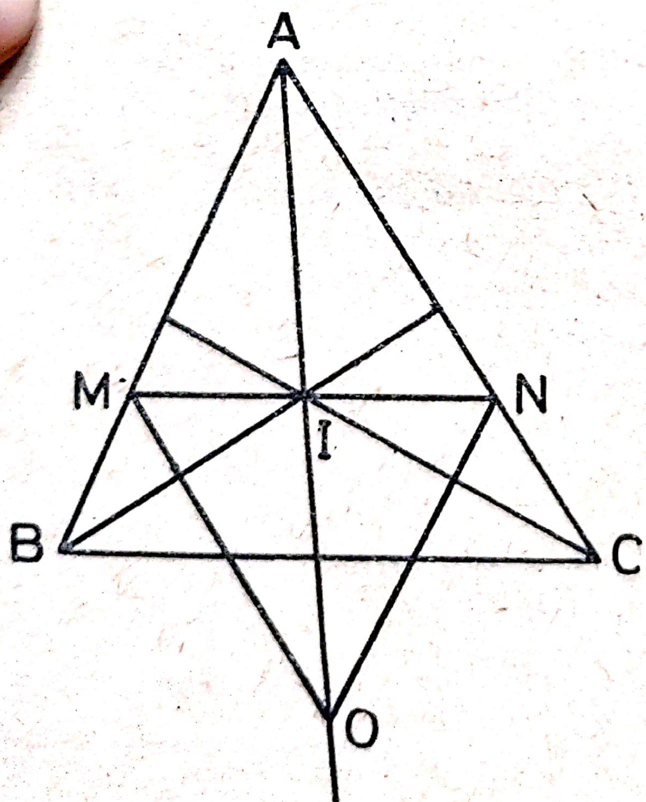


Fig. 7.4.

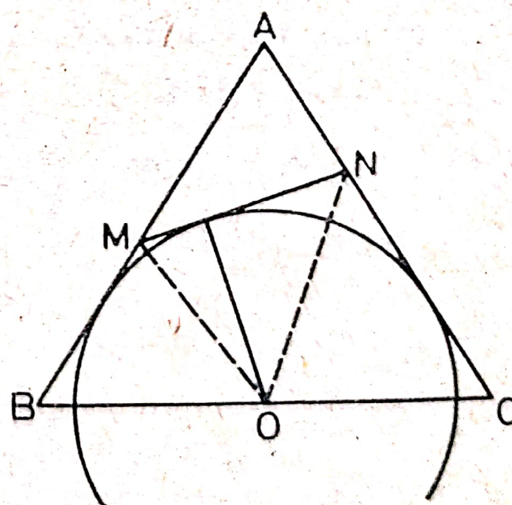


Fig. 7.5.

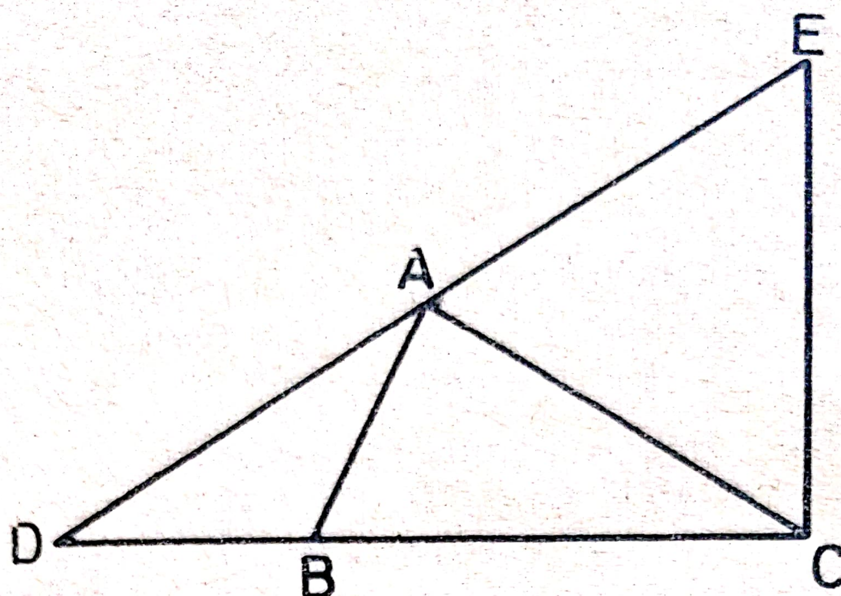


Fig. 7.6.

Din $\triangle NOC$ avem:

$$\sphericalangle NOC = 180° - (\sphericalangle ACB + \sphericalangle CNO) = 180° - \left(\sphericalangle ACB + \right.$$

$$\left. + \frac{\sphericalangle CAB + \sphericalangle AMN}{2}\right) = 90° - \frac{\widehat{AMN}}{2}, \text{ întrucît } \sphericalangle ACB +$$

$$+ \frac{\sphericalangle CAB}{2} = 90°.$$

Cu aceasta rezultă că $\triangle MBO \sim \triangle OCN$ avînd două unghiuri egale iar de aici reiese imediat relația cerută. (Constanta este BO^2).

9. a) Mai întîi se arată că $D \in BC$. Apoi se arată că $\sphericalangle DAB =$
$= \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$

$\sphericalangle CAE = 90° - \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$

Cu aceasta

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAE = 180°.$$

b) Trebuie demonstrat că

$$\overline{DE}^2 = 2\,\overline{BC}\cdot\overline{DC}$$

În acest scop ținem seama că $AB = DB$ și $AC = AE$ care împreună cu ipoteza ne dau:

$$DE^2 = \overline{DC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 =$$

$$= (\overline{DC} - \overline{AB})(DC + AB) + BC^2 = BC\cdot DC + BC(AB +$$

$$+ BC) = 2BC\cdot DC.$$

10. a) Ţinînd seama de datele problemei avem: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DFB$ avînd acelaşi complement ($\hat{B}$) deci $ADCF$ e inscriptibil şi $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CFD = 45°$ şi cum $\sphericalangle FDC = 90°$ rezultă că $\Delta\ DCF$ e isocel $\square\ AEDB$ e iscriptibil şi $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BED = 45°$ de aceea $\triangle\ BDE$ ($\hat{D} = 90°$) e isoscel.

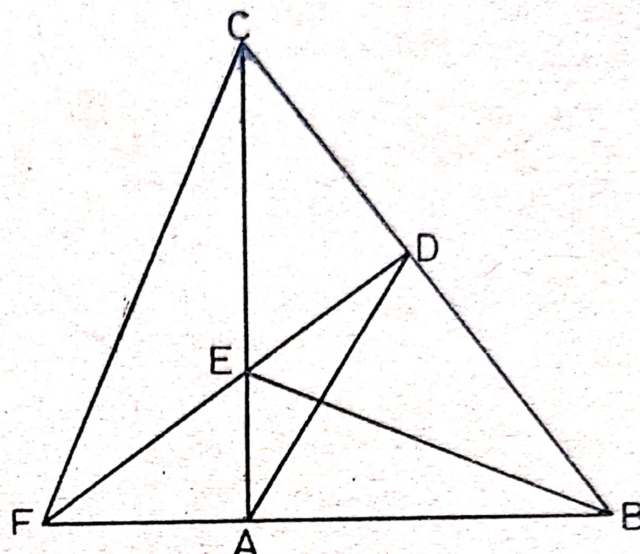


Fig. 7.7

b) $\sphericalangle ADB = 135 - \hat{B}$, $\sphericalangle ACF = 45 - \hat{C}$. Sumînd aceste două unghiuri se obţin 90°.

11. *R*: Prin orice punct trec două drepte cu proprietatea cerută, paralelele cu diagonalele paralelogramului format de cele două perechi de drepte paralele. Problema nu are nici o soluţie dacă perechile de paralele date au aceeaşi direcţie şi distanţe diferite între ele şi are o infinitate de soluţii dacă paralelele date au aceeaşi direcţie şi distanţe egale între ele.

12. Din ipoteză rezultă $\sphericalangle MED = \sphericalangle NFD = 90° + \hat{A}$

$\overline{DF} = \overline{MF}$ ($\overline{DF}$ linie mijlocie)

$\overline{DE} = \overline{NF}$ (DE linie mijlocie)

Atunci $\triangle MED = \triangle NFD$ şi

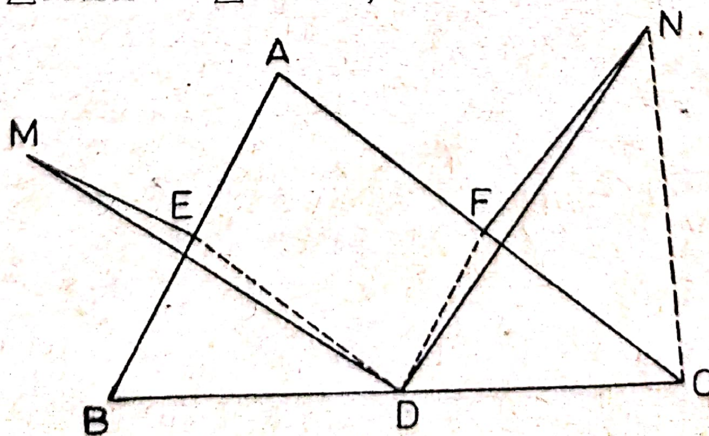


Fig. 7.8.

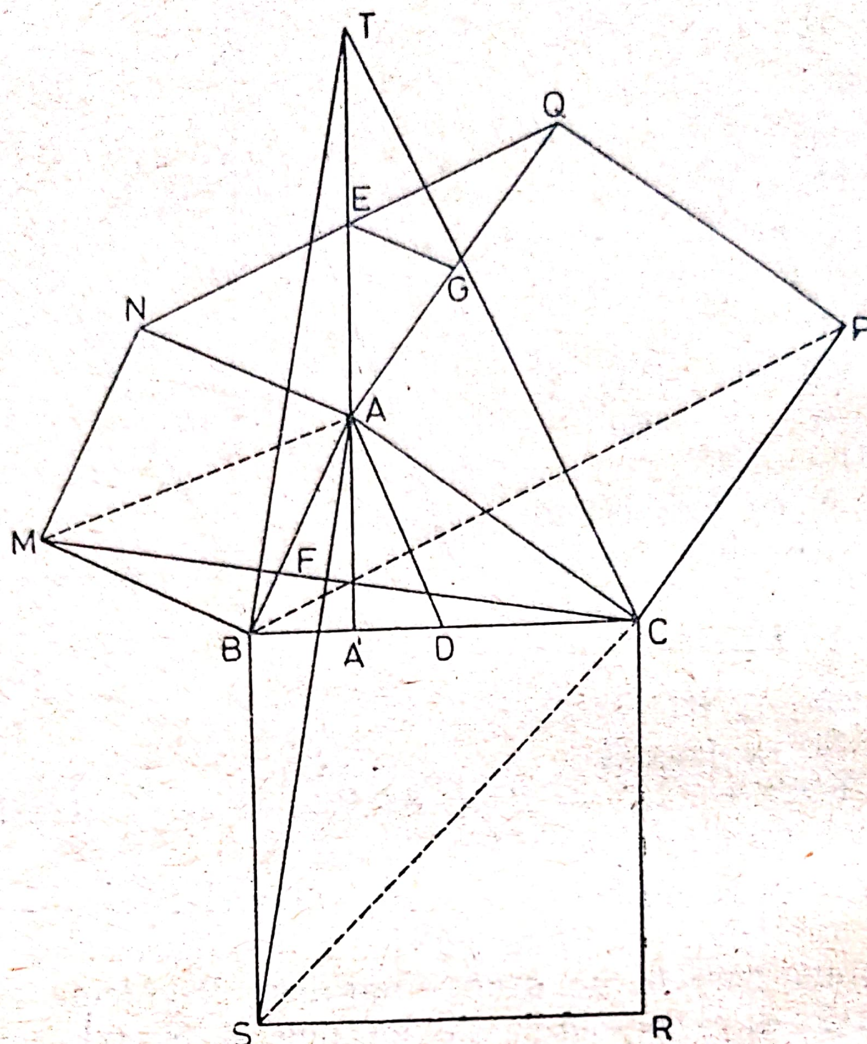


Fig. 7.9.

a) $\overline{MD} = \overline{ND}$

b) $\sphericalangle FND = \sphericalangle EDM = \alpha$

Din $\triangle DNC$ avem $\sphericalangle NDC = 180 - \sphericalangle DNC - \sphericalangle DNC =$
$= 180 - (45° - \alpha) - (45° + \hat{C}) = 90° - \hat{C} + \alpha$

Din BED avem $\sphericalangle BDM = \sphericalangle BDE - \alpha = \hat{C} - \alpha$
$\sphericalangle BDM + \sphericalangle CDN = 90°$ și de aici $\sphericalangle MDN = 90°$

13. a) Notăm ca de obicei a, b, c, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ respectiv laturile și unghiurile triunghiului dat și ducem din A mediana $\overline{AE}$ în $\triangle ANQ$ și înălțimea $\overline{AA'}$ în triunghiul ABC. Ducem apoi EG, linia mijlocie în $\triangle ANQ$ (fig. 7.9).
(x) $\triangle AEG \sim \triangle ABC$ deoarece

$$\frac{EG}{AB} = \frac{AG}{AC} = \frac{1}{2}$$

$\sphericalangle EGA = 180 - \sphericalangle NAG = \hat{A}$

De aici rezultă $\sphericalangle EAG = \hat{C}$ şi mai departe, $\sphericalangle EAG + \sphericalangle GAC + \sphericalangle CAA' = \hat{C} + 90° = 90° - \hat{C} = 180°$ şi atunci mediana AE şi înălţimea AA' sînt în prelungire. Pentru a demonstra partea a doua a punctului a) inversăm rolul triunghiurilor ABC şi ANQ între ele.

b) Din relaţia de asemănare (x) mai rezultă $AE = \frac{a}{2}$ şi atunci

$$\triangle ADC = \triangle AEQ, \text{ de unde } \overline{EQ} = \overline{AD} = \frac{1}{2}NQ.$$

c) $\triangle BMC = \triangle ABS(\overline{MB} = \overline{BA},\ \overline{BC} = \overline{BS},\ \sphericalangle MBC = \sphericalangle ABS = 90 + \hat{B})$.
De aici $\overline{CM} = \overline{AS}$, $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BAS$, $\sphericalangle BCM = \sphericalangle BSA$ şi mai departe $\square\ AMBF$ şi $\square\ BFCS$ sînt inscriptibile ($F = MC \cap AS$), de unde $\sphericalangle BFM = \sphericalangle BAM = 45°$, $\sphericalangle BFS = \sphericalangle BCS = 45°$ şi $\sphericalangle MFS = 90°$.
Celelalte relaţii se demonstrează în mod analog.

d) $\triangle MBC = \triangle ABT$ pentru că $\overline{AB} = \overline{MB}$, $\sphericalangle BAT = \sphericalangle MBC = 90 + \hat{B}$ şi $\sphericalangle ABT = \sphericalangle BMC$ avînd laturile perpendiculare şi de aici $\overline{AT} = \overline{BC}$.

e) Folosind ultimul rezultat de la punctul precedent rezultă că $\triangle BCP = \triangle ACT$ şi mai departe $TC \perp BP$. Cu aceasta dreptele AT, BP şi MC sînt înălţimi în $\triangle TBC$ şi deci sînt concurente.

14. Avem $DN = DM$, $\sphericalangle ABN = \frac{\sphericalangle DAB}{2} = \frac{\sphericalangle DCB}{2} = \sphericalangle CMB$.
De aici se observă că $\sphericalangle ABN + \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBM = 180$ şi deci punctele N, B, M sînt coliniare.
$\sphericalangle N'BA = \sphericalangle AN'B$, $\sphericalangle CM'B = \sphericalangle CBM'$, $\sphericalangle N'DM' = \sphericalangle M'CB$ şi deci
$\sphericalangle N'M'D = 180° \cdot (\sphericalangle AN'B + \sphericalangle N'DM') = 180° - (\sphericalangle ABN' + \sphericalangle BCM') = 180° - (180° - \sphericalangle CBM') = \sphericalangle CM'B$ deci B, M', N' sînt coliniare.
În $\triangle NBN'$ dreapta AB este mediană şi prin ipoteza este egală $\frac{\overline{NN'}}{2}$ deci acest triunghi este dreptunghic în B.

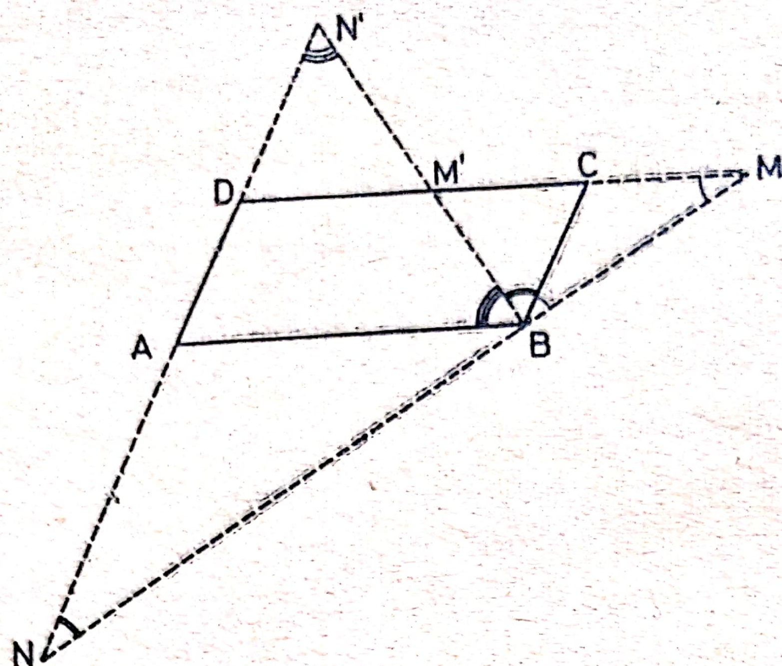


Fig. 7.10.

15. $\sphericalangle EDB = \frac{\sphericalangle DIA}{2} = \frac{\sphericalangle IDA}{2} = \sphericalangle DBA$

16. Să arătăm că $\overline{N_1C} = \overline{BC}$ şi că BN_1 e bisectoarea $\widehat{(AB, d)}$. Din faptul că $AD||MM_1||d$ şi că $\overline{DI} = \overline{IB}$ rezu tă:
$\widehat{AM_1} = \widehat{DM} = \widehat{MB} = \widehat{PM_1}$ şi deci $\sphericalangle CNB = \sphericalangle CBN$ şi

$\triangle CBN_1$ e isoscel. În acelaşi timp BN_1 e bisectoarea $\widehat{ABP}$ şi deci $N_1 \in BN_1$ va fi egal depărtat de A şi de d. Pentru celălalt punct de intersecţie (N') se demonstrează analog aceeaşi proprietate.

17. Prelungim $\overline{AB}$ cu o lungime $\overline{AE} = \overline{AC} \cdot AD$ este bisectoarea $\sphericalangle CAE$ (se evaluează măsura fiecărei jumătăţi de unghi). Atunci punctul D este egal depărtat de punctele B, E şi C şi scriind puterea punctului interior în cercul circumscris $\triangle BCE$ avem $\overline{AB} \cdot \overline{AE} = BD^2 \cdot AD^2$ (căci Raza cercului este chiar BD).
Înlocuind pe AE cu AC obţinem chiar relaţia cerută.

18. Se arată uşor că patrulaterul $EHGC$ (fig. 7.13) este inscriptibil ($\sphericalangle FEI = \sphericalangle ICG$) şi în cercul circumscris acestui patrulater. $\sphericalangle EHI = \sphericalangle IGC = 90°$.

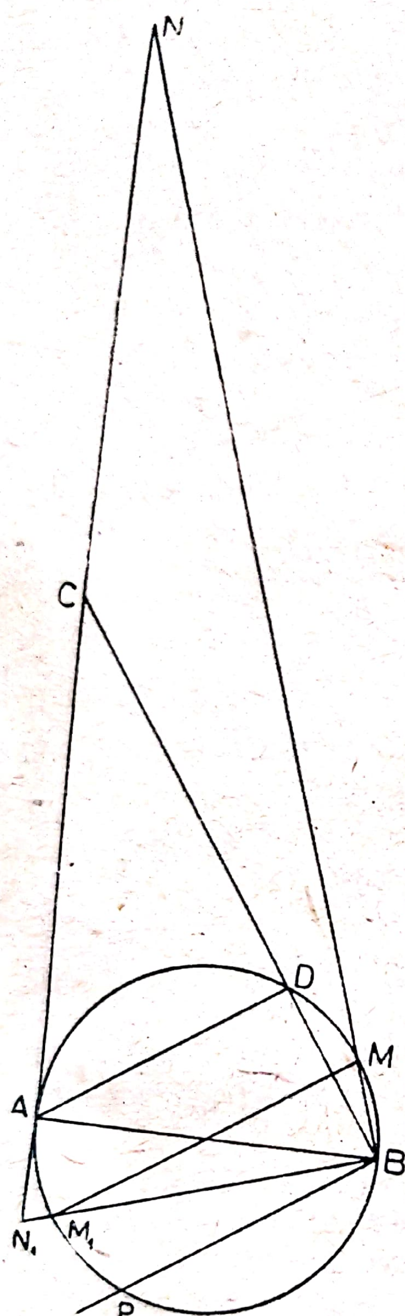


Fig. 7.11.

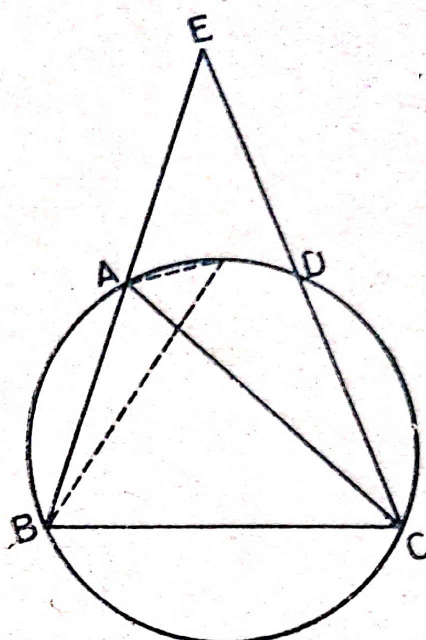


Fig. 7.12.

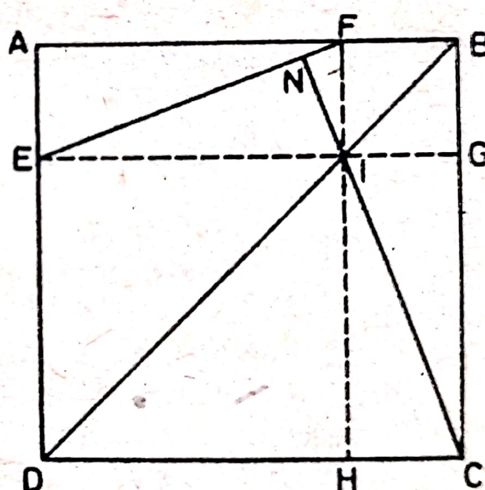


Fig. 7.13.

19. Din ipoteză rezultă (fig. 7.14) că patrulaterele $IAB'C$ și $IAC'B$ sînt inscriptibile avînd cîte două unghiuri opuse, drepte. Deci $\sphericalangle IB'A = \sphericalangle CAI$ și $\sphericalangle BAI = \sphericalangle BC'I$ de unde $\sphericalangle IB'C' = \sphericalangle A'C'I$

20. BB' și CC' sînt înălțimi în $\triangle ABC$, iar $H = BB' \cap CC'$, deci patrulaterul $AB'HC'$ este inscriptibil și are centrul O' la jumătatea lui AH. Pentru demonstrarea părții a doua

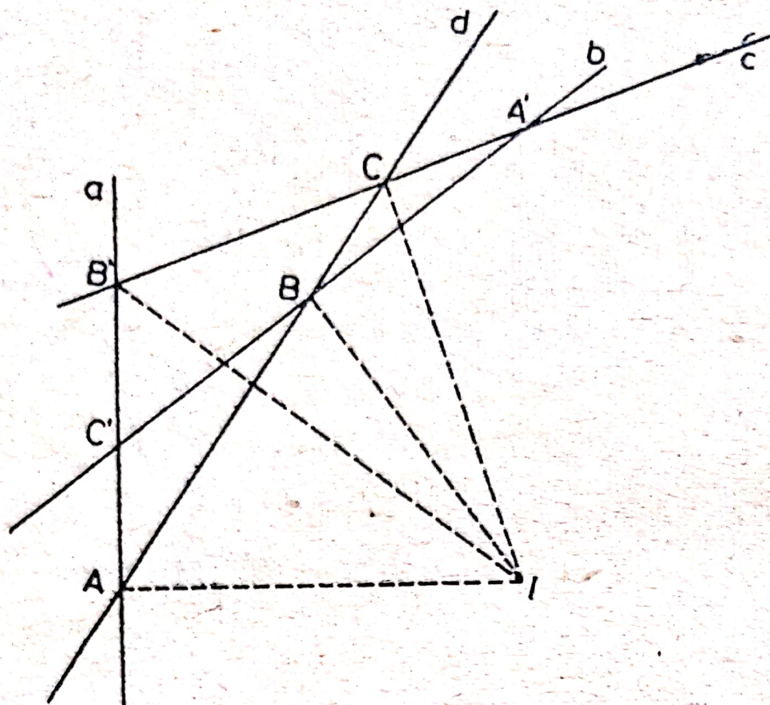


Fig. 7.14.

a problemei va trebui să arătăm că $\sphericalangle OB'O' = 90°$. Sau că $\sphericalangle O'B'B = \sphericalangle OB'C$

Oricum $\sphericalangle AB'O' = \sphericalangle BB'O$

Avem $\sphericalangle OB'C = \sphericalangle B'CO = \frac{1}{2} \widehat{BC'B'}$ și

$$\sphericalangle O'B'B = \sphericalangle O'HB' = \sphericalangle AC'B' = \frac{1}{2} \widehat{BC'B}.$$

21. Unim P cu Q și observăm că patrulaterul $PAQB$ e inscriptibil avînd două unghiuri, opuse drepte. Deci $\sphericalangle PQB = \sphericalangle PAB$

Unim acum N cu Q și avem $\sphericalangle NQB = \sphericalangle NAD$ avînd aceeași măsură. Dar $\sphericalangle NAD = \sphericalangle PAB$, avînd laturile perpendiculare, rezultă ca $N \in PQ$. Pentru a arăta că $M \in PQ$ se procedează la fel și tot la fel se demonstrează proprietatea cerută în cazul că Γ_1 și Γ_2 sînt tangente interioare.

22. Fie I centrul paralelogramului și KK', LL' paralele din I la laturile paralelogramului. Fie $S' = IB \cap GN$ și $S'' = IB \cap FM$. Vom aplica teorema lui Menelaus în $\triangle KIB$ și $\triangle L'IB$ și împărțind cele două relații ce rezultă; vom obține:

$$\frac{\overline{IS'}}{IS''} = \frac{BS'}{BS''} = \frac{BS' - IS'}{BS'' - IS''} = \frac{BI}{BI} = 1$$ și deci S' coincide cu S'' și cu S.

În mod analog se va face demonstrația pentru $R \in IB$, aplicînd teoria lui Menelaus în DIK cu transversala $HR'N$. ($\overline{DH'}, \overline{IR'}$; $\overline{NK'} = \overline{KH}\ \overline{DR'}\ \overline{IN}$) și în $\triangle DIL$ cu tranversale $ER''M$.
(IR'', $DE \cdot LM = DR'' \cdot LE \cdot IM$) și apoi pentru proprietatea P, $Q \in AC$.

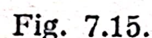


Fig. 7.15.

23. Se deduce $A'D' \| ED$ și se demonstrează că $\triangle A'B'D$ este isoscel demonstrînd mai întîi că $B'C' \| ED$ apoi că $\sphericalangle A'B'D' = \sphericalangle A'D'B' = \sphericalangle AB'C'$.
Mai departe folosind faptul că D este situat la mijlocul $B'D'$ și că $A'D' \| ED \| B'C'$ se trage concluzia că punctul I este la mijlocul segmentului $I'A'$.

24. Notînd cu E și F două puncte oarecare pe tangenta comună în I și cu G, G' două puncte pe tangentele în A și A' la cele două cercuri (fig. 7.19) avem evident $\sphericalangle GAI = \sphericalangle AIF = \sphericalangle EIA' = \sphericalangle G'AI$ deci $AG \| G'A'$.

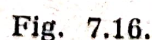


Fig. 7.16.

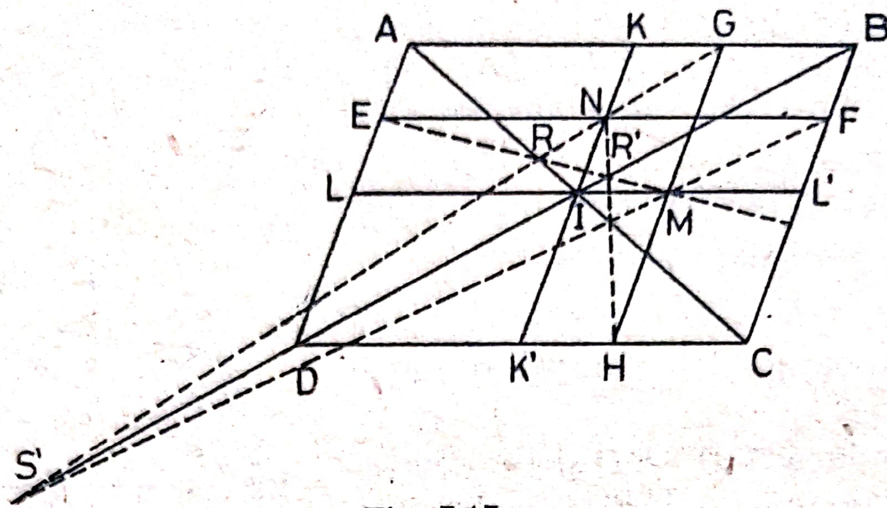


Fig. 7.17.

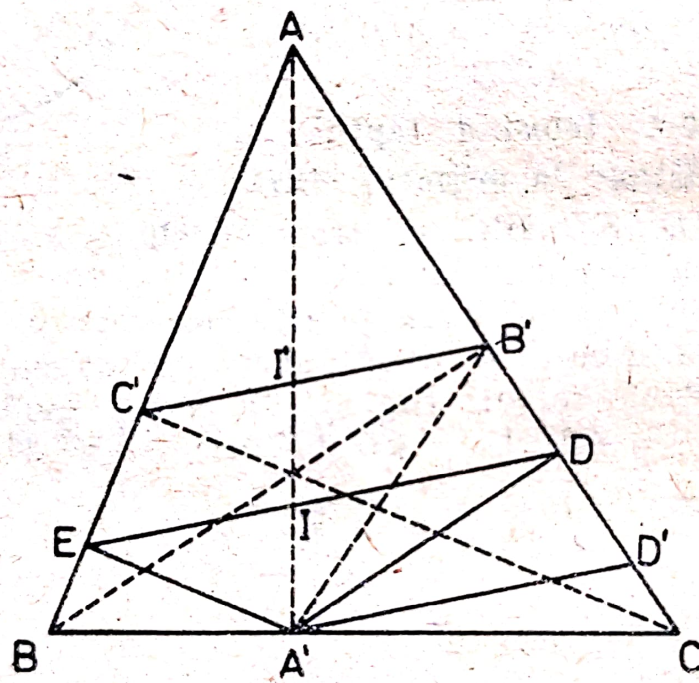


Fig. 7.18.

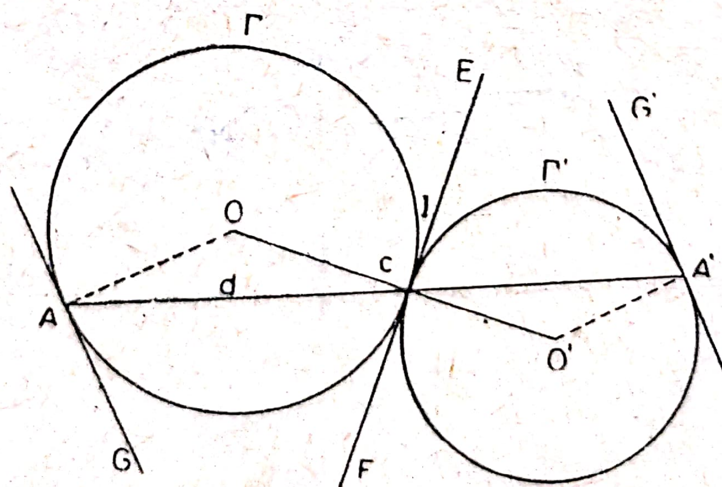


Fig. 7.19

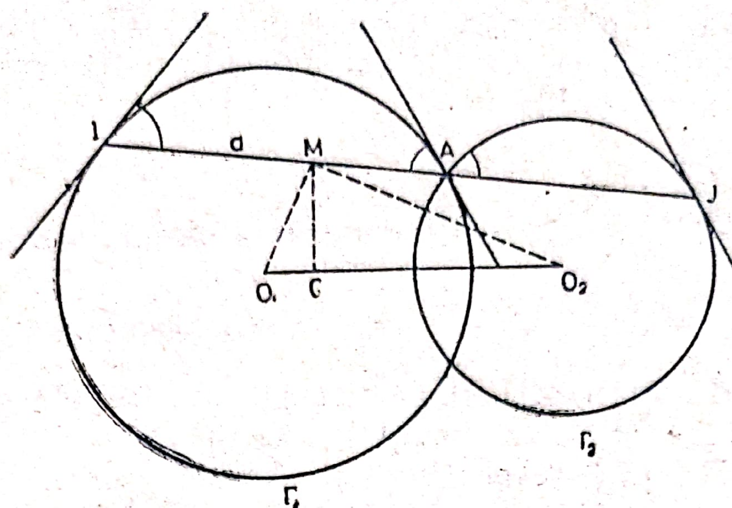


Fig. 7.20.

Notînd cu C şi M mijloacele lui OO' şi AA' respectiv, vom avea $CM = \frac{OA - O'A'}{2}$ = const., deci locul geometric va fi un cerc cu raza $\frac{R-r}{2}$ şi cu centrul în C.

25. Ducînd tangentele la Γ_1 şi Γ_2 în punctul A se observă că suma unghiurilor pe care le fac tangentele în I şi J la Γ_1 şi Γ_2 cu secanta d este constantă de unde rezultă că unghiul acestor tangente este şi el constant.

26. Se vor studia două cazuri: a) cînd intersecţia I a coardelor are loc în interiorul cercului şi b) cînd intersecţia I a coardelor se află în exteriorul cercului.

a) Scriind teorema lui Pithagora în $\triangle ADI$, $\triangle BCI$, $\triangle ACI$, $\triangle BDI$ obţinem $AD^2 + BC^2 + AD^2 = AI^2 + ID^2 + IC^2 + IB^2 = AB^2 + DC^2 - 4P = \Sigma$ (unde cu $P = R^2 - d^2$ am notat puterea punctului I faţă de cerc; R e raza, d distanţa de la centrul cercului la I).

Notînd d_1, d_2 distanţele de la centrul cercului pînă la coardele AB şi CD vom avea

$$\Sigma = 4(R^2 - d_1^2) + 4(R^2 - d_2^2) - 4(R^2 - d^2) = 4R^2 + 4(d^2 - d_1^2 - d_2^2) = 4R^2.$$

b) Se aplică aceeaşi metodă înlocuindu-se puterea punctului (exterior, acum), faţă de cerc prin $R^2 + d^2$.

27. Locul geometric este un cerc avînd drept diametru distanţa dintre punctele locului căutat aflate pe dreapta punctelor date. Demonstraţia se face prin reducere la absurd, utilizînd

proprietatea bisectoarei unui triunghi de a împărţi latura pe care o intersectează în segmente proporţionale cu laturile (Altfel, vezi problema 35).

28. Notînd cu $a'b'$, c' cele trei segmente date trebuie să avem $\frac{\overline{MA}}{a'} = \frac{\overline{MB}}{b'} = \frac{MC}{c'}$ (M fiind punctul curent al locului căutat)

Sau $\frac{MA'}{MB'} = \frac{a'}{b'} = k_1$, $\frac{MA}{MC} = \frac{a'}{c'} = k_2$. Locul căutat va fi obţinut prin intersecţia locurilor geometrice ale punctelor M care au rapoartele distanţelor la punctele A şi B sau A şi C date (k_1, respectiv k_2). Aceste locuri, se ştie (vezi problema următoare) că sînt circomferinţele avînd drept diametre distanţele punctelor conjugate armonic faţă de A şi B (sau A şi C cu rapoartele date, k_1 sau k_2). Deci locul cerut va fi constituit de intersecţia a două cercuri.

29. Fie A, B, C cele trei puncte fixe, A', B', C' punctele de la jumătatea distanţelor $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\{0\} = AA' \cap CC'$ şi P un punct al locului căutat. Aplicînd teorema lui Stewart în $\triangle PAA'$, PBB', PCC' se găseşte $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{3PO}^2$ ceea ce, în baza ipotezei dă $PO = \text{const.}$, deci locul geometric va fi o sferă (în plan cerc).

30. Presupunem problema rezolvată (fig. 7.21). Fie triunghiul dat ABC.

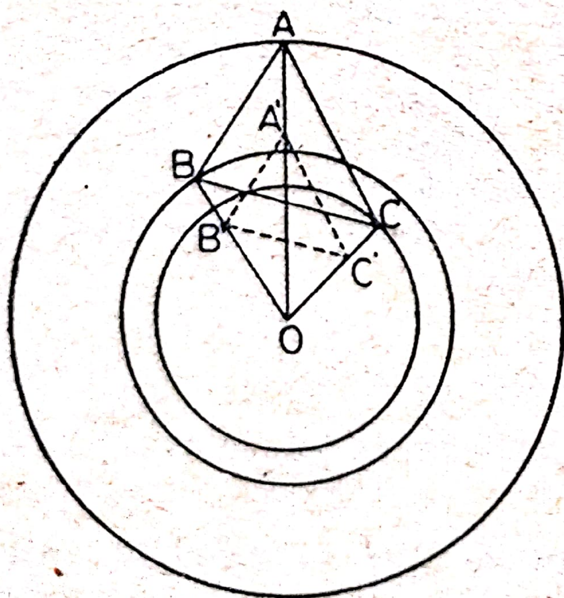


Fig. 7.21.

Din centrul comun O al cercurilor date ducem dreptele OA, OB, OC. Din $A' \in OA$ (arbitrar) ducem $A'B' \| AB$, $A'C' \| AC$, ($B' \in OB$, $C' \in OC$).

Se arată că $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ şi că $\frac{\gamma_a}{OA'} = \frac{\gamma_b}{OB'} = \frac{\gamma_c}{OC'}$ unde cu γ_a, γ_b, γ_c am notat razele cercurilor ce trec respectiv prin A, B şi C.

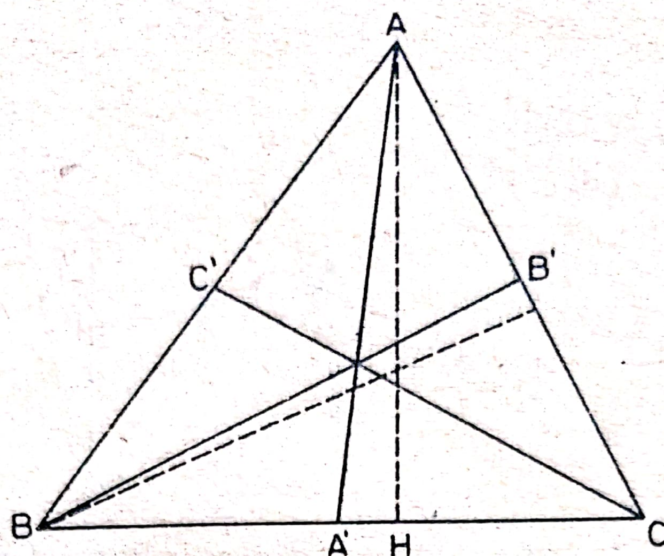


Fig. 7.22.

Pentru a rezolva problema vom construi un triunghi A'', B'', C'' asemenea cu cel dat și vom determina un punct O'' care să aibă distanțele la A'', B'', C'' proporționale cu γ_a, γ_b, γ_c (date). Acest punct O'' se va afla la intersecția a două locuri geometrice care se pot construi pe baza problemei precedente. Ducem apoi dreptele OA, OB și OC astfel ca $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A''O''B''$ $\sphericalangle AOC = \sphericalangle A''O''C''$ și la intersecția lor cu cercurile date vom obține vîrfurile triunghiului cerut.

31. Baricentrul triunghiului se va afla pe cercul avînd $\overline{BC}=a$ ca diametru. Mediana AA' va avea lungimea $\frac{3a}{2}$, deci vîrful A se află pe un cerc avînd raza $\frac{3a}{2}$ cu centrul în A' (mijlocul lui BC).

Notînd cu H proiecția lui A pe BC și scriind teorema lui Pithagora generalizată în $\triangle ABA'$ și $\triangle ACA'$ se obține $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2\ a\ \overline{A'H} = \frac{3a^2}{2}$, de unde rezultă $A'H$ și construcția cerută se obține imediat:

Pentru calculul lui AB și AC se poate folosi teorema medianei (lungimea ei în funcție de laturi) și relația dată, obținîndu-se $|\overline{AB}| = \frac{13}{2}\ a$, $AC = \frac{7}{2}\ a$

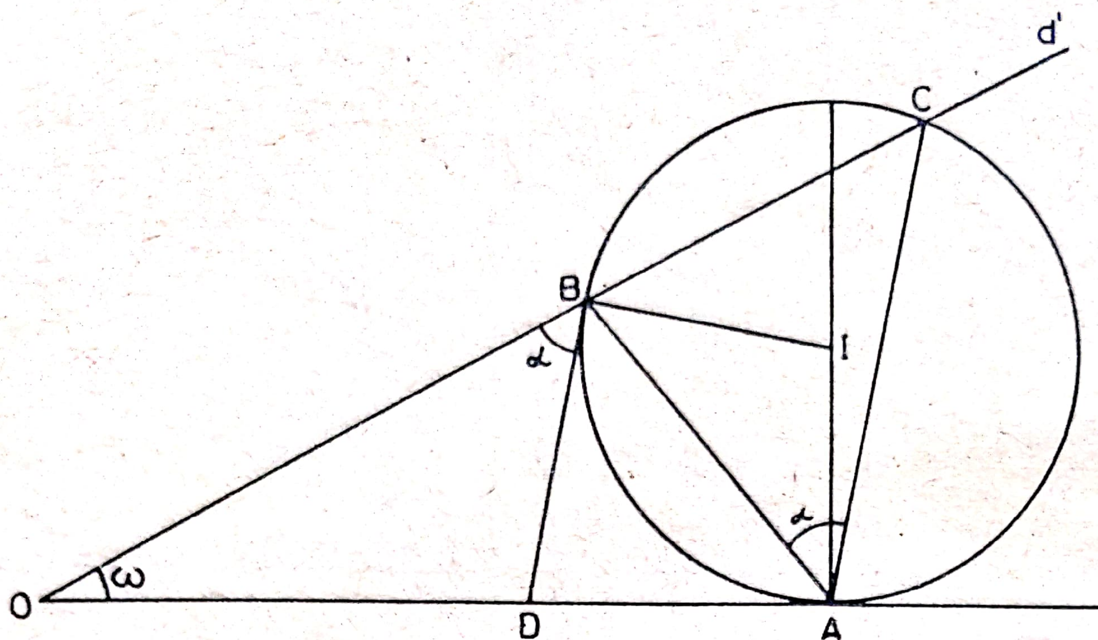


Fig. 7.23.

32. Centrul cercului cerut se află pe raza cercului dat, în punctul dat și în același timp pe bisectoarea unghiului format de dreapta dată și tangenta dusă în punctul dat, la cercul dat.

33. Considerăm problema rezolvată. Fie d, d' și A datele problemei (fig. 7.23) iar cu $\omega = \widehat{(d, d')}$ și α vom nota unghiurile din figuri (date și ele).
Ducem tangenta în B la cerc și se determină $\sphericalangle IAB = \frac{\alpha + \omega}{2}$ ceea ce rezolvă cu ușurință problema dată.

34. Presupunem problema rezolvată și notăm: P, proiecția lui O (dat) pe Δ, $OP = d$ și $PA = p$ iar raza cercului dat cu R (fig. 7.24) și raza cercului cerut cu x.
Cu aceasta avem evident $(R + x)^2 = (d - x)^2 + p^2$ de unde $x = \frac{d^2 + p^2 - R^2}{2(R + d)}$ și construcția cerută (determinarea lui x) se poate face cu ușurință.
(x este al patrulea proporțional în propoziția $\frac{x}{u} = \frac{u}{2(R + d)}$ unde u este lungimea tangentei dusă din A (dat) la cercul dat).

35. Avem $\overline{CA} \cdot \overline{DB} = \overline{CB} \cdot \overline{DA}$ sau (fig. 7.25) $(\overline{OA} + \overline{OC})(\overline{OD} - \overline{OB}) = (\overline{OB} - \overline{OC})(\overline{OA} + \overline{OD})$ de unde după simplificări rezultă $\overline{OB}^2 = \overline{OC} \cdot \overline{OD}$ și în mod analog se demonstrează

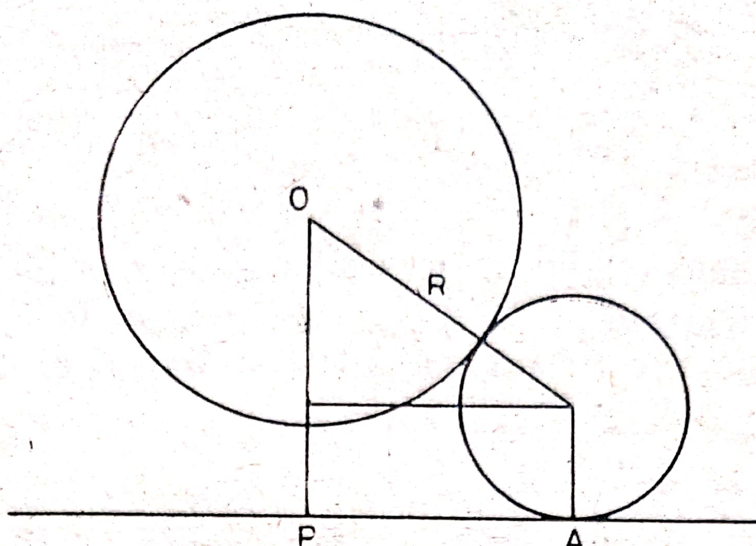


Fig. 7.24.

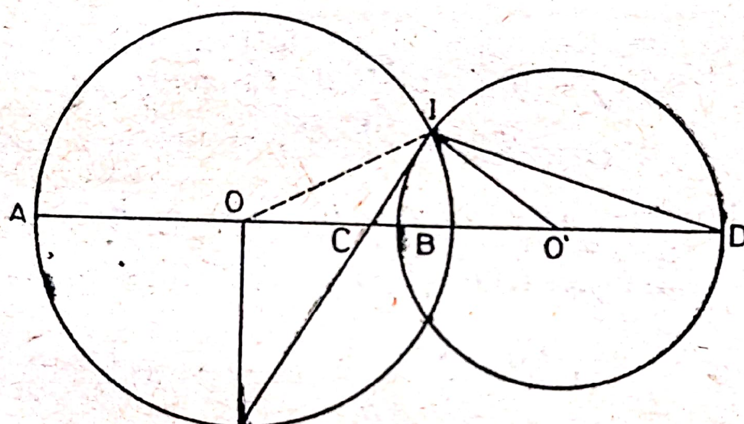


Fig. 7.25.

cea de-a doua relație. Deoarece $\overline{OI} = \overline{OB}$ rezultă $\overline{OI}^2 = \overline{OC} \cdot \overline{OD}$ deci OI e tangenta la cercul Γ_{CD} și deci cercurile sînt ortogonale. Mai departe fie $E \in \Gamma_{AB} \cap IC$ $\sphericalangle OIC = \sphericalangle O'ID$ deci $\triangle IOE \sim \triangle O'DI$ și $\sphericalangle OEI = \sphericalangle O'DI$ și $EI \perp ID$. De aici $OE \perp AB$ și IC este bisectoarea $\sphericalangle AIB$. Analog se demonstrează că $O'I$ e bisectoarea $\sphericalangle CID$.

36. Se demonstrează mai întîi că orice punct M_1 situat pe arcul $\overline{AB}$ al circumferinței circumscrise triunghiului echilateral satisface condiția $\overline{M_1A} + \overline{M_1B} = \overline{M_1C}$. Demonstrația se face fie utilizînd teorema lui Ptolomeu (în orice patrulater inscriptibil, suma produselor laturilor opuse este egală cu

produsul diagonalelor) fie ducînd $\overline{AE}||\overline{M_1B}$ şi demonstrînd uşor că $\overline{M_1D} = \overline{M_1A}$ şi $\overline{M_1B} = \overline{DC}$ $(D = \overline{M_1C} \cap \overline{AE})$.
Se consideră apoi un punct M exterior circumferinţei circumscrise $\triangle ABC$ (pe care o notăm Γ_{ABC}), care satisface relaţia din enunţ (fig. 7.26). Se uneşte M cu punctele A, B, C şi notăm $M_1 = MC \cap \Gamma_{ABC}$.
Din triunghiurile MM_1A, MN_1B avem (o latură e superioară diferenţei $2\overline{MM_1} > \overline{MB} + \overline{MA} - (\overline{M_1B} + \overline{M_1A}) = \overline{MC} - \overline{M_1C}$ (relaţia adevărată în virtutea ipotezei e echivalentă cu ipoteza).
Dar $\overline{MC} - \overline{M_1C} = \overline{MM_1}$ şi atunci

$$2\overline{MM_1} > \overline{MM_1} = \overline{MC} - \overline{M_1C} = \overline{MB} + \overline{MA} - (\overline{M_1A} + \overline{M_1B}) = (\overline{MB} - \overline{M_1B}) + (\overline{MA} - \overline{M_1A}) > \overline{MM_1} + \overline{MM_1}$$

De aici rezultă $MM_1 = 0$ şi deci $M \in \Gamma_{ABC}$.

37. Din datele problemei rezultă că $2p = AB + AC + BC = \text{constant}$.
Proiectăm bisectoarea AD pe latura AB şi unim centrul cercului înscris cu punctul F de tangenţă cu AB (fig. 7.27)

$$\triangle AOF \sim \triangle ADE, \ \overline{AE} = \frac{\overline{ED} \cdot \overline{AF}}{\overline{OF}}$$

Exprimînd aria triunghiului în două moduri avem :

$$(\overline{AB} + \overline{AC}) = (\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC})\overline{OF} \text{ de unde } \frac{\overline{ED}}{\overline{OF}} =$$

$$= \frac{\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}}{\overline{AC} + \overline{AB}} = \text{constant.}$$

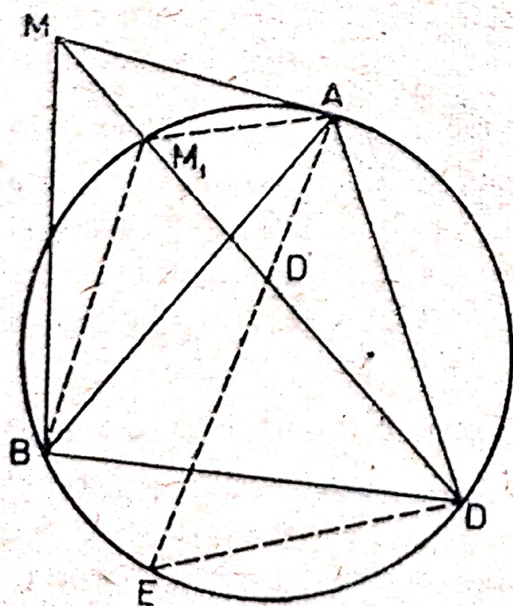


Fig. 7.27.

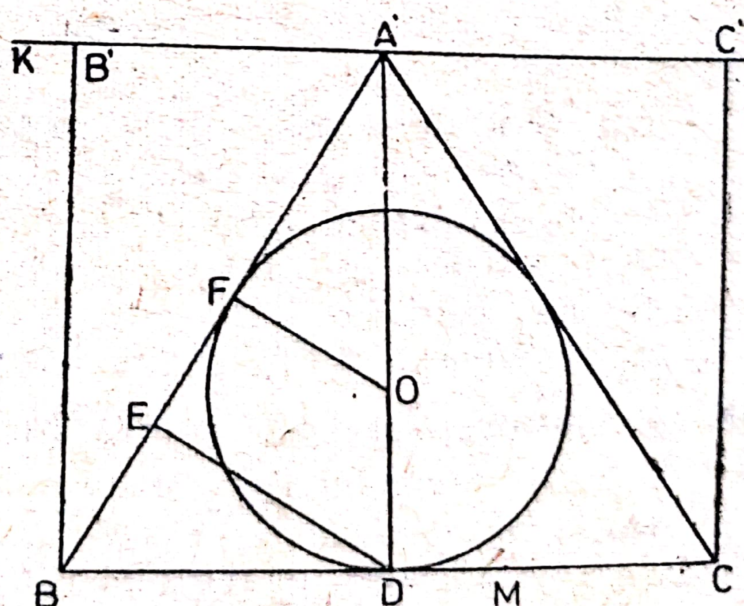


Fig. 7:26.

Atunci AE este constant căci $AF = p - BC =$ constant. Pentru a demonstra cea de-a doua proprietate observăm

că $\triangle BAB' \sim \triangle CAC' \sim \triangle ADE$ de unde $\frac{\overline{AE}^2}{BB' \cdot CC'} =$

$$= \frac{\overline{AD}^2}{AB \cdot AC}$$

Aplicînd teorema lui Stewart în $\triangle ABC$ găsim $\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} =$

$= 1 - \frac{\overline{BC}^2}{(\overline{AB} + \overline{AC})^2}$ și ținînd seama de primul rezultat se deduce $BB'CC' =$ constant (valoarea constantă rezultă la nevoie cu ușurință).

38. Construim $BE \| AD$, $BF \| AC$ $BG \perp DC$ și notăm cu I mijlocul lui $\overline{CE}$ (și deci și al lui $\overline{DF}$).
Aplicînd teorema lui Pithagora în $\triangle BDF$ obținem:
$\overline{BF}^2 - \overline{BD}^2 = 2\overline{DF} \cdot \overline{IG}$. Analog din $\triangle BEF$ obținem $\overline{BC}^2 - \overline{BE}^2 = 2\overline{CE}\ \overline{IG}$.
Împărțind cele două relații termen cu termen se obține rezultatul cerut.

39. Fie E, F, G, H proiecțiile lui M pe laturile patrulaterului înscris $ABCD$ (fig. 7.29) $\triangle MAN \sim \triangle AGC$ $\triangle MAE \sim \triangle ECF$

$\frac{MN}{MG} = \frac{MA}{MC}$ $\frac{ME}{MF} = \frac{MA}{MC}$ de unde relația $\overline{MN}\ \ \overline{MF} = \overline{MG}\ \ \overline{ME}$.

40. Fie E, F, G, H punctele de tangență ale laturilor patrulaterului cu cercul înscris (fig. 30).
$\sphericalangle AOB + \sphericalangle DOC = 180°$ și
$\sphericalangle AOD + \sphericalangle BOC = 180°$

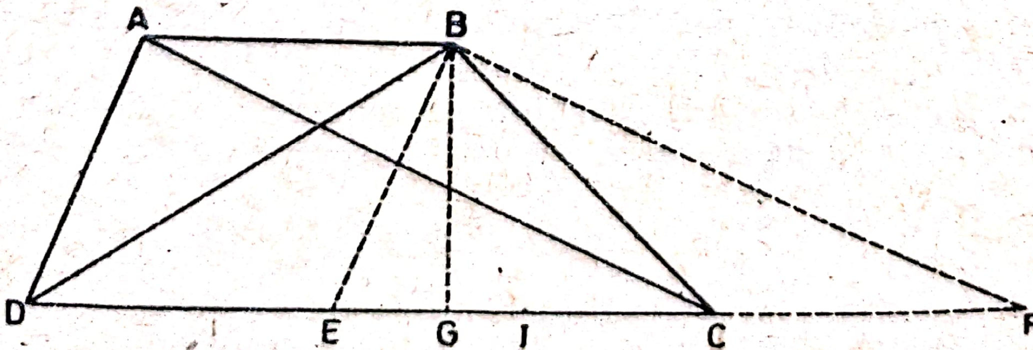


Fig. 7.28.

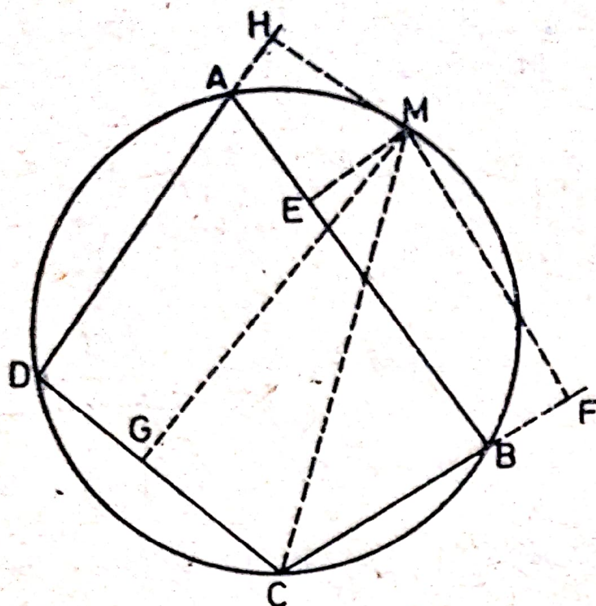


Fig. 7.29.

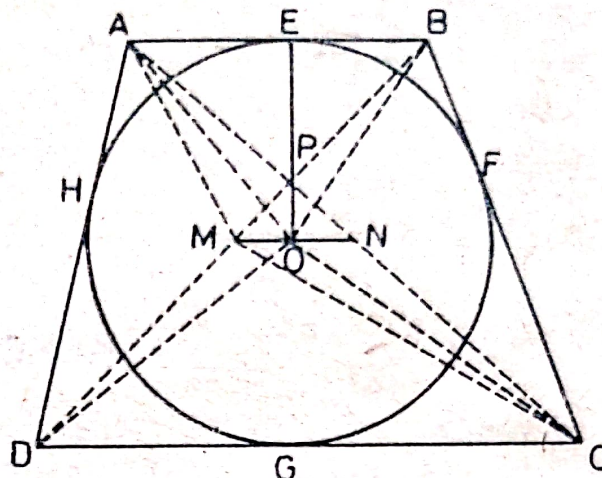


Fig. 7.30.

Avem atunci (scriind ariile $\triangle OAB$ şi $\triangle OBC$ în două moduri diferite şi făcînd raportul lor).

$\dfrac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{\overline{OC}\cdot\overline{OD}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DC}}$ şi la fel $\dfrac{\overline{OA}\cdot\overline{OD}}{\overline{OB}\cdot\overline{OC}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$ de unde prin înmulţire membru cu membru se obţine relaţia cerută.

41. Fie M şi N mijloacele diagonalelor (fig. 7.30) patrulaterului $ABCD$ şi O centrul cercului înscris în el. Se duce dreapta OM şi vom demonstra că prelungirea ei trece prin N. Fie P', O punctele unde OA şi prelungirea lui OC întîlnesc diagonala BD. Cum M e mijlocul lui BD avem

$$2\,\overline{MP'}=\overline{DP'}-\overline{BP'}\ \text{şi}\ 2\overline{MQ}=\overline{DQ}-\overline{BQ}$$

Lungimile $\overline{MP'}$, $\overline{DP'}$ şi $\overline{BP'}$ sînt proporţionale cu înălţimile corespunzătoare laturii comune $\overline{OA}$ în $\triangle NOA$, $\triangle DOA$ şi $\triangle BOA$, deci $2S_{MOA}=S_{DOA}-S_{BOA}$. În mod analog $2S_{MOC}=S_{DOC}-S_{BOC}$ şi ţinînd seama că triunghiurile din partea a doua au raza cercului drept înălţime comună

$$\frac{S_{MOA}}{S_{MOC}}=\frac{\overline{DA}-\overline{BA}}{\overline{DC}-\overline{BC}}$$

Se poate verifica uşor că raportul din membrul drept este egal cu unitatea, deci $S_{MOA}=S_{MOC}$ şi avînd aceeaşi bază

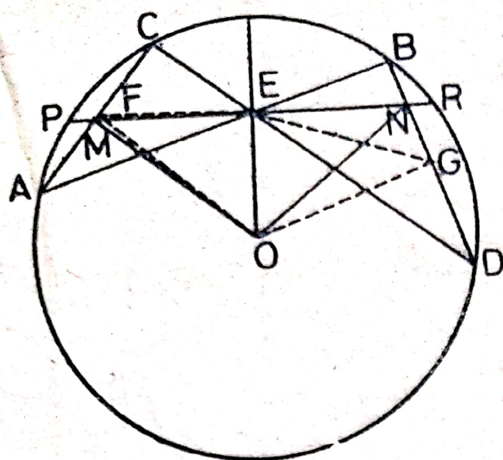


Fig. 7.31.

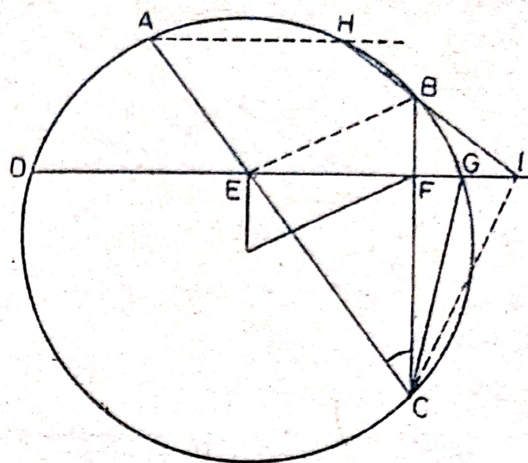


Fig. 7.32

OM înseamnă că perpendicularele din A şi C pe OM sînt egale. De aici se poate trage concluzia că $\overline{AN} = \overline{NC}$ ceea ce trebuie să demonstrăm.

42. Fie $E = AB \cap CD$ şi F, G mijloacele coardelor $\overline{AC}$ şi $\overline{DD}$
$\square\, OMFE$ e inscriptibil deoarece $\sphericalangle MFO = \sphericalangle MEO = 90°$ şi deci $\sphericalangle CFE \doteq \sphericalangle EOM$
$\square OENG$ e inscriptibil şi $\sphericalangle EON = \sphericalangle EGN$.
$\triangle ACE \sim \triangle EBD$ şi EF şi EG sînt mediane în ele, deci $\sphericalangle FME \doteq \sphericalangle EGN$, de unde $\sphericalangle MOE = \sphericalangle NOE$ ceea ce demonstrează că $\triangle MON$ e isoscel şi deci $\overline{EM} = \overline{EN}$.

43. Ducem $AL || DG$ şi notăm cu H intersecţia dreptei AL cu cercul şi $I = HB \cap DG$.
Avem atunci

$$\sphericalangle ECF = \sphericalangle LHI = \sphericalangle BIF$$

$\square BICF$ e inscriptibil şi în cercul său

$$\overline{EF} \cdot \overline{FI} = \overline{BF} \cdot \overline{FC} = \overline{FG} \cdot \overline{DF}$$

sau

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{FI}} = \frac{\overline{DF} - \overline{EF}}{\overline{FI} - \overline{FG}} \quad \frac{\overline{DE}}{\overline{IG}}$$

De aici $\dfrac{\overline{DF} \cdot \overline{FG}}{\overline{EF}} = \overline{IG} = \text{const.}$

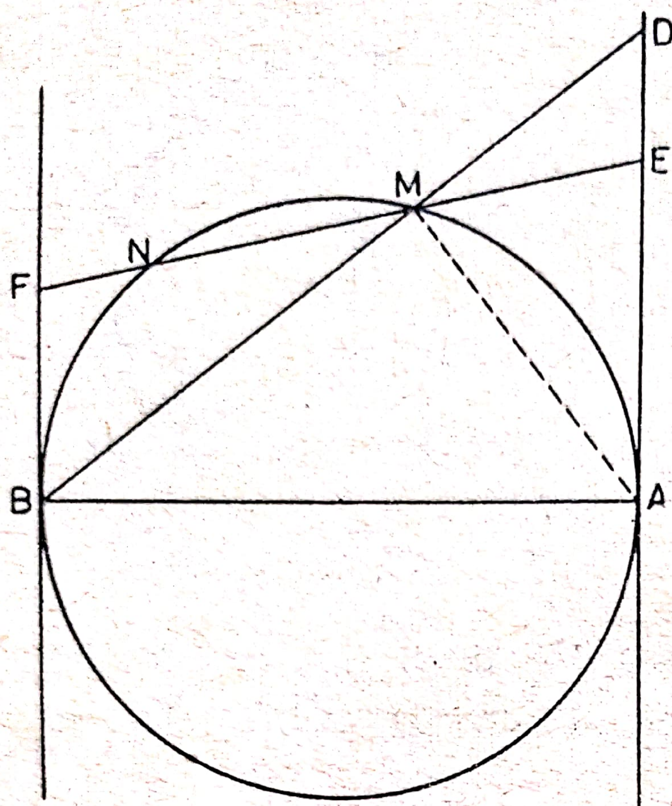


Fig. 7.33.

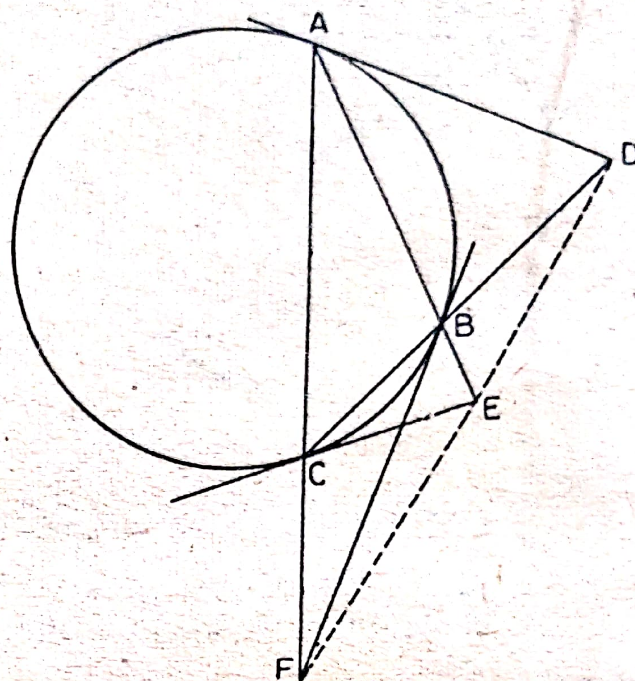


Fig. 7.34.

44. $\triangle MDE \sim \triangle MBF$, de unde

$$\frac{\overline{DE}}{BF} = \frac{\overline{MD}}{MB} = \frac{\overline{MD}\cdot\overline{BD}}{MB\cdot BD}$$

Puterea punctului D față de cerc ne dă $\overline{MD}\cdot\overline{BD} = \overline{AD}^2$ Relații metrice cunoscute în $\triangle ABD$ dreptunghic în A și cu $\overline{AM}\perp\overline{BD}$ ne dau $\overline{MB}\cdot\overline{BD} = \overline{AB}^2$.
Ținînd seama de cele trei relații obținute se obține rezultatul cerut.

45. Se utilizează reciproca teoremei lui Menelaus și proprietatea bisectoarelor interioare și exterioare de a împărți laturile pe care cad în segmente proporționale cu laturile (Teorema lui Menelaus se enunță: O transversală determină pe laturile unui triunghi șase segmente între care există relația: produsul a trei segmente neconsecutive este egal cu produsul celorlalte trei segmente neconsecutive).

46. $\triangle ADB \sim \triangle ADC$ ($\sphericalangle DAB = \sphericalangle ACD$ și $\widehat{D}$ comun)

$\frac{\overline{BD}}{AD} = \frac{\overline{AD}}{DC} = \frac{\overline{AB}}{AC}$; De aici rezultă

$$\frac{\overline{BD}}{DC} = \frac{\overline{AB^2}}{AC^2}$$

În mod analog se demonstrează că $\frac{\overline{EB}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BC^2}}{\overline{AC^2}}$ şi $\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{BC^2}}{\overline{AB^2}}$
Din cele trei relaţii înmulţite în mod convenabil rezultă: $\frac{\overline{BD}\cdot\overline{EA}\cdot\overline{FC}}{\overline{DC}\cdot\overline{EB}\cdot\overline{FA}} = 1$ şi conform reciprocei lui Menelaus rezultă că D, E, F sînt coliniare.

47. Notînd $B' = \Gamma_B \cap AI$, $C' = \Gamma_C \cap AI$ (fig. 7.35) se arată uşor că $\triangle ABB' \sim \triangle AIC$ şi $\triangle ABI \sim \triangle ACC'$, de unde rezultă $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AI}}$, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AI}}$ şi înmulţind cele două relaţii termen cu termen obţinem $\overline{AI^2} = \overline{AB'}\cdot\overline{AC'}$.
Mai departe avem evident $\overline{AE^2} = \overline{AB'}\ \overline{AI}$, $\overline{AF^2} = \overline{AC'}$, $\overline{AI}$ şi deci $\overline{AE^2} - \overline{AF^2} = AB'\cdot AC'\cdot AI^2 = AI^4$, de unde relaţia cerută.

48. Teorema lui Ceva ne va da (fig. 7.36), (a): $\overline{BI_1}\cdot\overline{CI_2}\cdot\overline{AI_3} = \overline{I_1C}\cdot\overline{I_2A}\cdot\overline{I_3B}$ şi ţinînd seama că $M_1 \in \overline{B'C}$, $\overline{M_1C'} = \frac{\overline{BI}}{2}$ $\overline{M_1B'} = \frac{\overline{I_2C}}{2}$, $M_2 \in \overline{A'C'}$, $\overline{M_2C'} = \frac{\overline{AI_2}}{2}$, $\overline{M_2A'} = \frac{\overline{I_2C}}{2}$, $M_3 \in A'B'$, $\overline{M_3A'} = \frac{\overline{I_3B}}{2}$, $\overline{M_3B'} = \frac{\overline{I_3A}}{2}$, se obţine prin împărţirea lui 8 a relaţiei (a) $\overline{M_1C'}\ \overline{M_2A'}\ \overline{M_3B} = \overline{M_1B'}\cdot\overline{M_2C'}\cdot\overline{M_3A'}$ care în conformitate cu reciproca teoremei lui Ceva asigură că proprietatea cerută este adevărată.

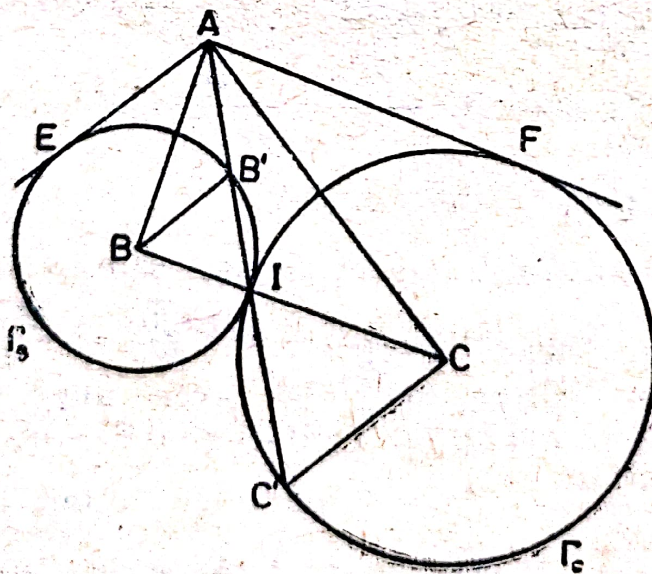


Fig. 7.35.

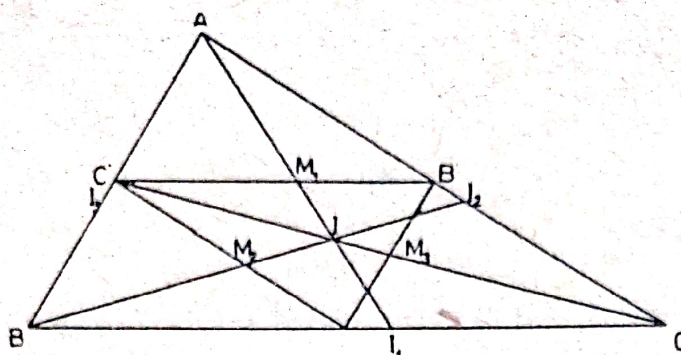


Fig. 7.36.

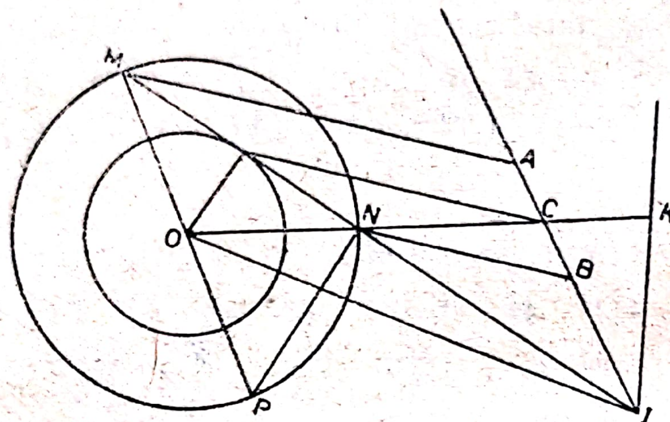


Fig. 7.37.

49. Notăm (fig. 7.37) $I = AB \cap MN$, C, mijlocul lui AB, $AB = a$ P, punctul diametral opus lui M. Avem imediat $\frac{\overline{IA}}{IM} = \frac{\overline{IB}}{IN} = \frac{a}{2\sqrt{R^2 - r^2}}$ deci $IA \cdot IB = \frac{a^2}{4(R^2 - r^2)} \overline{IM} \cdot \overline{IN} = \frac{a^2}{4(R^2 - r^2)} = (\overline{IO^2} - R^2)$ sau $4IC^2 - a^2 = \frac{a^2}{R^2 - r^2} (IO^2 - a^2)$, adică (a)

$a^2 I - O^2 - 4(R^2 - r^2)\overline{IC}^2 = a^2 r^2$.

Determinăm pe OC un punct exterior care împarte segmentul OC dat în raportul $\frac{R^2 - r^2}{a^2}$ adică $\frac{\overline{KO}}{KC} = \frac{R^2 - r^2}{a^2}$ și scriind teorema lui Stewart în $\triangle IOK$ avem după simplificări. $[4(R^2 - r^2) - a^2] IK^2 = 4(R^2 - r^2) IC^2 - a^2 IO^2 + 4(R^2 - r^2) \cdot \left(\frac{4(R^2 - r)}{a^2} - 1 \right) KC^2$, de unde ținînd seama de (a) se observă că IK este constant (K se determină și se construiește ușor din datele problemei), cu alte cuvinte punctul I

care satisface relația (a) se află pe cercul cu raza $\overline{IK}$ și cu centrul în K. Efectuînd calculele se observă că și raza $\overline{IK}$ poate fi construită cu rigla și compasul obținîndu-se patru, două sau nici o soluție (acest ultim caz are loc cînd $2\sqrt{R^2 - r^2} > a$).

50. Faptul că $\overline{M_1M_2} \| \overline{N_1N_2}$ și că $\overline{M_3M_4} \| \overline{N_3N_4}$ se demonstrează ușor ținîndu-se seama că $\overline{M_1N_1} = \overline{M_2N_2}$ și $\overline{M_3N_3} = \overline{M_4N_4}$. Din paralelismul dreptelor de mai sus rezultă

$$\frac{\overline{I_1A}}{\overline{I_1B}} = \frac{\overline{I_1M_1}}{\overline{I_1N_1}} \; \frac{\overline{I_1M_3}}{\overline{I_1N_3}} \text{ și deci } \overline{AM_3} \| \overline{BN_3}.$$

În plus $\dfrac{\overline{I_2A}}{\overline{I_2B}} = \dfrac{\overline{I_2M_2}}{\overline{I_2N_2}} = \dfrac{\overline{I_2M_4}}{\overline{I_2N_4}}$ și deci $AM_4 \| BN_4$.

Presupunînd că nici A, M_3, M_4 nici B, N_3, N_4 nu-s coliniare din cele arătate pînă acum rezultă $\triangle AM_3N_4 \sim BN_3N_4$ și $\dfrac{AM_3}{BN_3} = \dfrac{AM_4}{BN_4} = \dfrac{B_3M_4}{N_3N_4}$; de unde de exemplu $\dfrac{AM_3}{AM_4} = \dfrac{BN_3}{BN_4}$ ceea ce este absurd întrucît primul raport este supraunitar iar cel de-al doilea subunitar (fig. 7.38). Dacă, fie A, M_3, M_4 fie B_1, N_3, N_4 sînt coliniare atunci proprietatea rezultă imediat și pentru cele presupuse a nu fi coliniare din relațiile de paralelism demonstrate.

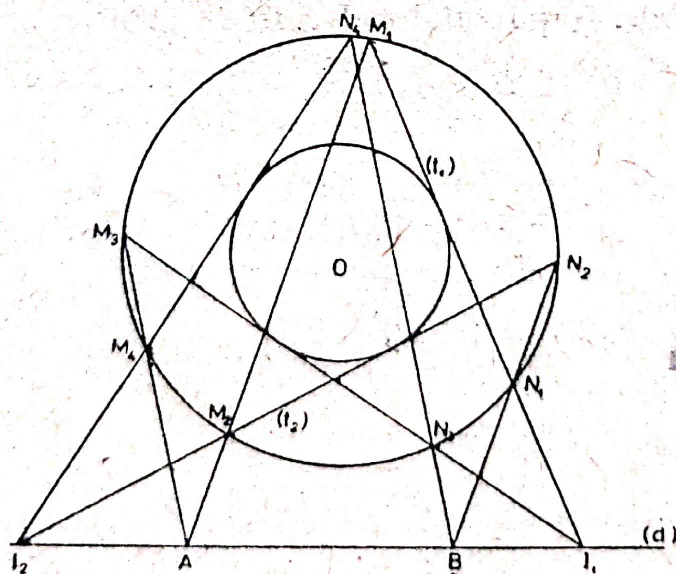


Fig. 7.38.

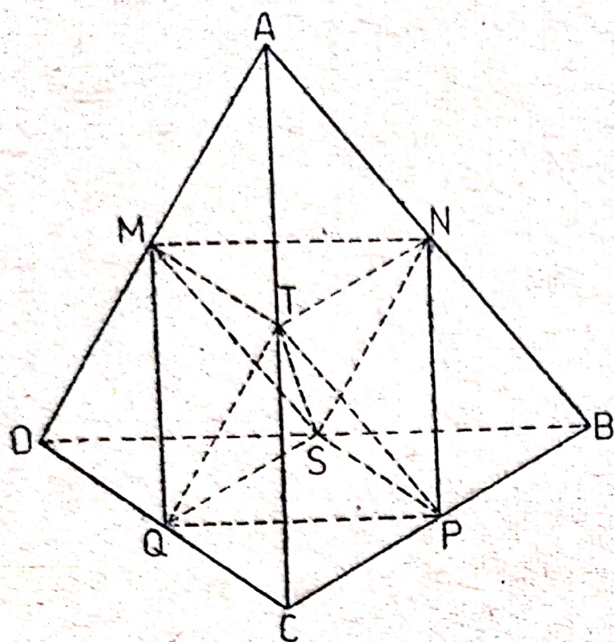


Fig. 7.39.

51. Presupunem mai intîi că $AC \perp BD$. În aceste condiţii avem evident (fig.7.39).

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OD}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{DC}^2.$$

Presupunem acum că $\overline{AB}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2$ şi notăm cu α unghiul diagonalelor. Din teorema lui Pithagora generalizată aplicată în $\triangle OAD$, $\triangle ODC$, $\triangle OBC$ şi $\triangle OAB$ şi din ipoteză, avem $0 = \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 = 2\overline{AC}\cdot\overline{BD} \cos \alpha$, de unde $\cos \alpha = 0$.

52. Necesitatea condiţiei rezultă din aplicarea teoremei lui Pithagora generalizată în două triunghiuri care au ca laturi cîte o diagonală şi este o proprietate cunoscută. Pentru a demonstra suficienţa condiţiei, observăm (fig. 7.39) că patrulaterele $MNPQ$, $TNSQ$, $TMSP$ (unde M, N, P, Q, T şi S sînt respectiv mijloacele lui $\overline{DA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ şi $\overline{BD}$) sînt paralelograme şi deci în ele proprietatea enunţată este adevărată. Aplicînd această proprietate găsim: (Am considerat patrulaterul $ABCD$ arbitrar).

$\overline{TS}^2 = \frac{1}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{DA}^2) - \frac{1}{4}(\overline{AC}^2 + \overline{BO}^2)$. Teorema lui Gauss).

Ţinînd seama de relaţia dată rezultă că $TS = 0$, adică diagonalele se taie în părţi egale, proprietate care este echivalentă cu definiţia paralelogramului.

53. Fie O (fig. 7.40) astfel ca

$$\frac{\overline{AA'}}{OA} = \frac{\overline{BB'}}{OB'} = \frac{\overline{CC'}}{OC}$$

Rezultă imediat că $\frac{S_{ABC}}{S_{BOC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{COA}} = \frac{S_{AB}}{S_{AOB}}$ de unde se scoate uşor $\lambda = 3$.

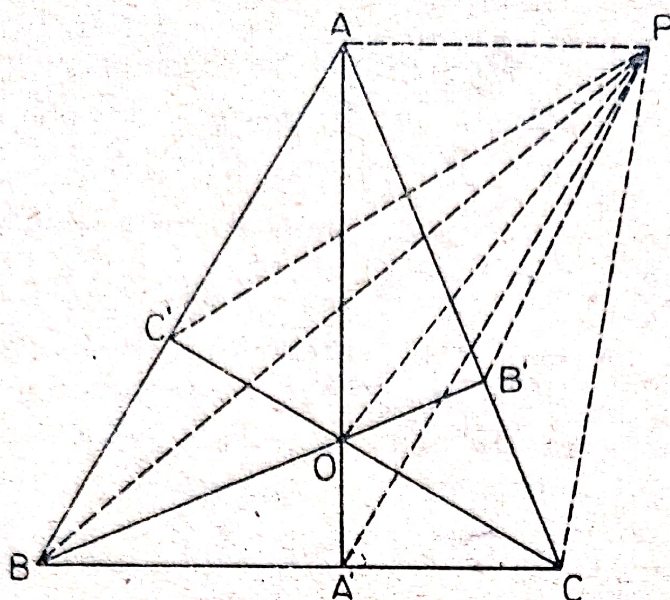


Fig. 7.40.

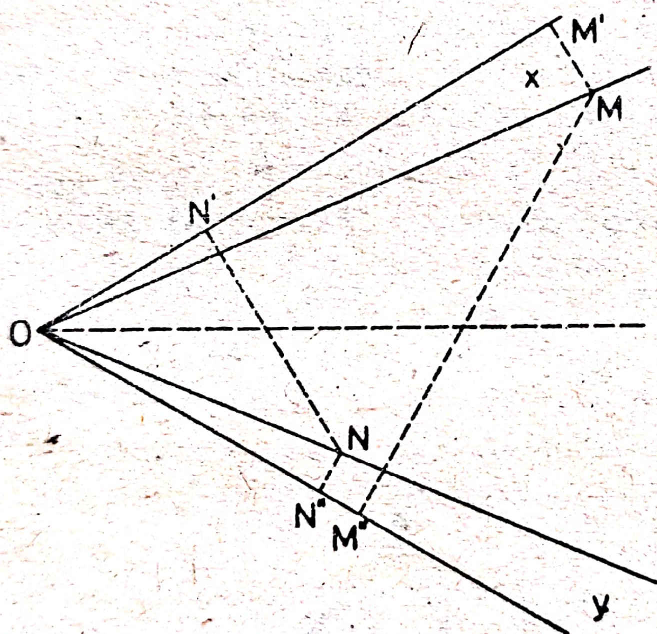


Fig. 7.41

54. a) *Condiția este necesară:* dacă OM și ON sînt simetrice față de bisectoarea $\measuredangle XOY$
$\triangle MM'M'' \sim \triangle NN'N''$ de unde relația cerută.

b) *Condiția este suficientă:* dacă relația dată e satisfăcută, ținînd seama că $\measuredangle M'MM'' = \measuredangle N'NN''$ rezultă că $\triangle N'NN'' \sim \triangle M''MM'$ și $\measuredangle NN'N'' = \measuredangle MM'M''$, de unde $\measuredangle NON'' = \measuredangle MOM'$ și proprietatea e demonstrată.

55. *Condiția e necesară.* Fie O intersecția perpendicularelor în M, N, P, respectiv pe BC, CA, AB. Aplicînd de mai multe ori teorema lui Pithagora obținem ușor $\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OC}^2 \cdot \overline{NC}^2 - \overline{NA}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OA}^2$ și $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OB}^2$, de unde rezultă relația cerută. *Condiția este suficientă*: Notăm $O = p_m \cap p_n$ (cu p_m și p_n notăm perpendicularele în M și N) și unim O cu P. Avem din aplicarea teoremei lui Pithagora în $\triangle OBM$, $\triangle OMC$, $\triangle OCM$ și $\triangle ONA$ — toate dreptunghice și din condiția dată, $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OB}^2$. Aplicînd teorema lui Pithagora generalizată în $\triangle OPA$ și $\triangle OPB$ și scăzînd rezultatele obținem $\cos(\widehat{\overline{PO}, \overline{AB}}) = 0$ deci $\overline{AB} \perp OP$ și teorema e demonstrată.

56. Perpendicularele din A, B, C pe $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ sînt concurente dacă și numai dacă $\overline{BA'}^2 - \overline{CA'}^2 + \overline{CB'}^2 - \overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2 - \overline{BC'}^2 = 0$, egalitatea care scrisă astfel este echivalentă cu condiția de concurență a perpendicularelor din A', B', C' pe BC, CA, AB.

57. Se aplică proprietatea demonstrată la 55) obținîndu-se $\frac{a^2(c-b)}{b+c} + \frac{b^2(a-c)}{a+c} + \frac{c^2(b-a)}{a+b} = 0$, cu a, b, c, am notat lungimile laturilor în $\triangle ABC$. Egalitatea aceasta se transformă identic în $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)^2 = 0$, de unde rezultatul cerut.

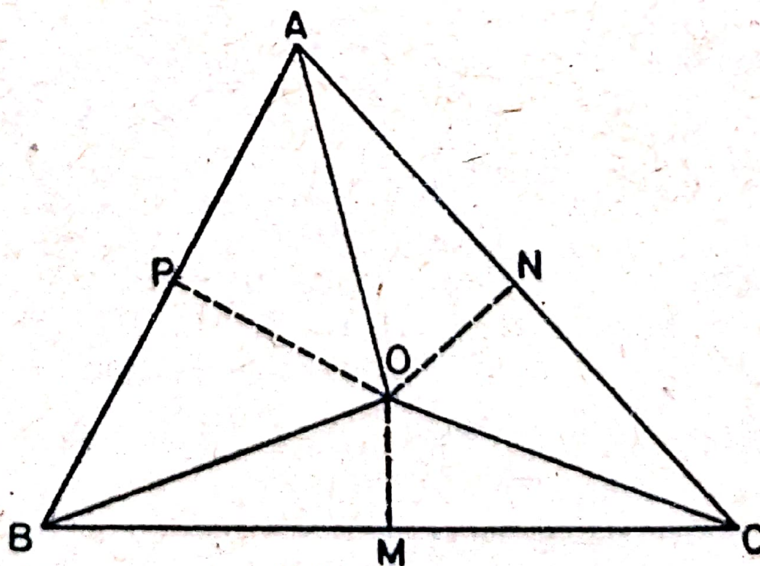


Fig. 7.42.

Fig. 7.43.

58. Notăm $\frac{\overline{DP}}{\overline{PA}} = \frac{m}{n}$, $\overline{DC} = a$, $\overline{AB} = b$ să avem (fig. 7.43) $\overline{BQ'} = \overline{DP'} = \frac{m}{n}\, b$ și deci patrulaterul $DP'BQ'$ e paralelogram.

59. Avem $\sphericalangle FDE = \sphericalangle FBE$ ceea ce demonstrează prima proprietate $\sphericalangle FBA = \sphericalangle DAB = \sphericalangle ABF$ avînd măsuri egale ceea ce demonstrează cea de-a doua proprietate. Din asemănarea triunghiurilor se deduce imediat $\frac{\overline{IE}}{\overline{IF}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{IH}}{\overline{IG}}$ de unde rezultă cea de-a treia proprietate.

Pentru a demonstra că I, K, C, sînt coliniare se duce dreapta IC și paralele prin H și G la BC și DC care o întîlnesc în K' și K''. Scriind rapoartele ce rezultă din teorema lui Thales și ținînd seama că $\frac{\overline{IG}}{\overline{IF}} = \frac{\overline{IH}}{\overline{IE}}$ se conclude că $K'' \equiv K' \equiv K$.

Ultima proprietate reiese din egalitatea unghiurilor demonstrate la asemănarea triunghiurilor BIH și DIG.

Fig. 7.44.

Fig. 7.45

60. Observăm că $I \in DE$ şi $J \in FG$ şi notînd $K \in AH \cap JI, L \in BC \cap AH$ (fig. 7.45) avem imediat $S_{ABDE} = S_{ABIH} = S_{BIKL}$ şi $S_{ACFG} = S_{ACJC} = S_{LKJC}$ de unde rezultă proprietatea cerută. Proprietatea demonstrată e valabilă şi în cazul cînd $A = 90°$ şi paralelogramele sînt patrate, caz în care rezultă teorema lui Pithagora.

61. Ducem din centrul O al cercului dat un cerc cu raza OA (A e dat) care va intersecta latura MC în punctele D şi E (fig. 7.46). Patrulaterul $MAOD$ (D e punctul nesimetric cu A faţă de axa de simetrie a triunghiului isoscel) este inscriptibil şi deci $\sphericalangle ODA = \frac{1}{2} M$. Din datele problemei rezultă că unghiul M e constant deci $\sphericalangle ODA =$ const. Atunci D va fi un punct fix şi locul lui M va fi al unui punct din care se vede segmentul AD (fix) sub un unghi constant.

Fig. 7.46

62. Dreapta lui Simpson determinată de punctul M este (fig. 7.47) DEF. Prelungim MD pînă întîlneşte cercul în N şi dreapta lui Simpson pînă întîlneşte AA' în I. Ducem apoi $\overline{BL} \perp \overline{BC}$ şi din L (pe cerc) ducem $LP \perp MD$. $\sphericalangle BED = \sphericalangle BMD$, $\sphericalangle BAN = \sphericalangle BMD$ deci $DE \parallel AN$ şi

Fig. 7.47.

patrulaterul $DIAN$ e paralelogram. De aici rezultă $\overline{DN} = \overline{AI}$. La fel patrulaterul $LAHB$ este paralelogram şi deci $\overline{AH} = \overline{BL} = \overline{PD}$. Se arată apoi că $\overline{MP} = \overline{DN}$ şi atunci $\overline{PD} + \overline{MP} = \overline{AI} + \overline{AH}$ sau $\overline{HD} = \overline{IH}$. De aici rezultatul cerut rezultă cu uşurinţă.

63. Fie dreptele AD, HE şi CF care fac unghiuri de 60° cu laturile opuse şi $A'B$; C', intersecţiile lor şi fie AA_1, BB_1, CC_1, înălţimile în $\triangle ABC$. Mai întîi se arată că $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ au toate unghiurile egale căci de exemplu patrulaterul $A'EAF$ e inscriptibil ($\sphericalangle AEA' = \sphericalangle BFA' — 60°$).

Fig. 7.48.

Mai rămîne de demonstrat că de exemplu $\overline{BC} = \overline{B'C'}$. Pentru aceasta observăm că patrulaterele $CEDC'$. $DB'FB$ și BCB_1C_1 sînt inscriptibile și scriind puterea lui A față de cercurile lor circumscrise avem $\overline{AD}, \overline{AC} = \overline{AE}. \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AB} = \overline{AF}, \overline{AB}, \overline{AC_1} \cdot \overline{AB}$. Scăzînd a doua relație cu prima și adunînd-o pe a treia cu toți termenii trecuți în membru drept obținem $\overline{AD}\ \ \overline{B'C'} = AC \cdot B_1E + AB \cdot C_1F$.

Mai departe $\triangle AA_1D \sim \triangle BB_1E \sim CC_1F$ și deci $\frac{\overline{A_1D}}{AA_1} = \frac{\overline{B_1E}}{BB_1} = \frac{\overline{C_1F}}{CC_1}$ de unde $\overline{A_1D}, \overline{BC} = \overline{B_1E} \cdot \overline{AC} = \overline{C_1F} \cdot \overline{AB}$.

Aceste relații la care adăugăm $AD = 2A_1D$ (evidentă) ne conduc la $B'C' = BC$ și teorema e astfel demonstrată. Această proprietate poate fi adoptată ca un al patrulea caz de egalitate a triunghiurilor.

64. Trebuie să demonstrăm că

$$\frac{\overline{FD}}{FE} = \frac{\overline{GD}}{GE}$$

Din $\triangle FCG \sim \triangle FAE$ rezultă $\frac{\overline{FD}}{FA} = \frac{\overline{FC}}{FE} = \frac{\overline{CD}}{AE}$

Din $\triangle GCD \sim \triangle GBE$ $\frac{\overline{GD}}{GB} = \frac{\overline{GC}}{GE} = \frac{\overline{CD}}{BE}$

Întrucît $\overline{AE} = \overline{BE}$, rezultă că $\frac{\overline{FD}}{FA} = \frac{\overline{FC}}{FE} = \frac{\overline{GD}}{GB} = \frac{\overline{GC}}{GE}$

și apoi (x) $\overline{FD} \cdot \overline{GE} = \overline{FA} \cdot \overline{GC}$, $\overline{FE} \cdot \overline{GD} = \overline{FC} \cdot \overline{GB}$.

Ducem apoi $\overline{AM} \parallel \overline{CD}$ și $\overline{BN} \parallel \overline{CD}$(fig. 7.49).

Din $\triangle GCD \sim \triangle GNB$ rezultă $\frac{\overline{GD}}{GN} = \frac{\overline{GC}}{GB} = \frac{\overline{CD}}{BN}$, iar din $\triangle FCD \sim \triangle FAM$ rezultă $\frac{\overline{FC}}{FA} = \frac{\overline{CD}}{AM} = \frac{\overline{FD}}{FM}$. Întrucît $\overline{AM} = \overline{BN}$ avem

(xx) $\frac{\overline{GC}}{GB} = \frac{\overline{FC}}{FA}$

Relațiile (x) și (xx) ne demonstrează relația propusă.

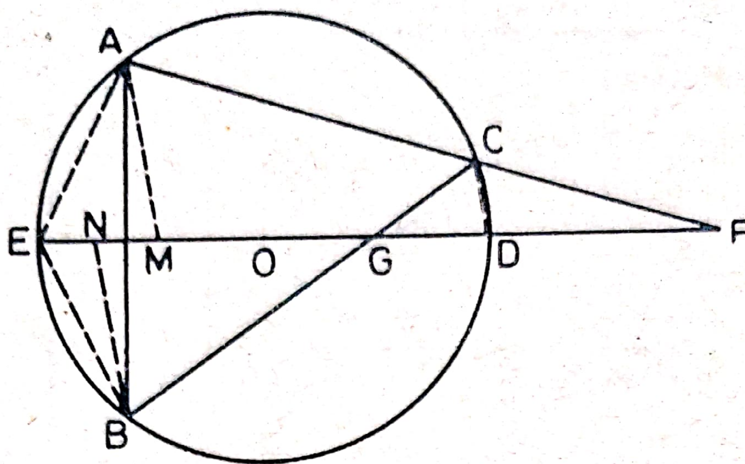


Fig. 7.49.

5. Vom utiliza teorema lui Stewart al cărui enunț este (fig. 7.50)

$\overline{AB}^2 \cdot \overline{DC} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} = \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{BC}$ și care se demonstrează scriind teorema lui Pithagora în $\triangle ABD$ relativă la latura AD și în $\triangle ADC$ relativă la latura AC și reducînd apoi termenii care conțin produse de segmente.

Fie acum $\widehat{A} = 2\widehat{B}$. Rezultă imediat că dacă AD e bisectoarea unghiului $\widehat{A}$, avem $\overline{AD} = \overline{BD}$.

Ținînd seama de proprietatea bisectoarei $\frac{\overline{BD}}{DC} = \frac{\overline{AB}}{AC}$ obținem

$BD = \frac{ac}{b+c}$ unde a, b, c, sînt lungimile laturilor BC, AC și AB.

Notînd $1a = \overline{AD}$ și scriind teorema lui Stewart în $\triangle ABC$ găsim $1_a = \frac{ac^2}{a^2 - b^2 + c^2}$ și ținînd seama că $1_a = BD$ găsim $a^2 - b^2 = bc$.

Să presupunem acum că $a^2 - b^2 = bc$, sau $a^2 = b(b+c)$. Ducem bisectoarea $AD = l_a$ și calculînd segmentul BD și pe 1_a^2 cu ajutorul teoremei lui Stewart găsim :

$$1_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}; \qquad \overline{BD} = \frac{ac}{b+c}$$

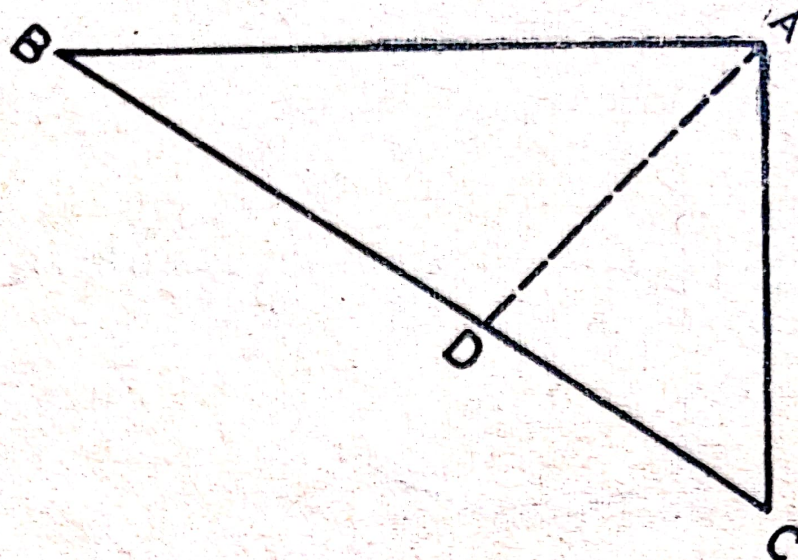


Fig. 7.50.

Ținînd seama de relația dată găsim

$l_a^2 = \frac{bc^2}{b+c} = BD^2$, de unde rezultă imediat $\sphericalangle B = \sphericalangle BAD$

și deci $\widehat{A} = 2\widehat{B}$.

66. $\triangle ABD \sim \triangle ABE$ ($\sphericalangle ABC = \sphericalangle AEB$ și $\sphericalangle BAD$ comun).

a) $\frac{\overline{AD}}{AB} = \frac{\overline{AB}}{AE}$, de unde $\overline{AB}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AG}$

b) $\sphericalangle FED = \sphericalangle AEB = \sphericalangle CED$ (avînd măsuri egale pe cerc).

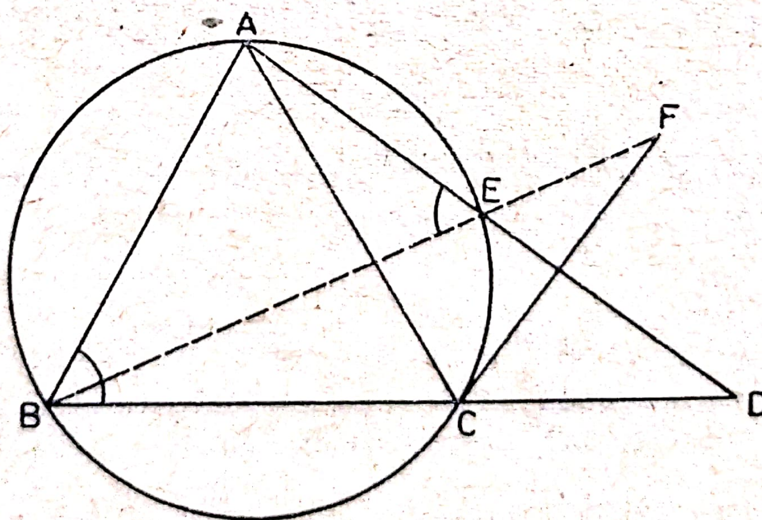


Fig. 7.51.

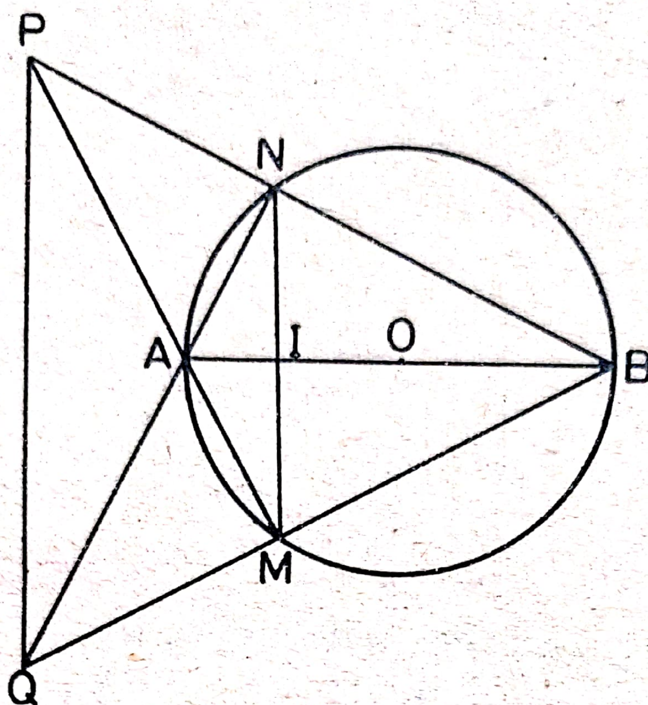


Fig. 7.52.

c) $\sphericalangle BFC = \frac{1}{2} \sphericalangle BEC =$ constant.

Locul geometric cerut este arcul de cerc de pe care se vede segmentul BC sub unghiul constant $\frac{1}{2}\widehat{A}$.

67. În $\triangle PBQ$ dreptele QN şi PM sînt înălţimi, deci dreapta AB care trece prin intersecţia lor va fi şi ea înălţime ($AB \perp PQ$).

68. a) Dreapta ME este mediana în $\triangle ADM$ $\frac{\overline{MC}}{ME} = \frac{2}{3}$

Deci baricentrul $\triangle ADM$ coincide cu punctul C.

b) $\frac{\overline{BC}}{ME} = \frac{2}{3}$; $\frac{\overline{AC}}{AF} = \frac{2}{3}$; $\frac{\overline{AB}}{DP} = \frac{2}{3}$

Pentru a arăta ultima egalitate se demonstrează mai întîi că $\overline{DC} = \overline{AB}$ ($\square ACDB$ e paralelogram).

c) Notînd cu $\overline{BH}$ şi $\overline{CL}$ medianele $\triangle ABC$ avem:

$\overline{AD} = 2\overline{AE}$, $MD = 2BH$, $AM = 2CL$ (ultimele două egalităţi rezultă din faptul că $\square BHDF$ şi $\square CLAP$ sînt paralelograme).

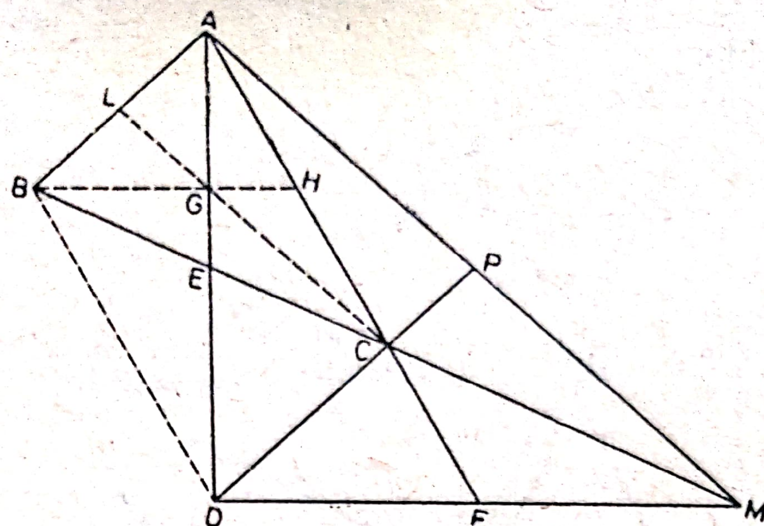


Fig. 7.53.

d) Sumînd inegalitatea $\overline{AB} < \overline{AE} + \overline{BE}$, $\overline{AC} < \overline{CL} + \overline{AL}$, $\overline{BC} < \overline{BH} + \overline{HC}$ se obține $2p < 2\sum m_a$, unde $2p$ este perimetrul $\triangle ABC$ și $\sum m_a$ este suma lungimilor medianelor din ABC. Sumînd inegalitățile $\overline{AD} < \overline{AC} + \overline{CD}$, $\overline{MD} < \overline{CD} + \overline{CM}$, $\overline{AM} < \overline{AC} + \overline{MC}$. Se obține inegalitatea $2p > \sum m_a$.

Ultima inegalitate cerută se obține aplicînd $\triangle ADM$ relațiile de ordine demonstrate pentru $\triangle ABC$. (În fapt se obține o margine a sumei lungimilor medianelor mai strînsă).

69. Fie $O \in AB \cap CD$ și E, F mijloacele segmentelor $\overline{AC}$ și $\overline{BD}$ (fig. 7.54). Proiectăm punctele A, B, C, D, pe dreapta EF în A', B', C', D'.

Avem $\triangle BB'F = \triangle DD'F$ de unde $BB' = DD'$.

La fel $\overline{AA'} = \overline{CC'}$

Mai departe putem scrie $\frac{\overline{IA}}{IB} = \frac{\overline{AA'}}{BB'} = \frac{\overline{CC'}}{DD'} = \frac{\overline{KC}}{KD}$

În primul raport scădem numărătorii din numitorii $\frac{\overline{IA}}{AB} =$

$= \frac{\overline{KC}}{CD}$, de unde ținînd seama de ipoteză, $IA = KC$.

Atunci $\triangle IAA' = \triangle KCC'$ și deci $\sphericalangle A'AA' = \sphericalangle CKC'$ și de aici proprietatea cerută rezultă imediat.

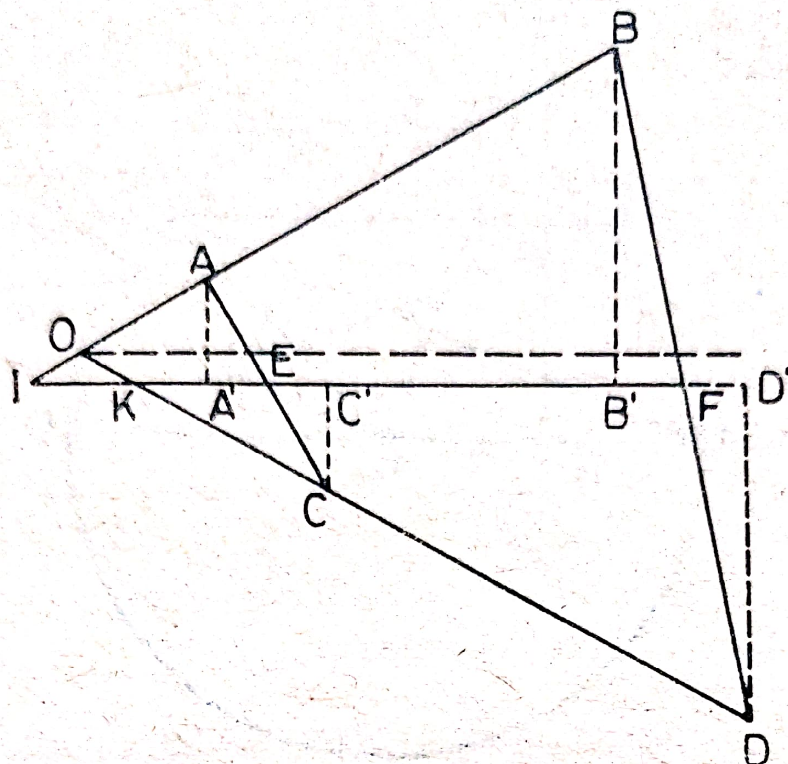


Fig. 7.54.

70. a) Se arată mai întîi uşor că OD şi OE sînt respectiv bisectoare ale $\sphericalangle AOC$ şi $\sphericalangle COB$ şi în consecinţă:
$\sphericalangle EBO + \sphericalangle MAO = \sphericalangle EOB + \sphericalangle ADO = \sphericalangle COE + \sphericalangle DOC =$
$= 90°$, de unde $AMB = 90°$.

b) Avem $AC \parallel OE$ şi deci $\sphericalangle EOB = \sphericalangle CAB = \sphericalangle EBO$, de unde $\widehat{AM} = \widehat{CB}$.

c) Punctele C şi O se află pe cercul de diametru DE întrucît $\sphericalangle DOE = 90°$ şi C e simetricul lui O faţă de DO. De asemenea punctul M se află pe acelaşi cerc întrucît $\sphericalangle DME = 90°$.

71. a) Cercul circumscris $\triangle ABC$ trece şi prin O deci e circumscris şi $\triangle OBC$. Centrul cercului circumscris $\triangle OBC$ se află pe mediatoarea segmentului OB (fix).

b) Centrul cercului înscris se află la intersecţia dreptei OA (bisectoarea $\sphericalangle BAC$) cu dreapta BD (bisectoarea $\sphericalangle CBA$) şi se află pe cercul dat.
Centrul cercului exînscris $\triangle ABC$ (relativ la $\sphericalangle CAB$) se află la intersecţia dreptei OA cu bisectoarea $\sphericalangle CBE$ adică în D' (diametrul opus lui D) şi locul lui geometric este de asemenea cercul dat.

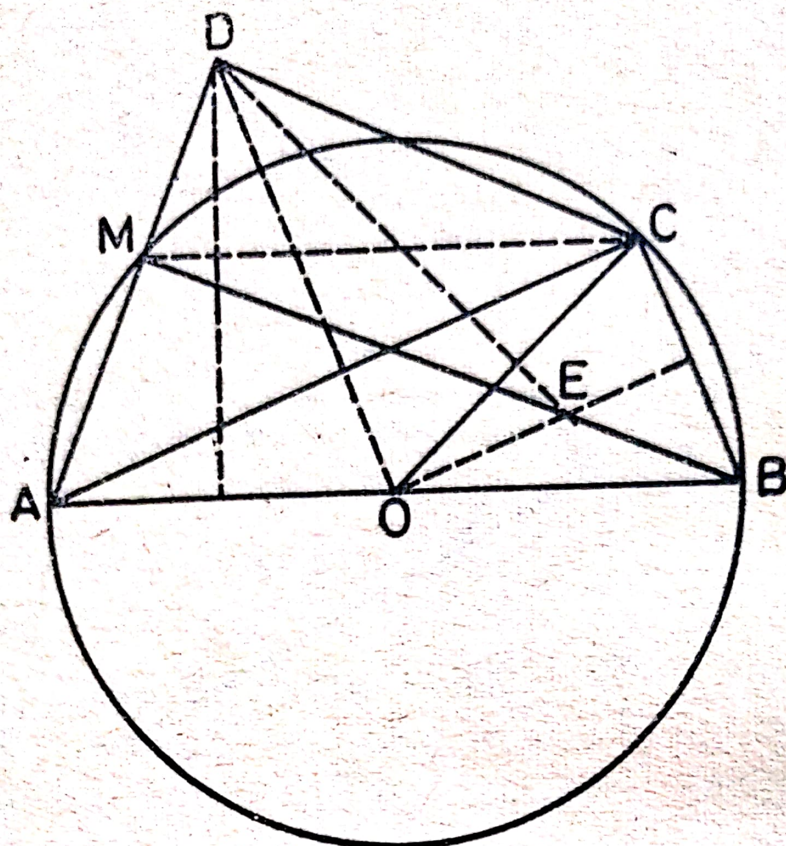


Fig. 7.55.

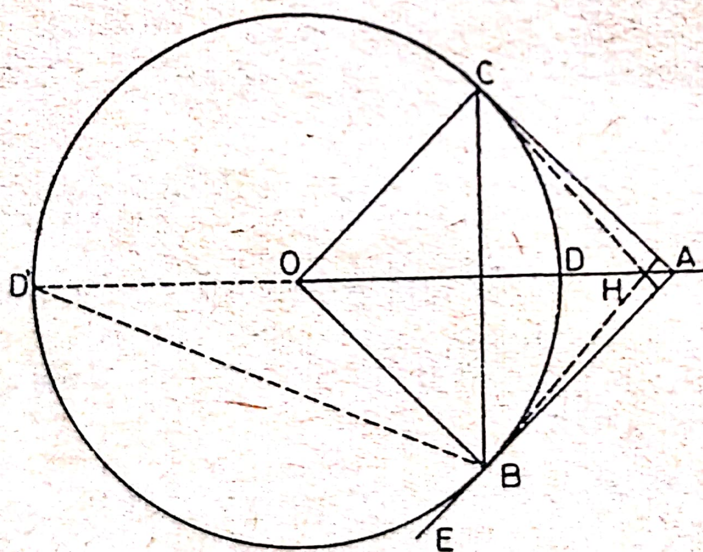


Fig. 7.56.

c) Fie H ortocentrul $\triangle ABC$. Avem $\sphericalangle CHB = 180 - \sphericalangle BAC = \sphericalangle BOC$.

De aici rezultă $\overline{BH} = \overline{OC} = R$ (raza cercului dat), deci locul lui H este un cerc egal cu cel dat, avînd centrul în punctul fix B.

72. Locul geometric căutat este o dreaptă paralelă cu cea dată (a) dusă printr-un punct situat la două treimi de O din segmentul OD, unde $O = (d) \cap BC$ și D e mijlocul lui BC.

Fig. 7.57.

73. Din datele problemei rezultă

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CD}} \quad \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CD}}$$

de unde

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} \text{ și } \overline{CK} = \frac{\overline{CO} \cdot \overline{CB}}{\overline{CA}} = \text{const.}$$

Mai departe

$$\frac{\overline{CI}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CD}} \text{ și } \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CD}} \text{ de unde } \frac{\overline{CI}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \text{ și } \overline{CI} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CO}}{\overline{CB}} =$$
$$= \text{const.}$$

Ducem prin P o paralelă la BD și notăm cu R intersecția ei cu AB. Avem

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{CI}} = \text{const. deci și } \overline{CR} = \text{const.}$$

Locul lui P este un cerc cu diametrul $\overline{BR}$ căci $\sphericalangle BPR = 90°$. În mod analog se găsește locul lui M. (ducînd prin M o paralelă la AD).

74. Pentru a arăta că BE e tangentă cercului circumscris $\triangle ABD$ este suficient să arătăm că $\sphericalangle DBE = \sphericalangle BAD$ (În aceste condiții scriind rapoartele de asemănare din $\triangle BDE \sim \triangle ABE$ se găsește relația $\overline{ED}\,\overline{EA} = EB^2$

$$\sphericalangle DBE = \frac{1}{2}\widehat{EC} = \frac{1}{2}\widehat{BE} = \sphericalangle BAD$$

La fel se arată că
$\sphericalangle ECD = \sphericalangle CAD$ și a doua parte a concluziei este demonstrată.

75. Fie E, F, G, H, M, N mijloacele laturilor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ și $\overline{ON} \parallel \overline{BD}$, $\overline{OM} \parallel \overline{AC}$.

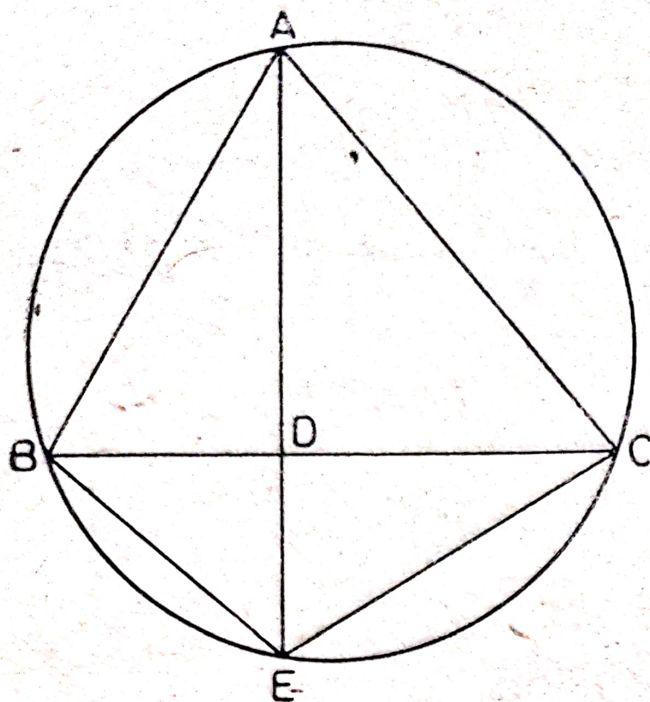


Fig. 7.58.

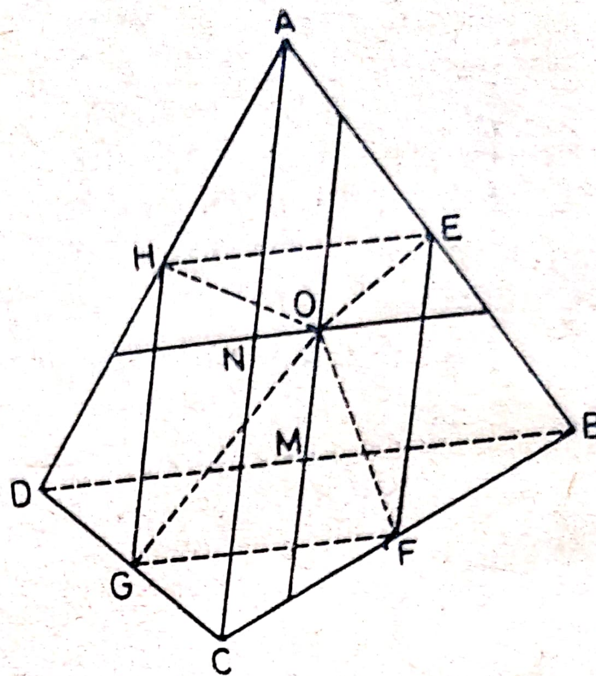


Fig. 7.59.

Distanța de la un punct la o dreaptă o vom nota $d_{B(AC)}$ unde B este punctul și AC dreaptă.
Avem

$$S_{OEBF} = \frac{1}{2}\overline{EF}\ d_{B(OM)} = S_{OGDH} = \frac{1}{2}\overline{GH}\ d_{D(OM)}$$

Dar $\overline{EF} = GH = \frac{1}{2}AC$, $d_{B(OM)} = d_{D(OM)}$ fiindcă $\overline{MB} = MD$.

Atunci $S_{OEBE} = S_{OGDH}$

Pe de altă parte $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\overline{AC}\,(d_{B(AC)} + d_{D(AC)}) = 4S_{OEBF}$

căci $d_{B(CAC)} + d_{D(AC)} = 2d_{B(OM)}$.
În mod analog se arată că

$$S_{OHAE} = S_{OFGG} = \frac{1}{4}\ S_{ABCD}$$

76. a) Se demonstrează ușor că $S_{PAB} + S_{PCD} = \frac{1}{2}\ S_{ABCD}$.

b) Relația cerută rezultă din $d_{B(AP)} + d_{C(AP)} = d_{B(AP)}$ unde cu $d_{B(AP)}$ am notat distanța de la punctul B la dreapta AP.
Această egalitate se demonstrează imediat ducînd o paralelă la AP prin punctul C.

c) Dacă P este între paralelele AD și BC, relația a) devine
$|S_{PAB} - S_{PCD}| = S_{PAD} + S_{PBC}$ iar relația b) devine
$S_{PAC} = S_{PAB} + S_{PAD}$.

Cînd P este în cealaltă porțiune a planului se obțin relații analoage.

77. a) Punctul M se găsește în felul următor: Notînd $d_{M(AB)}$, distanța de la M la AB, cu d_c și celelalte distanțe cu d_a, d_b iar cu a, b, c, lungimile laturilor avem.

$$ad_a = bd_b = cd_c = \frac{2}{3} S_{ABC}$$

Pe de altă parte $ah_a = bh_b = ch_c = 2S_{ABC}$ (h_a, h_b, h_c sînt înălțimile).
De aici rezultă

$$\frac{d_a}{h_a} = \frac{d_b}{h_b} = \frac{d_c}{h_c} = \frac{1}{3}$$

Cu aceasta se găsește cu ușurință punctul M care coincide cu baricentrul triunghiului.

b) Din condițiile problemei rezultă

$$\frac{ad_a}{m} = \frac{bd_b}{n} = \frac{cd_c}{p} = \frac{2S_{ABC}}{m+n+p}, \text{ și}$$

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S_{ABC}, \text{ de unde}$$

$$\frac{d_a}{mh_a} = \frac{d_b}{nh_b} = \frac{d_c}{ph_c} = \frac{1}{m+n+p}$$

și de aici se determină d_a, d_b, d_c și punctul M se construiește cu ușurință.

78. Problema se reduce la găsirea dreptei $MN \parallel AB \parallel DC$ în trapezul $ABCD$ (fig. 60) care să împartă aria S_{ABCD} astfel ca $S_{ABNM} = 2S_{NCDM}$ sau $S_{ABMM} = \frac{2}{3} S_{ABCD}$

Ținînd seama de expresia care dă aria hexagonului regulat obținem

$$S_{ABNM} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

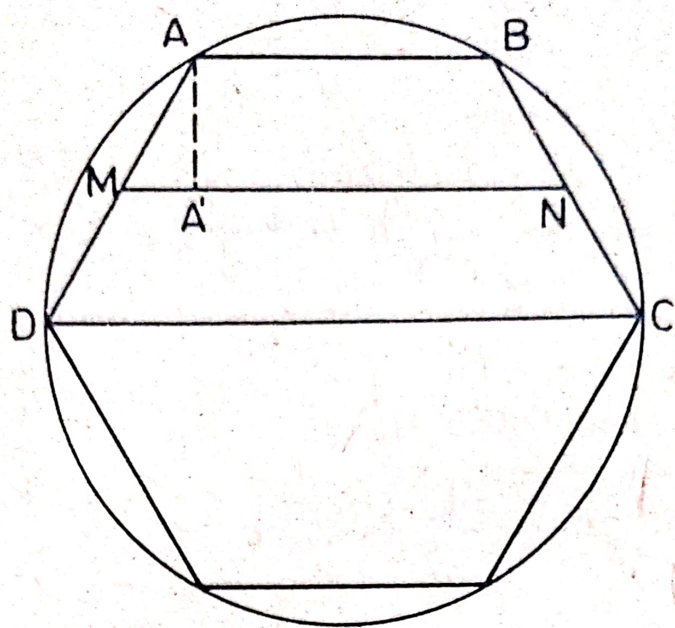


Fig. 7.60.

Dacă notăm $AA' = x$, găsim $\overline{MN} = a + \frac{2x\sqrt{3}}{3}$ și ecuația pentru determinarea lui x va fi $2\sqrt{3x} + 6xa - 3a^2\sqrt{3} = 0$ care ne dă soluția $x = \frac{(3-\sqrt{3})a}{2}$

79. Se duc paralele prin punctul considerat la toate laturile poligonului și se găsește că suma căutată este egală cu suma apotemelor. Mai simplu, se scrie că suma ariilor triunghiurilor cu vîrfurile în punctul considerat și cu bazele, laturile poligonului este egală cu aria poligonului.

80. $S_{ABCD} = S_{AMC} + S_{MBD} + S_{CMD}\ \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{ab\sqrt{3}}{4} = (a^2 + b^2 + ab)\frac{\sqrt{3}}{4}$

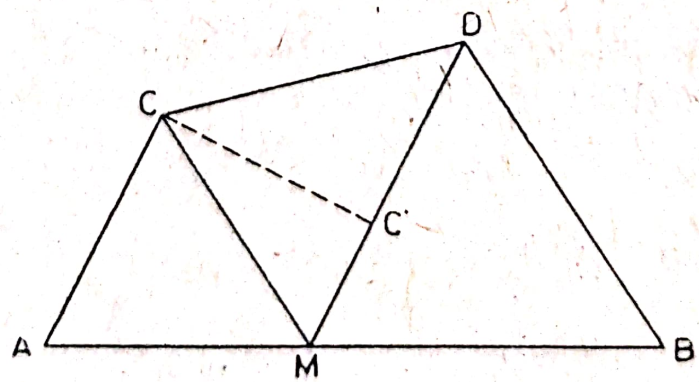


Fig. 7.61.

2. GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

1. Fie $d = P \cap T$ unde T este planul în care se află $\triangle ABC$ (Dat).
Notăm cu $A' = BC \cap d$, $B' = AC \cap d$ $C' = AB \cap d$ (intersecții posibile întrucît $d \in T$).
Întrucît ab și AB aparțin planului SAB ele vor fi concurente într-un punct situat pe d, adică în C' (fig. 7.62). La fel ac și AC sînt concurente în B' și BC și bc sînt concurente în A'.

2. Locul geometric căutat este dreapta paralelă cu dreapta D care trece printr-un punct situat la o treime din distanța de la mijlocul segmentului BC la dreapta D.

3. Proiecția se află în centrul cercului circumscris triunghiului în toate cazurile (Deci cazul c) în mijlocul ipotenuzei.

4. Unghiul cerut α este $\alpha = \text{Arc} \cos \frac{1}{3} (\alpha < 90°)$

Distanța cerută d este $d = \frac{a\sqrt{6}}{12}$

5. a) Proiectăm punctul P pe planul AOB (fig. 7.63) în P' și apoi proiectăm P' pe OA și OB în X și Y.
Se arată mai întîi că
$\sphericalangle XOP > XOP'$ și $\sphericalangle YOP < YOP'$, apoi sumînd aceste inegalități se obține rezultatul cerut.

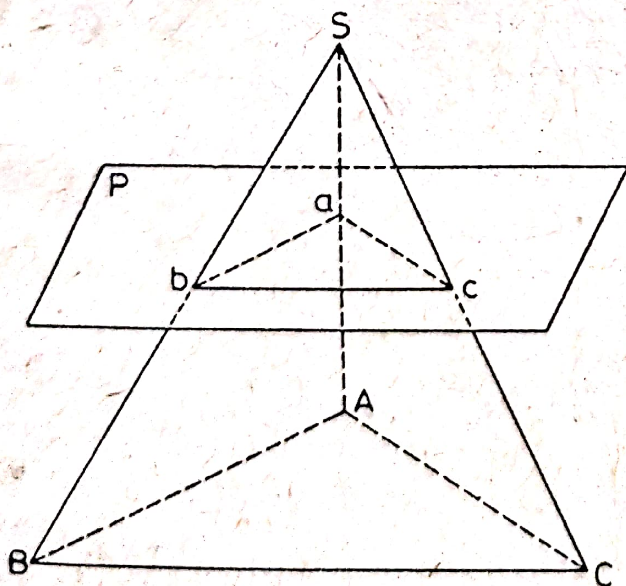


Fig. 7.62.

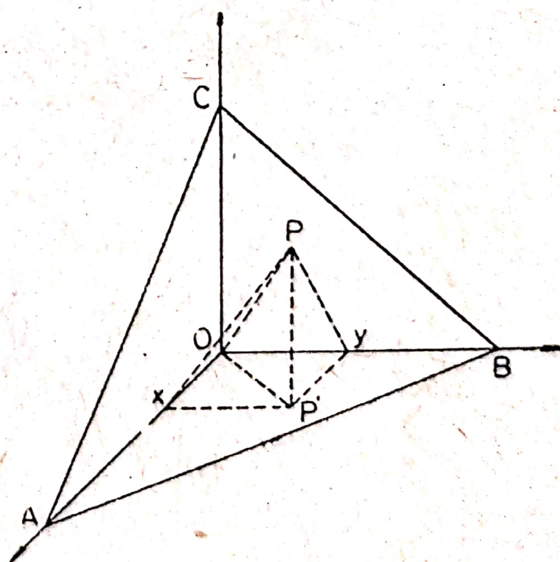


Fig. 7.63.

b) Notînd cu $a = (\widehat{OP,\ pl.\ OBC})$, $b = (\widehat{OP,\ pl.\ OAC})$,

$c = (\widehat{OP\ pl.\ OAB})$ avem $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 2$ (*)

Complementele acestor unghiuri, $\alpha = 90 - a = (\widehat{OA,\ OP})$,

$\beta = 90 - b = (\widehat{OB,\ OP})$, $\gamma = (\widehat{OC,\ OP})$ satisfac relația

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Din relațiile (*) rezultă $\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 1$ și pentru a dovedi proprietatea cerută trebuie arătat că în aceste condiții $a + b + c \leqslant 90°$.

6. Fie O centrul sferei și O' proiecția lui V pe planul ABC. Notăm cu E, F, G, punctele de tangență ale sferei cu muchiile VA, VB și VC și cu M, N, P punctele de tangență cu muchiile AB, BC, CA.
$\triangle OEV = \triangle OFV = \triangle OGV$ și deci $\sphericalangle OVE = \sphericalangle OVF = \sphericalangle OVG$. Se demonstrează apoi că $\triangle AO'V = \triangle BO'V = \triangle CO'V$ și deci $O'A = O'B = O'C$ deci O' este centrul cercului circumscris.
Întrucît $\triangle O'AB$ este isoscel rezultă că M se află la mijlocul lui AB, și în mod analog N la mijlocul lui BC și P la mijlocul lui AC. Atunci O' este și centru al cercului înscris și fiind și centru al cercului circumscris, $\triangle ABC$ e echilateral.

7. Fie $Mm \parallel AC$ în $\triangle ACB$.

Avem în $\triangle MNm$ $\overline{MN} < \overline{Mm} + \overline{mN} = \frac{\overline{AC}}{2} + \frac{\overline{DB}}{2}$ (fig. 7.64).
În mod analog se demonstrează și cea de-a doua inegalitate (ori cînd $Mm' \parallel \overline{AD}$ în $\triangle BAD$).

8. Laturile triunghiului $A'F'C'$ vor fi $\overline{A'C'} = 2a\sqrt{2}$,

$\overline{C'F} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $A'F = \frac{3a}{2}$. Se verifică ușor că $\overline{CF}'^2 = \overline{AF}'^2 + A9C'^2$ și deci $\triangle A'F'C'$ e dreptunghic ($A' = 90°$).
Prelungind $A'F$ și FC' pînă la întîlnirile în I și J respectiv cu AB și BC se poate calcula cu ușurință $AI = \frac{3a\sqrt{5}}{2}$,

$CJ = \frac{a\sqrt{5}}{6}$. Apoi se duce dreapta ID în planul bazei care întîlnește pe BC în J'. Din $\triangle IAD \sim \triangle DCJ'$ se calculează ușor $CJ = \frac{a\sqrt{5}}{6}$ deci $J = J'$ și atunci $D \in pl\ A'FC'$.

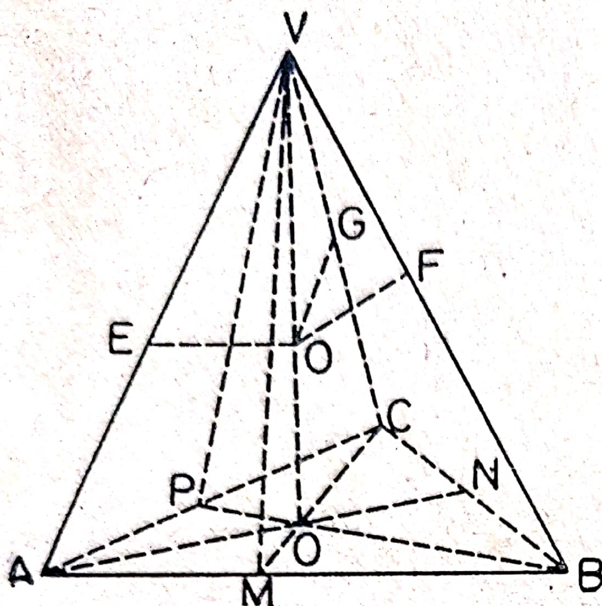


Fig. 7.64.

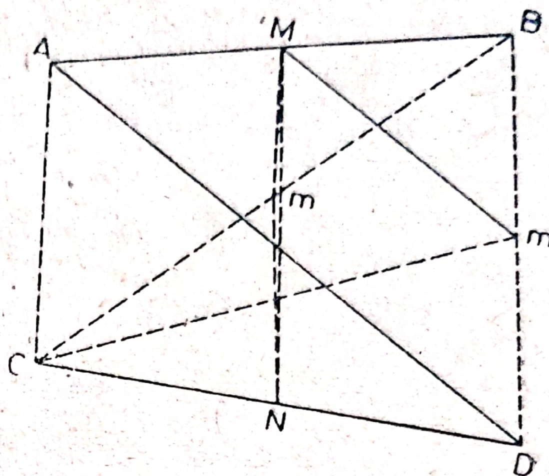


Fig. 7.65.

Calculele simple ne conduc la determinarea suprafeței totale și a volumului, cerute găsindu-se $S = a^2(1 + 4\sqrt{5} + 3\sqrt{2})$, $V = 2a^3$.

9. Condiția necesară și suficientă pentru ca $\triangle ADE$ să fie dreptunghic în D este ca $2x(x - y) + a^2 = 0$. Volumul prismatoidului $ABCDA$ calculat în condițiile cerute va fi

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{24}\left(4x + \frac{a^2}{x}\right).$$

10. Planele ABC_1, BCA_1 și CAB_1 se intersectează într-un punct P. Deoarece dreapta $CC_2 \in pl\ CBA_1 \cap pl\ CAB_1$, dreapta $AA_2 \in pl\ ABC_1 \cap pl\ ACB_1$ și dreapta $BB_2 \in pl\ BAC_1 \cap pl\ BCA_1$ rezultă că ele vor avea ca punct comun punctul P.

11. Dreapta de intersecție a planelor MNP și ABC este determinată de punctele $A_2 \in BC \cap NP$, $B_2 \in AC \cap MP$, $C_2 \in AB \cap MN$. Unghiul cerut este $\widehat{BA_2N} = \alpha = \text{Arc tg}\,\frac{b}{2a}$. Distanțele cerute sînt

$$\overline{AA_3} = \frac{ab}{\sqrt{4a^2 + b^2}} \cdot \overline{BB_3} = \frac{3ab}{2\sqrt{4a^2 + b^2}} \cdot \overline{CC_3} = \frac{ab}{2\sqrt{4a^2 + b^2}}$$

$\triangle MNP$ e isoscel și $S_{MNP} = \frac{a\sqrt{3}}{8} \cdot \sqrt{4a^2 + b^2}$

Pentru a demonstra că planul MNP taie sfera circumscrisă prismei date după un cerc mare se arată că acest plan conține mijlocul segmentului care unește centrele bazelor.

12. $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{AV} = c$. Avem $\overline{VB} \perp \overline{BC}$ (teorema celor trei perpendiculare)
$\overline{VD} \perp \overline{DC}$ (fig. 7.66) $\overline{AN} \perp \overline{DC}$, $\overline{AN} \perp \overline{VD}$ (ipoteză).
Deci $\overline{AN} \perp$ planul (VCD).
Analog $\overline{AM} \perp pl\ VBC$.
Rezultă $\overline{VC} \in pl\ VCD \cap pl\ VBC \perp pl\ AMN$.

$$\overline{VD} = \sqrt{b^2 + c^2},\quad \overline{VB} = \sqrt{a^2 + c^2},\quad \overline{AM} = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}},\quad \overline{AN} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Fie $P \in \overline{VC} \cap pl\ AMN$, $\triangle VBC \sim \triangle VPM$, de unde

$$\frac{\overline{MP}}{b} = \frac{\overline{VM}}{VC} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \to \overline{MP} = \frac{bc^2}{\sqrt{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}}$$

Analog $\overline{PN} = \dfrac{ac^2}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2)}}$

Perimetrul cerut va fi deci

$$P = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}}\right)$$

Unghiul celor două plane va fi egal cu cel al normalelor lor,

adică cu $\sphericalangle CAV = \varphi = \text{Arc tg}\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c} = \text{Arc tg}\sqrt{3} = 60°$.

13. Fie laturile bazei $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ și unghiurile fețelor laterale

$$\sphericalangle SMO = \alpha; \quad \sphericalangle SNO = \beta$$

$\sphericalangle SPU = \gamma$ $(SO \perp pl\ ABC)$ fig. 6. Avem $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{SO}{OM}$, $\text{tg}\ \beta =$

$= \dfrac{\overline{SO}}{ON}$, $\text{tg}\ \gamma = \dfrac{\overline{SO}}{OP}$ și în plus $S_{ABC} = \overline{OM}a + \overline{OM}, b + \overline{OP}c$
de unde

$$V_{ABC} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{3(a\ \text{ctg}\ \alpha + b\ \text{ctg}\ \beta + c\ \text{ctg}\ \gamma)} \quad \left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

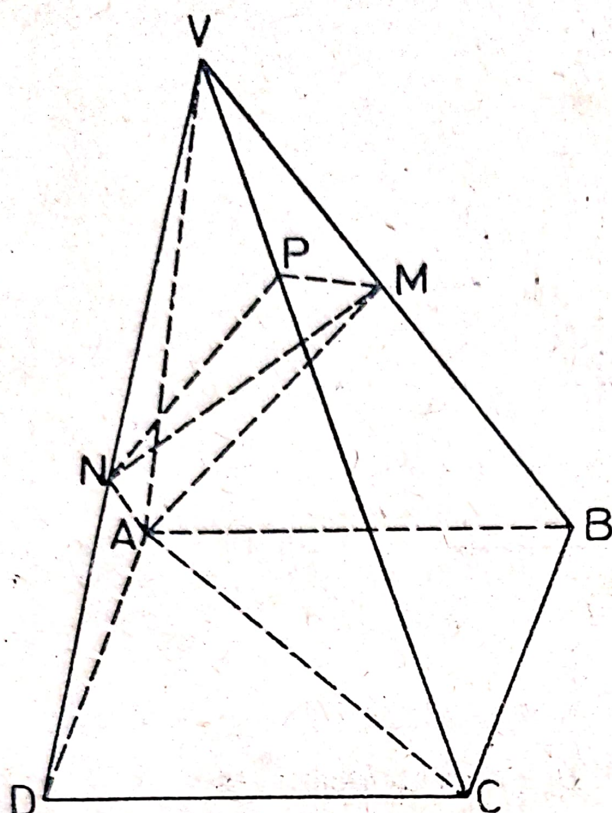


Fig. 7.66.

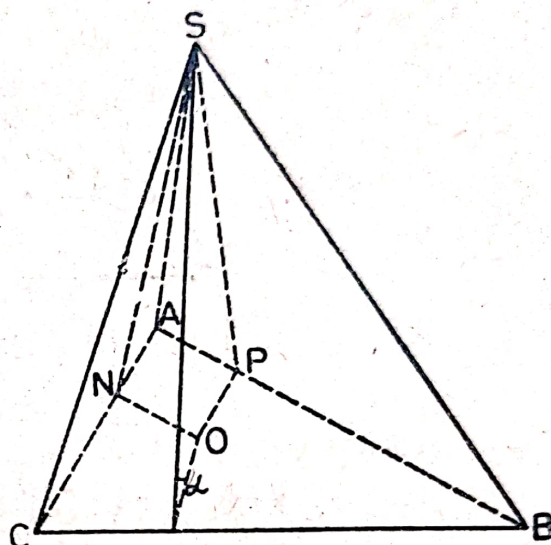


Fig. 7.67.

14. Suprafața bazei este $S_B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, iar înălțimea $H = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha$ deci volumul $V = \dfrac{a^3}{24}\operatorname{tg}\alpha$ iar suprafața laterală $S_l = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$

15. Avem imediat (fig. 7) $\overline{AD} = a$, $\overline{HG} = \dfrac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$,

$$\overline{SG} = \frac{a}{2\cos\alpha}$$

$\overline{LH} = \dfrac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ și apoi din $\triangle SEF \sim \triangle SBC$ se arată $\overline{EF} = a\left(1 - \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\right)$. Secțiunea a cărei arie se cere este un trapez $ADEF$ ale cărui elemente necesare pentru calculul ariei au fost deja obținute.

16. R: $S_t = \dfrac{a^2}{4}(8+\sqrt{3}+\sqrt{19})$, $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$, $x = \dfrac{4a}{3}$

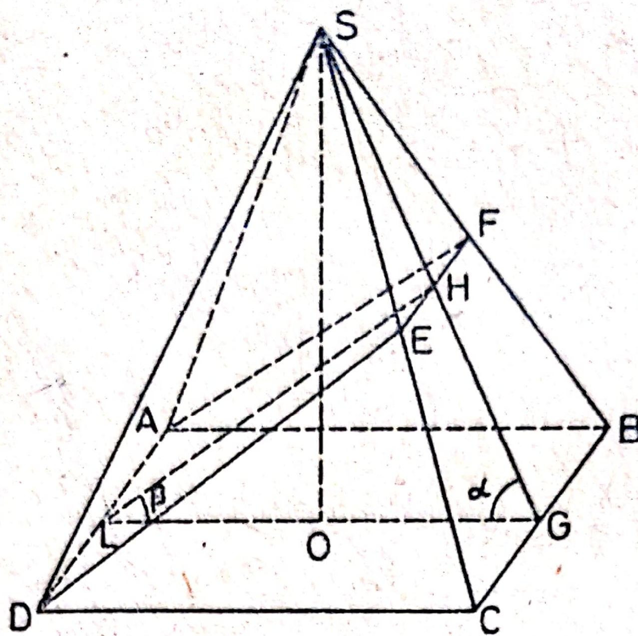


Fig. 7.68.

17. R : $\overline{BC} = a\sqrt{2}$, $\overline{VC} = a\sqrt{3}$, $VA = a\sqrt{2}$. Pentru a demonstra că $MN \perp AV$, $MN \perp BC$ se calculează laturile MA, NA, VM, VN, BN și BM și se utilizează teorema lui Pitagora $\overline{MN} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

18. Fie planul $PQRS \parallel BC$ și pl $PQRS \parallel VA$ (fig. 7.69). Avem $RQ \parallel VA$, $SP \parallel VA$ deci $PQ \parallel SP$, $PQ \parallel BC$, $SR \parallel BC$ deci $PQ \parallel SR$ și patrulaterul $PQRS$ e paralelogram.

Notăm $\alpha = \sphericalangle PQR$ și $\dfrac{\overline{QR}}{VA} = k = \dfrac{\overline{CQ}}{CA}$ $\dfrac{\overline{PQ}}{BC} = \dfrac{\overline{AQ}}{AC} = \dfrac{\overline{AC} - \overline{QC}}{AC} =$ $= 1 - k$. Aria paralelogramului cerut va fi $\overline{PQ} \cdot \overline{QR} \sin \alpha =$ $= BC\,(1 - k) \cdot k\,\overline{VA} \sin \alpha$ și va fi maxim cînd va fi maxim produsul $k\,(1 - k)$ adică pentru $k = \dfrac{1}{2}$ (α în condițiile problemei rămîne constant).

19. Avem prin ipoteză $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = a$, $\overline{VO} = h$ (fig. 7.70). Notînd cu π planul secțiunii din enunț avem evident : $Q \in \overline{MN} \cap AC \in \pi$ $H \in PQ \cap SO \in \pi$; pl $SBD \parallel MN$ deci pl $MNP \cap$ pl $SBD \parallel BD$.
Fie $RT \in$ pl $MNP \cap$ pl SBD, ($R \in SB$, $T \in SD$).

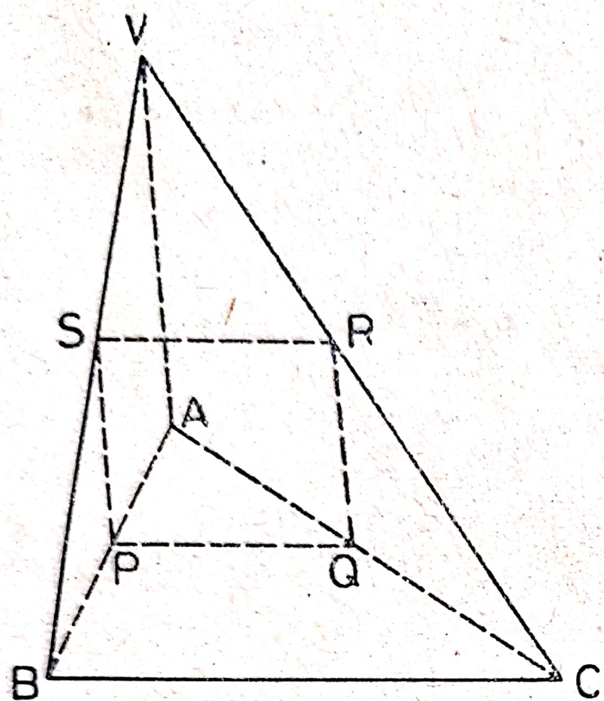


Fig. 7.69

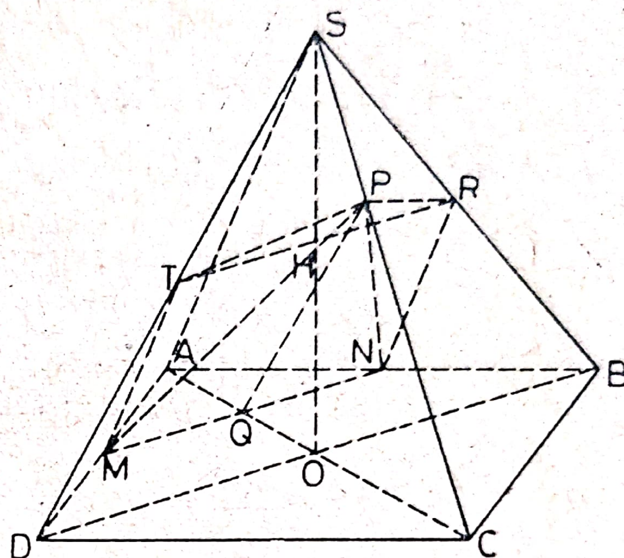


Fig. 7.70.

Secțiunea piramidei cu planul π va fi pentagonul $MNRPT$.
Aria lui $A_{MNPRT} = \frac{\overline{TR} + \overline{MN}}{2} \overline{QN} + \frac{\overline{TR}}{2} \cdot \overline{MP} = \frac{a\sqrt{2}}{4}\sqrt{h^2 + 2a^2}$

Cele două corpuri în care este împărțită piramida de planul π sînt compuse;
— corpul $SMNRPT$ din piramidele $SMNRPT$ și $SAMN$.
— corpul rămas din piramidele $CMNRPT$, $RNBC$ și $TBMC$. Piramidele $SMNRPT$ ș $CMNRPT$ sînt echivalente avînd baza comună și înălțimile egale (din cauza relației $\overline{SP} = \overline{PC}$). Mai departe $A_{AMN} = \frac{1}{2} A_{NBC}$ iar înălțimea piramidei $SAMN$ este de patru ori înălțimea piramidei $RNBC$. Din aceste considerații rezultă fără dificultăți rezultatul cerut.

20. $S_l = \frac{nm^2}{2} \sin 2\alpha$, $S_t = nm^2 \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\sin\left(\frac{180°}{n} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{180}{n}}$

$$V = \frac{1}{3} nm^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{180^\circ}{n} + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{180^\circ}{n} - \frac{\alpha}{2}\right)}}{\sin \frac{180^\circ}{n}}$$

unde m e muchia laterală a piramidei egală cu

$$m = \rho \frac{\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{n} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{180^\circ}{n} - \frac{\alpha}{2}\right)}}$$

21. Răspuns : $S_l = nA^2 \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$, $S_t = 2n\, A^2 \cos \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ $\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$.

22. Notînd cu R raza sferei, cu r și h respectiv, raza bază și înălțimea cilindrului, avem din ipoteză $R^2 = rh$. Din relația

$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \text{ se obține acum } \frac{h}{r} = 2.$$

$$\frac{V \text{ sferă}}{V \text{ cilindru}} = \frac{4\pi R^3}{\pi r^2 h} = 4 \frac{R}{r} = 4 \sqrt{\frac{h}{r}} = 4\sqrt{2}$$

Raza sferei cînd se dă aria totală a cilindrului este $R = 2\sqrt{2}$.

23. Notăm cu r raza cercului de contact și fie VAB o secțiune în sferă și con cu un plan dus prin centrul sferei și vîrful conului $\triangle VAB$ e echilateral și cercul mare al sferei a înscris în acest triunghi. Rezultă atunci $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Aria calotei DFC (fig. 10 va fi πR^2 iar cea a calotei DEC va fi πR^2. Raportul : $\frac{1}{3}$

24. Fie o secțiune axială prin centrele celor două sfere și prin înălțimea trunchiului de con, ca în fig. 7.72. Din ipoteză avem $\overline{EB} = R_1$, $\overline{O_1G} = r$, $\overline{FC} = R_2 \overline{O_2A} = R$
Avem evident :

$$\overline{AC} = \sqrt{4r^2 + (R + R_1)^2},\ \overline{AD} = R_1 + R_2,\ \overline{DC} = 2R_2.$$

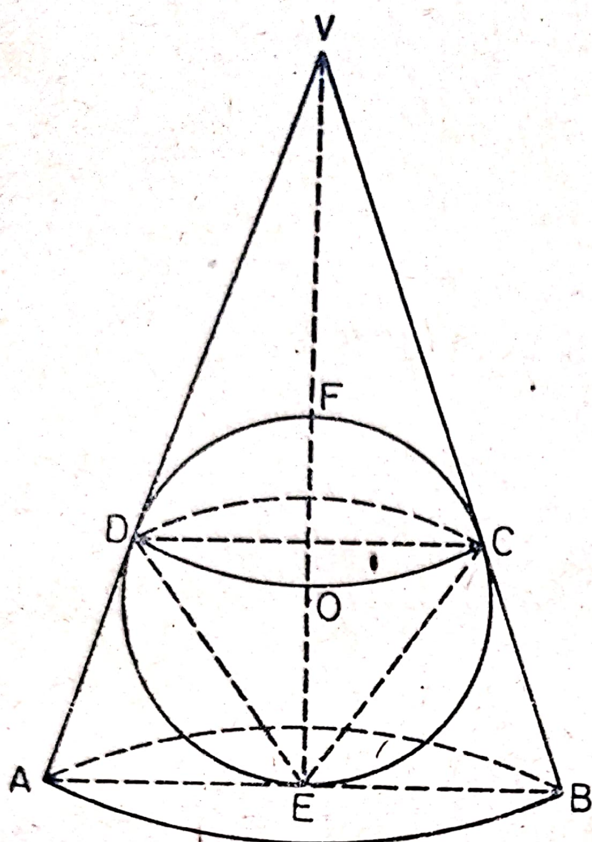


Fig. 7.71.

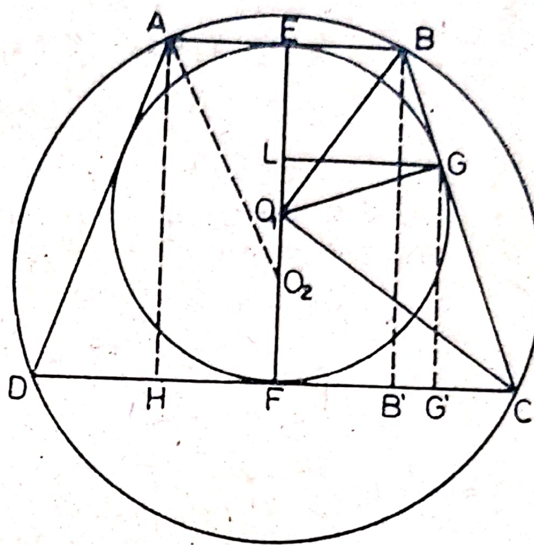


Fig. 7.72.

$A_{ADC} = 2rR_2$ şi cum R e raza cercului circumscris $\triangle ADC$ avem

$$R = \frac{(R_1 + R_2)\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + 4r^2}}{4r}$$

Apoi avem $\overline{EO_2^2} = R^2 - R_1^2 = \frac{(R_2 - R_1)^2 + 4r^2}{4r} = \frac{R_2^2 - R_1^2}{4r} +$ $+ r$ şi deci $\overline{O_1O_2} = \overline{O_2E} - r = \frac{R_2^2 - R_1^2}{4r}$.

Din $\triangle GCG' \sim \triangle BCB'$ avem imediat $\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2 - \rho}{R_2 - R_1}$ de unde $\rho = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}$ sau $\frac{2}{\rho} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

25. **Notînd cu** x, y, z, **respectiv** dimensiunile bazei şi înălţimea **paralelipipedului, avem :**

$xy = 4$; $x + y + z = 10$ şi $S = 8 + 2(x + y)z = \text{maxim}$.

Aria S o mai putem scrie $S = 8 + 2(x + y)\left(\frac{10 - (x + y)}{2}\right) =$
$= 8 - 2(x + y)^2 + 20(x + y)$ și este minim pentru $x +$
$+ y = 5$
Aceasta dă $x = 4$, $y = 1$ (sau invers) și $z = 5$.

3. GEOMETRIE ANALITICĂ

1. ABC, un triunghi, AB, Ox; înălțimea din $A(2a, 0)$, $B(2b, 0)$, $C(0, 2c)$. Urmează $A'(b, c)$; $B'(a, c)$, $C'(a + b, 0)$
Cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ b^2 + c^2 & b & c & 1 \\ a^2 + c^2 & a & c & 1 \\ (a + b)^2 & a + b & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ b^2 + c^2 & b & c & 1 \\ a^2 - b^2 & a - b & 0 \\ 2ab + b^2 - c^2 & b - c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$c(x^2 + y^2) + (ab - c^2)\, y - c\,(a + b)x = 0$$

D este la intersecția dreptelor

$$cx + by - 2bc = 0$$
$$bx - cy - 2ab = 0$$

Coordonatele lui sînt: $2b\,\frac{ab + c^2}{b^2 + c^2}$, $2bc\,\frac{b - a}{b^2 + c^2}$

Coordonatele lui E, analog, sînt
$2a\,\frac{ab + c^2}{a^2 + c^2}$, $2ac\,\frac{a - b}{a^2 + c^2}$ (se permută a și b în coordonatele lui D).
Calculul arată că D și E se află pe cerc.
Coordonatele lui H sînt date de

$$bx - cy - 2ab = 0 \text{ și } x = 0, \text{ deci } \left(0, -\frac{2ab}{c}\right)$$

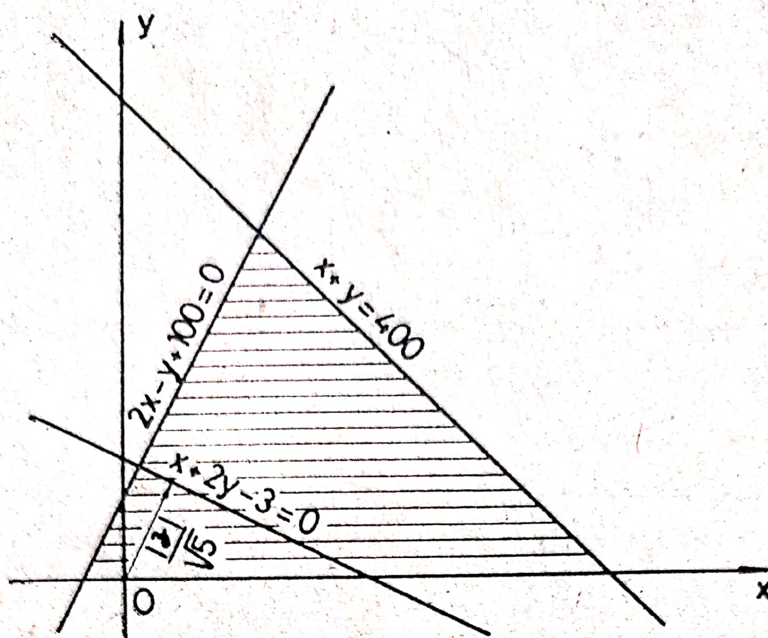


Fig. 7.73.

Rezultă prin mijloacele segmentelor AH, BF, CH, coordonatele :
$\left(a, -\frac{ab}{c}\right)$, $\left(b, -\frac{ab}{c}\right)$, $\left(0, \frac{c^2-2ab}{2c}\right)$. Se verifică uşor că toate aceste puncte sînt pe cerc.

2. Fie x *ha* aria afectată culturii A şi y *ha* aria afectată culturii. B. Condiţiile problemei conduc la $x + y \leqslant 400$, $y \leqslant 2x + 100$, $0 \leqslant x$, $0 \leqslant y$. În sistemul de coordonate xOy mulţimea punctelor (x, y) care satisfac aceste condiţii este reprezentată în figura alăturată.

Problema revine la a găsi punctul (x, y) în regiunea haşurată astfel ca $z = x + 2y$ să fie maximă. Pentru un z fixat, ecuaţia $x + 2y - z = 0$ reprezintă în planul xoy o dreaptă a cărei distanţă la origine este $d = \frac{|z|}{\sqrt{5}}$. De aici se vede că $|z|$ este maxim atunci cînd d este maxim, în concluzie z are valoare maximă pentru (x, y) verificînd sistemul $x + y = 400$, $y = 2x + 100$ a cărui soluţie este $x = 100$, $y = 300$. Beneficiul maxim este $z_{max} = 700$ milioane.

3. Fascicolul de cercuri tangente în I (2,2) la bisectoare 1 are ecuaţia

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + 2(x-y) = 0$$

Un cerc al fascicolului taie pe Ox în punctele ale căror abcise sînt date de

$$x^2 - (4 - \lambda)x + 8 = 0$$

Avem $x_1 + x_2 = 4 - \lambda$, $x_1 \cdot x_2 = 8$, $x_2 - x_1 = 2$. Urmează $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (4 - \lambda)^2 - 32 = 4$. Deci $4 - \lambda = \pm 6$, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = -2$

4. Luînd originea în punctul dat, ecuația unuia din cercurile din problemă este de forma

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + c = 0,$$

cu α și β variabili și c, constant.
Ecuația cercului dat fiind

$$x^2 + y^2 - 2a_1x - 3b_1y + c_1 = 0$$

condiția de ortogonalitate se scrie

$$a_1\alpha + b_1\beta = \frac{1}{2}(c_1 + c)$$

Locul geometric cerut este, deci dreapta

$$2a_1x + 2b_1y - c_1 - c = 0$$

5. Centrul cercului cerut este centrul radical al cercurilor

$$x^2 + y^2 - 6x - 15 = 0,\ x^2 + y^2 + 2y - 15 = 0,$$
$$(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 0$$

Două axe radicale sînt

$$3x + y = 0,\ 5x - 3y - 28 = 0$$

Coordonatele centrului radical : $2, -6$
Patratul razei cercului cerut este $(5 - 2)^2 + (-4 + 6)^2 = 13$. Ecuația cercului căutat este, deci $x^2 - y^2 - 4x + 12y + 27 = 0$

6. Fie $C_1(2, 1)$, $C_2(-2, -1)$ centrele celor două cercuri date și P_1 P_2 punctele de unde se pot duce tangente comune la cele două cercuri. Însemnînd $r_1 = 1$ și $r_2 = 3$, razele celor două cercuri, avem

$$\left(\frac{P_1C_1}{P_1C_2}\right) = -\frac{r_1}{r_2} = -\frac{1}{3},\ \left(\frac{P_2C_1}{P_2C_2}\right) = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$$

Rezultă pentru coordonatele punctelor P_1 şi P_2;

$$x_1 = 1, \qquad y_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 4, \qquad y_2 = 2$$

Ecuaţia tangenţială a cercului (C_1) este $(2u + v + w)^2 = u^2 + v^2$ şi a punctului P_1 este $2u + v + 2w = 0$. Rezolvînd acest sistem aflăm $u = 3$, $v = 4$, $w = -5$ şi $u = 1$, $v = 0$, $w = -1$.

Cele două tangente comune duse din P_1 sînt, deci,

$$3x + 4y - 5 = 0 \text{ şi } x - 1 = 0$$

Pentru punctul P_2 avem sistemul $(2u + v + w)^2 = u^2 + v^2$, $4u + 2v + w = 0$ care dă soluţiile

$$u = 0,\ v = 1,\ w = -2;\ u = 4,\ v = -3,\ w = -10$$

Cele două tangente comune duse din punctul P_2 sînt, deci

$$y = 2 = 0,\ 4x - 3y = 10 = 0$$

7. Luînd originea în A, AB ca axă Ox şi perpendiculara în A pe AB ca axă Oy, ecuaţia cercului se scrie

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

Dreapta d are ecuaţia

$$x = b$$

Dreapta AP are o ecuaţie de forma

$$y = mx$$

Coordonatele lui P sînt (b, mb); ale lui

$$H: \left(\frac{2a}{1 + m^2}, \frac{2am}{1 + m^2}\right)$$

Dreapta BH are ecuaţia

$$x + my - 2a = 0$$

Coordonatele lui Q sînt $\left(b, \frac{2a - b}{m}\right)$

Avem $CP \cdot CQ = mb \cdot \frac{2a - b}{m} = b(2a - b) = Ct.$

Dreapta AQ are ecuația

$$y = \frac{2a - b}{mb} x \cdot$$

Coordonatele lui K sînt $\left(\frac{2ab^2m^2}{b^2m^2 + (2a - b)^2}, \frac{2abm(2a - b)}{b^2m^2 + (2a - b)^2}\right)$

P, K, B sînt coliniare:

$$\begin{vmatrix} b & mb & 1 \\ 2ab^2m^2 & 2abm(2a - b) & b^2m^2 + (2a - b)^2 \\ 2a & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2ab^2(2a - b)m + 2abm[b^2m^2 + (2a - b)^2] - 4a^2b(2a -$$

$$- b)m - 2ab^3m^3 = 0$$

Ecuația dreptei HK este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2a & 2am & 1 + m^2 \\ 2ab^2m^2 & 2abm(2a - b) & b^2m^2 + (2a - b)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Punctul de intersecție cu Ox este dat de

$$4amx(b - a)(bm^2 + b - 2a) = 4a^2bm(2a - b - bm^2),$$

$$x = \frac{ab}{a - b}$$

și nu depinde de m.

Toate aceste rezultate se pot ușor obține pe cale de geometrie elementară.

Fig. 7.74.

8. Luînd punctul O ca pol și transformînd figura prin inversiune, problema se reduce la a arăta că dacă luăm un punct O, o dreaptă d și trei puncte A, B, C pe dreapta d, perpendicularele în A, B, C, respectiv, pe OA, OB și OC se taie două cîte două pe un cerc ce trece prin O. Se demonstrează

ușor că patrulaterul $\alpha\beta\gamma O$ (vezi figura 7.74) este inscriptibil, elementar sau analitic luînd originea în O și perpendiculară din O pe d ca axă Ox.

9. Ecuația cercului ABC este de forma $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$. Condițiile ca acest cerc să treacă prin A, B, C, formează sistemul $-2m + p + 4 = 0$, $4m + p + 16 = 0$, $7n + p + 49 = 0$ cu soluția $m = -2$, $n = -\frac{41}{7}$, $p = -8$.

Ecuația cercului ABC este $x^2 + y^2 - 2x - \frac{41}{7} y - 8 = 0$

b) Centrul cercului tangent în B la AB și care trece prin D se află pe perpendiculara în B la AB și pe mediatoarea segmentului BD; se obține $\left(\frac{\lambda - 2}{2}, \frac{-\lambda - 2}{7}\right)$. Raza cercului este $\frac{|\lambda + 2|}{14}\sqrt{53}$. Ecuația cercului tangent în B la AB și care trece prin D este $x^2 + y^2 - (\lambda - 2)x + $

$$+ \frac{2}{7}(\lambda + 2)y - 2\lambda = 0$$

Analog ecuația cercului tangent în C la AC și care trece prin D este $x^2 + y^2 - (\lambda + 4)x - 4\frac{\lambda - 4}{7} y + 4\lambda = 0$

c) Eliminînd pe λ între cele două ecuații se obține $y = 0$, $7x^2 + 7y^2 - 14x - 41y - 56 = 0$ adică dreapta AB (descrisă de D) și cercul ABC (descris de punctul de intersecție a cercurilor, diferit de D).

10. a) Fie $y = mx$ o dreaptă variabilă prin origine. Aceasta intersectează cercurile în punctele diferite de origine, $P\left(\frac{6}{1 + m^2}, \frac{6m}{1 + m^2}\right) \cdot Q\left(\frac{10}{1 + m^2}, \frac{10\,m}{1 + m^2}\right)$. Tangentele în P și, respectiv, Q la cele două cercuri au ecuațiile

$$\frac{6}{1 + m^2}x + \frac{6m}{1 + m^2}y - 3\left(x + \frac{6}{1 + m^2}\right) = 0$$

$$\frac{10}{1 + m^2}x + \frac{10\,m}{1 + m^2}y - 5\left(x + \frac{10}{1 + m^2}\right) = 0$$

și au, deci coeficienții unghiulari egali cu $\frac{2m}{m^2 - 1}$

b) Mijlocul M al segmentului PQ este

$M\left(\frac{8}{1+m^2}, \frac{8m}{1+m^2}\right)$. Eliminînd pe m între cele două coordonate se obține locul geometric al punctului M. Cercul $x^2 + y^2 - 8x = 0$

311. a) Fie dreptele $y = \frac{b}{a}(x + p)$, $y = -\frac{b}{a}(x + r)$ paralele cu asimptotele a căror intersecție să fie $P(x, y)$. Atunci $p = -x + \frac{a}{b}y$, $r = -x - \frac{a}{b}y$(1). Aceste paralele taie hiperbola în punctele M și N de coordonate $x = = \frac{-a^2 - r^2}{r}$, $y = -\frac{ba}{r}$ respectiv $x = -\frac{a^2 - p^2}{p}$, $y = +\frac{ba}{p}$. Condiția de coliniaritate a punctelor M, N, O conduce la $p^2r^2 = a^4$(2). Eliminînd pe p și r între (1) și (2) găsim locul geometric căutat $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$, hiperbola conjugată celei date.

b) Condiția ca dreapta MN să fie paralelă cu axa Oy este ca $\frac{a^2 + r^2}{r} = \frac{a^2 + p^2}{p}$ care conduce la condiția $r - p = 0$ și deci P descrie axa Px. Analog în cazul în care MN rămîne parabolă cu axa Ox, P descrie axa Oy.

312. a) Luăm pe OB ca axa Ox și perpendiculara în O pe OB ca axa Oy.
Fie $B(a, o)$ și $y = a(x - a)$ ecuația dreptei (Δ).
Dreptele OA și OC trebuie să fie de ecuații

$$OC \equiv y = px, \; OA \equiv y = -px.$$

Coordonatele lui A se găsesc din sistemul

$$y = m(x - a)$$
$$y = -px$$

De unde obținem $y_A = +\frac{ma \cdot p}{m + p}$. Coordonatele punctului C se obțin din sistemul

$$y = px$$
$$y = m(x - a)$$

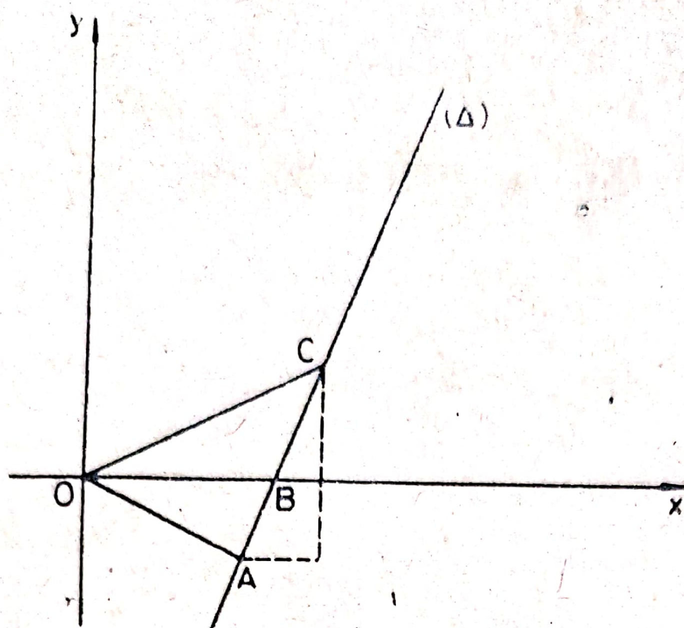


Fig. 7.75.

și prin urmare $x_c = \frac{ma}{m-p}$. Dreptele de la a) se taie în punctul de coordonate $\left(\frac{ma}{m-p}, -\frac{map}{m+p}\right)$. Găsim locul geometric al acestui punct eliminînd parametrul p între relațiile

$$x = \frac{ma}{m-p}, \quad y = -\frac{map}{m+p}. \text{ Se obține}$$

$$2mxy + m^2ax - may - m^2a^2 = 0$$

care este o hiperbolă.

b) Se elimină p între relațiile

$$y + \frac{map}{m+p} = p\left(x + \frac{ma}{m+p}\right), \quad y - \frac{pma}{m-p} = -p\left(x - \frac{ma}{m-p}\right)$$

13. a) Fie coordonatele punctelor M și N, $M(\alpha_1, \sqrt{2p\ \alpha_1})$, $N(\alpha_2, \sqrt{2p\ \alpha_2})$

Ecuația dreptei MN este $x - \frac{\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{2p}}, \ y + \sqrt{\alpha_1\ \alpha_2} = 0$

iar coordonatele punctului P sînt

$$x_P = p + (\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})^2 - \sqrt{\alpha_1\alpha_2}, \quad y_P = -\frac{\sqrt{2\alpha_1\alpha_2}}{p}(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})$$

Ecuația parabolei pe care se află P este $(*) \cdot x = p + \frac{p^2}{2a^2} - a$ unde a e abscisa lui I.

b) Punctul $F(p, 0)$ trebuie să verifice ecuația parabolei (x) și pentru aceasta $a = 0$ deci I trebuie luat în origine.

14. Fie parabola $y^2 = 2px$. Tangenta în vîrf este dreapta $x = 0$. Fie $P(\alpha, \beta)$. Ecuația unei tangente din P la parabolă este de $y = mx + \frac{p}{2m}$ unde $\beta = m\alpha + \frac{p}{2m}$. Segmentul determinat de axa Oy de cele două tangente are lungimea $l = \frac{p}{2}\left|\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right|$ unde m_1 și m_2 sînt rădăcinile ecuației $2m^2\alpha - 2m\beta + p = 0$.
Rezultă

$$|m_1 - m_2| = [(m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2]^{1/2} = \left[\frac{\beta^2 - 2p\alpha}{\alpha^2}\right]^{1/2}$$

$$|m_1m_2| = \frac{p}{2|\alpha|}$$

și deci

$$l = \frac{p}{2} \frac{[\beta^2 - 2p\alpha]^{1/2}}{\frac{p}{2}}$$

adică $\beta^2 - 2p\alpha = l$. Locul geometric al punctului P este o parabolă.

15. a) Ecuația dreptei AB este $y = m\left(x - \frac{l}{2}\right)$ cu $m = \operatorname{tg}\alpha$

Se găsește $AB = 2p \cdot \frac{1 + m^2}{m^2}$ și cum $\sin^2\alpha = \frac{m^2}{1 + m^2}$ relația $AB \sin^2\alpha = 2p$ se verifică.

b) Ținînd seama de punctul a) $\frac{1}{AB} = \frac{\sin^2\alpha}{2p}$, $\frac{1}{CD} = \frac{\cos^2\alpha}{2p}$ de unde $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{2p}$. c) Locul geometric este directoarea $x = -\frac{p}{2}$.

16. Alegem un sistem de coordonate astfel ca $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$, $H_1(0, 0)$ şi atunci ecuaţiile dreptelor a căror concurenţă vrem să demonstrăm sînt

$A'M_1' : 2ax + 2(b + c)y - a(b + c) = 0$

$B'M_2 : 2a(a^2 + bc)x + 2(a^2b + bc - c^3)y + ac^3 - a^3b - 3abc^2 - a^3c = 0$

$C'M_3 : 2a(a^2 + bc)x + 2(a^2c + b^2c - b^3)y + ab^3 - a^3c - a^3b - 3ab^2c = 0$

Determinantul a cărui anulare demonstrează condiţia de concurenţă se simplifică scăzînd linia a treia din a doua şi scoţînd pe $4a^2$ în factor din linia întîia şi coloana a treia după care devine

$$\Delta = 4a^2(b - c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & -b-c \\ 0 & a^2+b^2+c^2 & (b-c)^2 \\ a^2+bc & a^2c+b^2c-b^3 & b^3-a^2c-a^2-3b^2c \end{vmatrix} =$$

$$= 4a^2(b + c)\begin{vmatrix} 1 & c & -c \\ 0 & a^2+b^2+c^2 & -(b-c)^2 \\ a^2+bc & a^2c-a^2b-b^3 & b^3-a^3c-2b^2c \end{vmatrix} =$$

$$= 4a^2(b + c)\begin{vmatrix} 1 & c & -c \\ 0 & a^2+b^2+c^2 & -(b+c)^2 \\ a^2+bc & a^2c+bc^2 & -a^2c-bc^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4a^2(b + c)\begin{vmatrix} 1 & c & -c \\ 0 & a^2+b^2+c^2 & -(b+c)^2 \\ 1 & c & -c \end{vmatrix} = 0$$

17. Ecuaţia dreptei d va fi $y + a = mx$. Notăm $P \in d \cap Ox$, M simetricul lui O faţă de d. (fig. 4).

Avem ecuaţia dreptei OM (1) $x + my = 0$ şi

$$x_M = \frac{2am}{1 + m^2}, \quad y_M = \frac{-2ba}{1 + m}$$

$x_p = \frac{a}{m}$ $y_p = 0$ deci ecuaţia dreptei cerute (MP) va fi

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{2am}{1 + m^2} & \frac{2a}{1 + m^2} & 1 \\ \frac{a}{m} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } 2mx + (m^2 - 1)y = 2a(2)$$

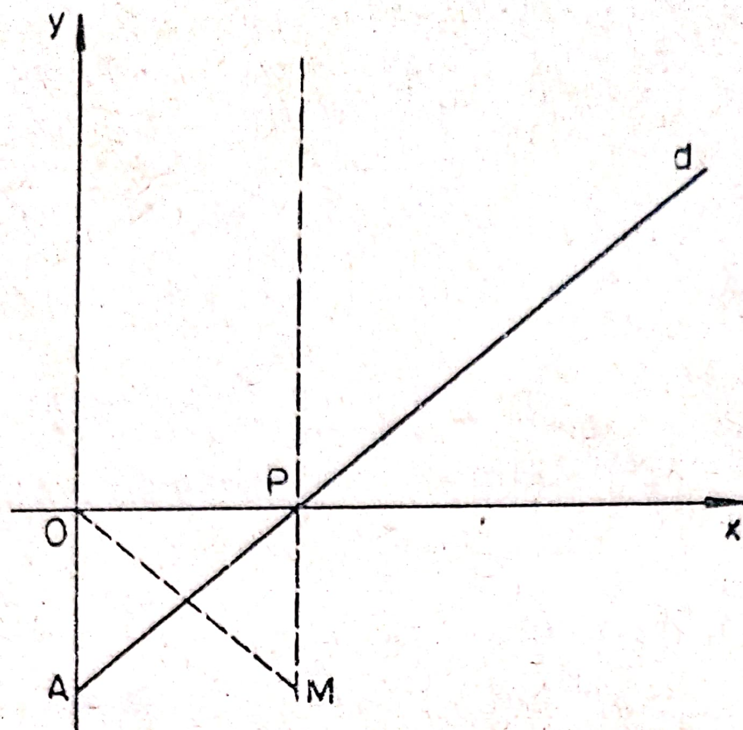


Fig. 7.76.

Locul geometric cerut se află eliminînd pe m între (1) și (2) și va avea ecuația $x^2 + y^2 + 2y = 0$, (un cerc cu centrul în A, trecînd prin O).

18. Notînd cu θ unghiul dintre prima bisectoare și dreapta δ și $m = tg\ \theta$ vom avea imediat

$m_\delta = \dfrac{1+m}{1-m'}$, $m'_d = \dfrac{1-m}{1+m}$, $m_d = \dfrac{m-1}{1+m}$ și ecuațiile lui d și d'

vor fi $d : y = \dfrac{m-1}{m+1}x + \dfrac{a(1-m)^2}{(1+m)}$ $d' : y = \dfrac{1-m}{1+m}x$. Locul geometric se obține eliminînd m între aceste două ecuații și se

obține $x^2 = \dfrac{a}{2}y$ (parabolă simetrică cu $y^2 = \dfrac{a}{2}x$ față de prima bisectoare).

19. Ecuația locului cerut va fi, dacă alegem AB și AC, respectiv, drept axe Ox și Oy : $x + y = k$ (k e semiperimetrul construit). Notînd cu ν abscisa lui c avem pentru perpendiculara dusă prin C la BD ecuația : $(k - \nu)y - \nu(x - \nu) = (k - \nu)^2$ care poate fi pusă sub formă $(k - \nu)(y - k) - \nu(x - k) = 0$. Această dreaptă trece evident prin punctul $x = y = k$ pentru orice ν.

Acestei probleme i se poate da şi o soluţie sintetică foarte simplă.

20. Alegem sistemul de coordonate astfel ca $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$, $K(k, 0)$, adică axa Ox coincide cu AB iar Oy cu înălţimea din vîrful C a $\triangle ABC$.

În aceste condiţii dreptele D şi KL vor avea ecuaţiile, respectiv $D : y = m(x - a)$

$$KL : c(k - a)x + \left[\frac{c(b - k)}{m} + ab - k^2\right]y + ck(k - a) = 0$$

Locul lui $M = D \cap KL$ se obţine eliminînd m între aceste două ecuaţii şi se obţine:
$c(b - a)x + (ab - k^2)y + c(k^2 - ab) = 0$ ceea ce reprezintă ecuaţia unei drepte care trece prin C pentru $\forall k \in R$. Atenţie la distincţia ce trebuie făcută între element variabil (dreapta D) şi element arbitrar (punctul K).

21. Luăm sistemul de coordonare format din BC ca axa Ox şi înălţime din A ca axă Oy. În aceste condiţii avem $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$, $I(x_0, y_0)$ şi efectuînd calculele pentru determinarea coordonatelor punctelor A', B', C' vom găsi:

$$X_{A'} = x_0 - \frac{y_0(a - y_0)}{x_0} \qquad y_{A'} = 0$$

$$X_{B'} = \frac{cx_0(b - x_0) - cy_0(y_0 - a)}{c(b - x_0) + ay_0} \qquad y_{B'} = \frac{a(b - x_0)(c - x_0) + ay_0^2}{c(b - x_0) + ay_0}$$

$$x_{C'} = \frac{bx_0(c - x_0) - by_0(y_0 - a)}{b(c - x_0) + ay_0} \qquad y_{C'} = \frac{a(c - x_0)(b - x_0) + ay_0^2}{b(c - x_0) + ay_0}$$

Alcătuind determinantul
$x_{A'}$ $y_{A'}$ 1
$x_{B'}$ $y_{B'}$ 1, după calcule
$x_{C'}$ $y_{C'}$ 1
simple se verifică că este egal cu zero şi deci cele trei puncte sînt coliniare.

22. Alegem sistemul de coordonate astfel ca D_3 să fie axa Ox iar originea să fie la mijlocul lui AB. În aceste condiţii dreptele D_1, D_2, D_3 vor avea ecuaţiile respective: $y = q$, $y = p$ şi $y = 0$, punctele A şi B vor avea coordonatele $A(-a, 0)$ $N(a, 0)$, iar dreapta D va avea ecuaţia $y = mx + n$ unde m e dat şi n variabil.

Dreapta AP va avea ecuația

$$-px + \left(a + \frac{p-n}{n}\right) y - pa = 0 \text{ iar dreapta } BQ$$

$$qx + \left(a - \frac{a-n}{m}\right) y - qa = 0$$

Locul geometric căutat se obține eliminînd pe n între aceste două ecuații și va avea ecuația:

$$(q - p) + \left(2a + \frac{p-q}{m}\right) y - (q + p)a = 0 \quad \text{va fi o dreaptă.}$$

23. Alegem sistemul de coordonate astfel ca AB să fie axă Ox iar D să fie Oy (fig. 7.77) coordonatele punctelor date vor fi $O(\omega, 0)$ — centrul arcului, $A(\omega - r, 0)$, $B(\omega + r, 0)$ $M(0, m)$, — m variabil.
Ecuația cercului va fi $(x - \omega)^2 + y^2 = r^2$.
Scriind ecuațiile dreptelor MA și MB și intersectînd vom obține coordonatele punctelor N și P astfel:

$$x_N = \frac{(\omega - r^2)(\omega^2 - r^2 + m^2)}{m^2 + (\omega - r)^2} \qquad y_N = \frac{2mr(r - \omega)}{m^2 + (r - \omega)^2}$$

$$x_P = \frac{(\omega + r)(\omega^2 - r^2 + m^2)}{m^2 + (\omega + r^2)} \qquad y_P = \frac{2r(r + \omega)}{m^2 + (r + \omega)^2}$$

cu care se găsesc apoi $\overline{AM} \cdot \overline{AN} = 2r(r - \omega)$ $\overline{BN} \cdot \overline{BP} = 2r(r + \omega)$

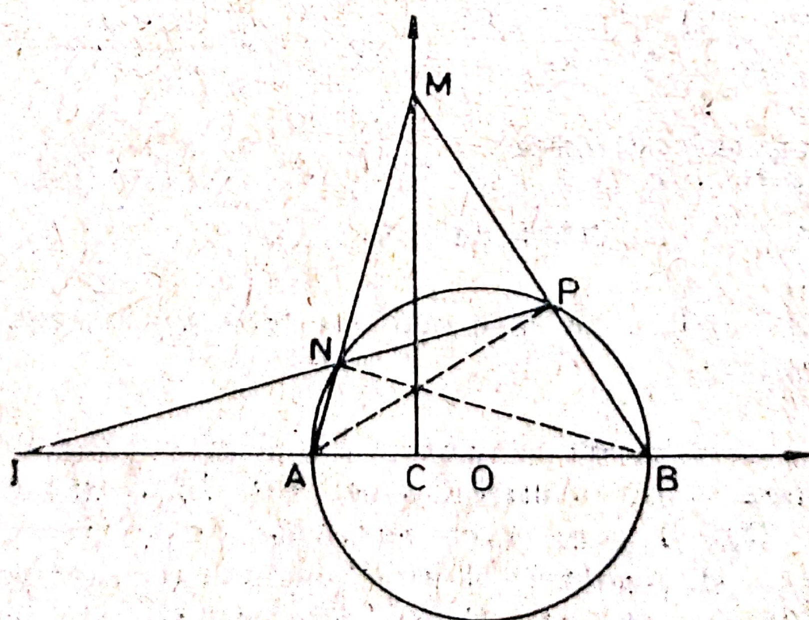


Fig. 7.77.

Scriind ecuaţia dreptei NP şi intersectînd-o cu $y = 0$ se obţine $x_r = \frac{\omega}{\omega^2 - r^2}$ independent de m şi deci fix.

Dreptele AP şi BN au ecuaţiile, respectiv:
$(r + \omega)x - my + r^2 - \omega^2 = 0$
$(r - \omega)x + my - r^2 + \omega^2 = 0$ de unde rezultă că intersecţia lor E va avea coordonatele $x_E = 0$ $y_E = \frac{r^2 - \omega^2}{m}$ adică $E \in D$.

24. Alegem sistemul de coordonate avînd AB drept axă ox şi D drept axa oy. În acest sistem vom avea $O(\omega, 0)$ — centrul cercului, $A(\omega - r, 0)$, $B(\omega + r, 0)$, ecuaţia dreptei δ va fi $y = m(x - \omega + r)$ iar ecuaţia lui Γ va fi $(x - \omega)^2 + y^2 = r^2$
După calcule simple se găseşte că

$$x_P = \omega + \frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \quad y_P = \frac{2mr}{1 + m^2}, \quad x_M = 0, \quad y_M = -m(\omega - r),$$

$$x_N = 0, \quad y_N = \frac{\omega + r}{m} \overline{CM} \cdot \overline{CN} = y_M \qquad y_M = r^2 - \omega^2 < 0.$$

constant

$$x_a = \frac{(\omega^2 - r^2)[m^2(\omega - r) + \omega + r]}{m^2(\omega - r)^2 + (\omega + r)^2}, \qquad y_a = \frac{\omega + r}{m}\left(1 - \frac{x_a}{\omega - r}\right)$$

condiţia de coliniaritate devine după unele calcule

$$\frac{m(\omega - r)}{\omega + r}(x_a - \omega - r) + \frac{\omega + r}{m(\omega - r)}(x_Q - \omega + r) = 0$$ şi se verifică identic pentru orice m.

Apoi folosind datele deja obţinute se verifică fără dificultăţi deosebite că intersecţia dreptei PQ cu dreapta AB (axa $y = 0$) se face în punctul de abscisă $x = \frac{\omega^2 - r^2}{\omega}$, independent de m, deci acesta este punctul fix al dreptei PQ.

25. Se alege sistemul de coordonate astfel ca $D_3 = ox$ iar perpendiculara în mijlocul lui AB pe D_3 să fie oy. În aceste condiţii vom avea $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ şi luînd ecuaţia lui $D: y = mx + n$,

$$P\left(\frac{d_1-n}{m},\ d_1\right),\quad Q\left(\frac{d_2}{m},\ d_2\right),\ A_1\left(\frac{d_1}{m}-a,\ d_1\right),$$

$$A_2\ \left(\frac{d^2}{m}-a,\ d_2\right)\ B_1\left(\frac{d_1}{m}+a,\ d_1\right)\ B_2\left(\frac{d_2}{m}+a,\ d_2\right).$$

Ecuaţiile dreptelor a căror concurenţă trebuie dovedită vor fi

$$AQ: d_2x-\left(\frac{d_2-n}{m}+a\right)y+ad_2=0$$

$$EP: d_1x+\left(a-\frac{d_1-n}{m}\right)y-ad_1=0$$

$$A_1B_2: (d_1-d_2)x+\left(\frac{d_2-d_1}{m}+2a\right)y-a(d_1+d_2)=0$$

$$AP: d_1x-\left(a+\frac{d_1-n}{m}\right)y-ad_1=0$$

$$BQ: d_2x+\left(a-\frac{d_2-n}{m}\right)y-ad_2=0$$

$$A_2B_1: (d_2-d_1)x+\left(\frac{d_1-d_2}{m}+2a\right)y-a(d_1+d_2)=0$$

Condiţiile de concurenţă se verifică uşor.

26. Relaţia cerută se verifică imediat, fără nici o dificultate ştiind că $I\left(\frac{a}{4},\ \frac{b}{4}\right)$ iar $G\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3}\right)$.

Locul geometric cerut este $9x^2+16y^2=k^2$, adică o elipsă cu semiaxele $\frac{k}{3}$ şi $\frac{k}{4}$.

Notînd cu B' şi A' respectiv proiecţiile lui B şi A pe OP şi ştiind că ecuaţia dreptei OP este de $ax+by=0$ se găsesc $BB'=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $AA'=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $S=\pi(a^2+b^2)$ iar volumul cerut va fi

$$V=\frac{2ab(a^4+b^4+a^2b^2)}{3(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}.$$

27. Alegem originea sistemului de coordonare în vîrful fix O al patratului şi notăm cu α unghiul $(\widehat{OX,\ OA})$ şi cu $\nu=\operatorname{tg}\alpha$

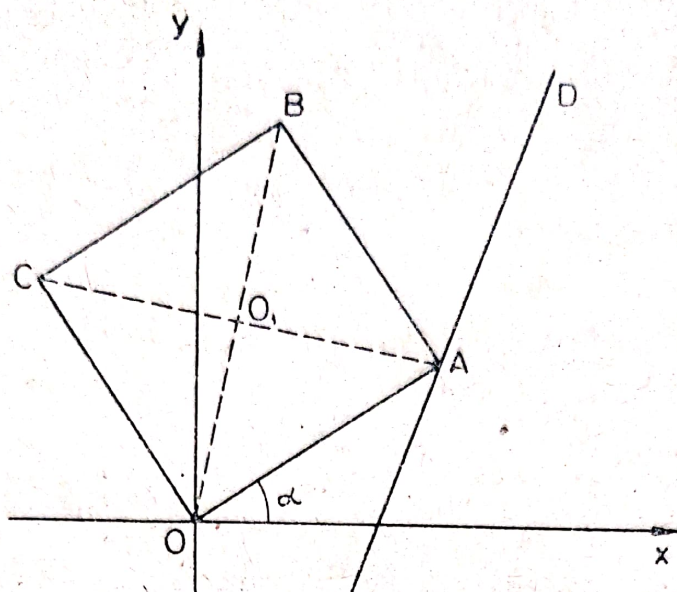


Fig. 7.78.

Dreapta D (dată) va avea ecuația $y = mx + n$ (fig. 7.78). Ținînd seama că: $\sphericalangle(CB,\ OX) = \alpha$, $\sphericalangle BOx = \alpha + 45°$, $\sphericalangle(AB,\ OX) = \sphericalangle(OC,\ OX) = \alpha + 90°$ $\sphericalangle(AC, OX) = 135° + \alpha$ vom putea scrie cu ușurință ecuațiile dreptelor OA, AB, AC, OB și vom obține deci corodonatele punctelor B, C, O_1. Locurile cerute vor fi:
Locul lui B: $(1 - m)x - (1 - n)y + 2n = 0$
Locul lui $O_1 (1 + m)x - (1 - n)y + n = 0$
Locul lui C: $x + my + n = 0$

Ecuația lui Γ va fi: $x^2 + y^2 - \dfrac{n(1 - \nu)}{\nu - m} x - \dfrac{n(1 - \nu)}{\nu - m} y = 0$

Tangenta în A la Γ: $(1 + \nu)x - (1 - \nu)y + \dfrac{n(1 + \nu^2)}{-m} = 0$

Tangenta în O la Γ: $(1 - \nu)x + (1 + \nu)y = 0$
Volumul cerut va fi:

$$V = \frac{\pi n^3}{(\nu - m)^3}(1 + \nu^2)\sqrt{2(1 + \nu^2)}.$$

Locul intersecției tangentelor în O și A la Γ va avea ecuația $(1 - m)x + (1 + m)y + n = 0$

28. Luînd secanta variabilă de ecuație $y = mx + a$ (m variabil) vom avea $P\left(-\dfrac{a}{m},\ 0\right)$, $Q\left(0, -\dfrac{a}{m}\right)$. Perpendiculara

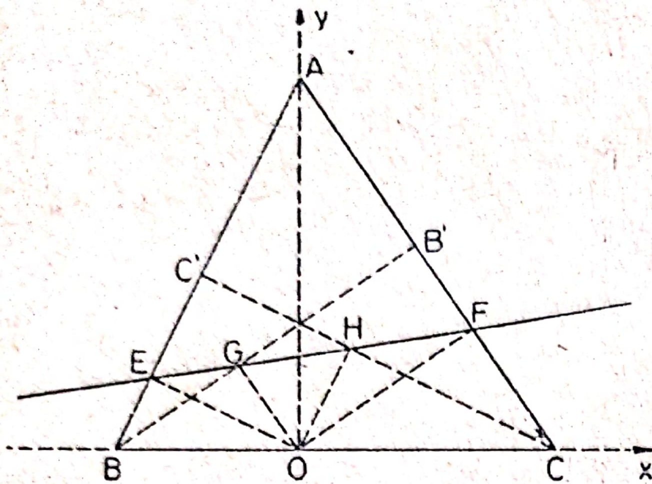


Fig. 7.79.

din Q pe AP va avea ecuația $x+my+a=0$, deci intersecția sa cu axa Ox va fi punctul fix $I(-a, 0)$.
Locul geometric căutat va avea ecuația $x^2+y^2+ax-ay=0$ și va fi un cerc cu centrul în $C\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ și cu raza $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

29. Ecuația care trebuie să-l determine pe x va fi $6x^2-4(a+b+c)x+(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)=0$. Discriminantul ei $\Delta=-[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]<0$, deci M nu există.

30. Alegem sistemul de coordonate ca în fig. 7.79 ($\overline{AO}\perp\overline{BC}$) și trebuie să arătăm că E, G, H, F sînt coliniare.
Avem : $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$.
Scriind ecuația dreptei EF găsim $a(b+c)x-(a^2-bc)y-$ $-abc=0$
Calculînd intersecțiile înălțimilor BB' și CC' cu perpendicularele duse din O pe ele găsim

$$x_G=\frac{bc^2}{a^2+c^2},\quad y_G=-\frac{abc}{a^2+c^2}, x_H=\frac{b^2}{a^2+c^2},\quad y_H=-\frac{abc}{a^2+b^2}$$

și putem acum verifica cu ușurință că $G\in EF$ și $H\in EF$.

31. Scriind ecuația cercului cerut Γ sub forma x^2+y^2+nx+ $+ny+p=0$, putem determina parametrii m, n, p, din condițiile ca $A\in\Gamma$, $B\in\Gamma$ $C\in\Gamma$ și după calcule destul de simple se găsește ecuația

$$x^2+y^2-2x-\frac{41}{7}y-8=0$$

Centrul ω_1, al lui Γ_1, se află pe perpendiculare în B la AB și pe mediatoarea segmentului BD, deci va avea coordonatele

$$x\omega_1=\frac{\nu-2}{2};\ y\omega_1=-\frac{\nu+2}{7}$$

Raza lui Γ_1, va fi $r_1 = \frac{(\nu + 2)\sqrt{53}}{14}$ deci ecuația lui Γ_1 va fi

$$x^2 + y^2 - (\nu - 2)x + \frac{2(\nu + 2)}{7}y - 2\nu = 0$$

În mod analog, pentru Γ_2 găsim ecuația

$$x^2 + y^2 - (\nu + 4)x - \frac{4(\nu - 4)}{7}y + 4\nu = 0$$

Locul geometric cerut se obține eliminînd ν din ecuațiile celor două cercuri și se găsește ecuația $y\left(x^2 + y^2 - 2x - \frac{41}{7}y - 8\right) = 0$ adică axa Ox și cercul Γ.

32. Alegînd sistemul de coordonate astfel încît coordonatele date să fie $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$, $D(d, 0)$, $E(e, 0)$ și considerînd ecuația dreptei FG : $y = \nu$ (ν variabil) găsim după calcule elementare ecuația locului căutat sub forma
$a(c + d - b - e)x - (bd - ce)y + a(bd - ce) = 0$; deci locul căutat este o dreaptă care trece prin A.

33. Alegem sistemul de coordonate cu originea în centrul lui Γ și cu axa oy perpendiculară pe coarda AB (fig. 7.80). Alegem drept parametru al problemei unghiului $GOx = \alpha$. Dreapta GC va avea ecuația $x \cos \alpha + y \sin \alpha - r = 0$ și deci coordonatele lui C vor fi

$$x_C = \frac{r - k \sin \alpha}{\cos \alpha} \quad y_C = k$$

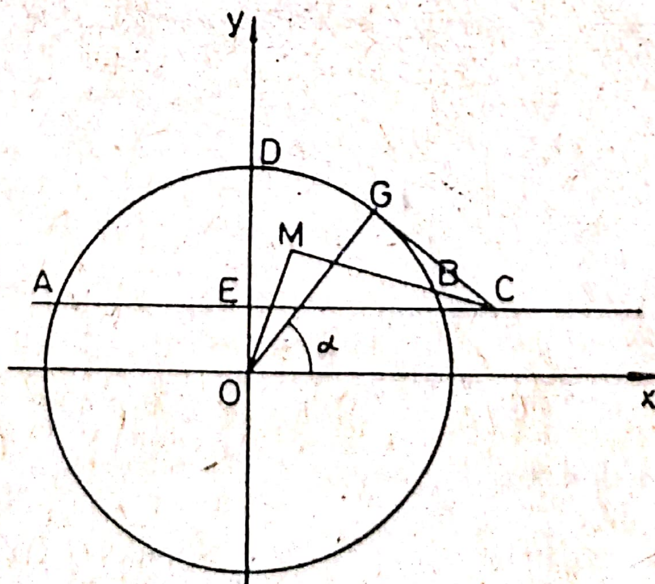


Fig. 7.80.

Ecuația dreptei CM va fi $x \cos \alpha + y(1 + \sin \alpha) - k - r = 0$ iar a dreptei $OM: x \cos \alpha - y(1 - \sin \alpha) = 0$ (La obținerea acestor ecuații s-au folosit relațiile $\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$, $\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$. Locul geometric al lui M se obține eliminînd între ultimele două ecuații ceea ce se poate face ușor și se obține $y = \frac{k + \gamma}{2}$, deci o dreaptă paralelă cu AB dusă prin mijlocul segmentului DE.

34. Alegem sistemul de coordonate ca în fig. 7.81, coordonatele punctelor A, B, C, ca de obicei, $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$ iar drept parametru al problemei, distanța $FH = \nu$.

Coordonatele punctelor E, F, G, H vor fi $x_E = b\left(1 - \frac{\nu}{a}\right)$,

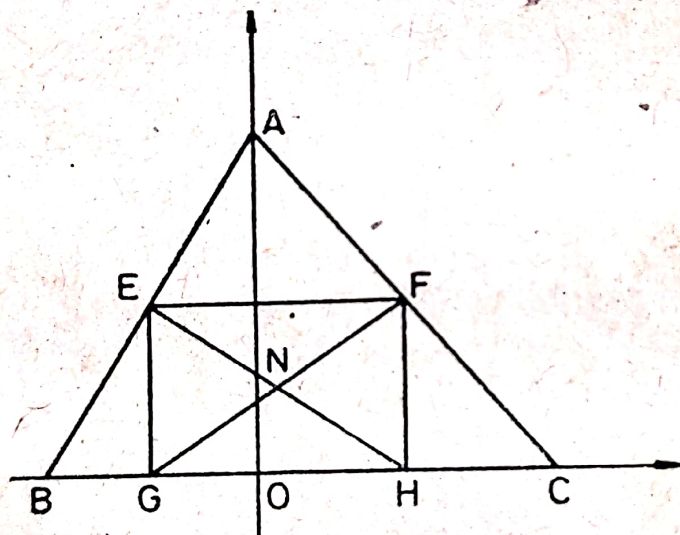


Fig. 7.81.

$y_E = \nu$, $x_F = c\left(1 - \frac{\nu}{a}\right)$, $y_F = \nu$, $x_G = b\left(1 - \frac{\nu}{a}\right)$, $y_G = 0$, $x_H = c\left(1 - \frac{\nu}{a}\right)$, $y_H = 0$.

Cu acestea coordonatele lui M vor fi $x_M = \frac{b + c}{2}\left(1 - \frac{\nu}{a}\right)$, $y_M = \frac{\nu}{2}$, iar locul geometric al lui M va fi dreapta de ecuație

$$2ax + (b + c)y = a(b + c).$$

35. Alegem sistemul de coordonate cu originea în A și cu x

axa Oy perpendiculară pe dreapta XY dată (fig. 7,82), iar drept parametru al problemei, unghiul $BAx = \alpha$.

Din datele problemei rezultă $\sphericalangle A$ dat, $\frac{AC}{AB} = \nu$ de asemenea dat.
$y = k$, (k, dat) reprezentînd ecuația dreptei X.
Cu aceasta $AB = \frac{k}{\sin \alpha}$

$$AC = \nu\, AB = \frac{\nu k}{\sin \alpha}$$

Coordonatele punctului C vor fi:

$$x_C = \frac{\nu k \sin(A + \alpha)}{\sin \alpha} \qquad y_0 = \frac{\nu k \cos(A + \alpha)}{\sin \alpha}$$

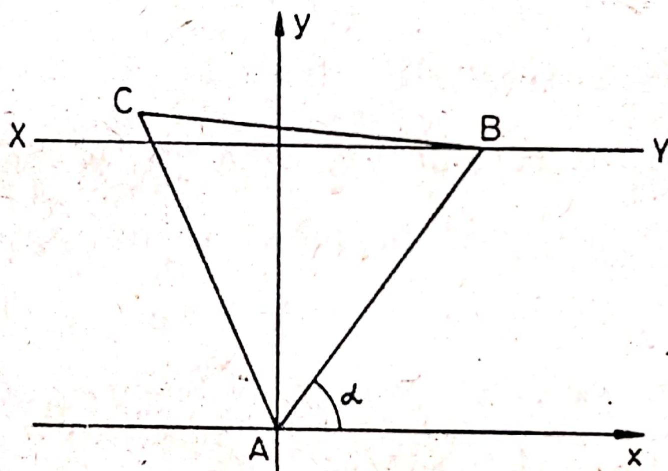


Fig. 7. 82.

Locul geometric al lui C se obține eliminînd pe α între coordonatele lui ceea ce, după calcule elementare, ne conduc la ecuația $x \cos A \sin A - \nu k = 0$ ceea ce reprezintă o dreaptă.

36. Alegînd sistemul de coordonate cu $Ox = AB$ și originea la jumătatea lui AB și notînd cu $a = OA = OB$ se obține pentru locul geometric căutat ecuația:
$(m \pm n)(x^2 + y^2) + 2a(m \pm n)x + (m \pm n)a^2 = K^2$ ceea ce reprezintă în ambele cazuri (semnul + sau —) cercuri.

4. PROBLEME DE CONCURS

1. a) Punctele de intersecţie ale dreptei D cu axele sînt $A(3, 0)$, $B(0, -4)$. Apoi $\overline{AB} = 5$ şi punctul C de tangentă al cercului C cu axa Oy are coordonatele $(0, 1)$ $(\overline{AB} = \overline{BC})$ Scriind că tangentele la cercul $x^2 + y^2 + 2ax + 2bx + c = 0$ în $A(3, 0)$ şi $C(0, 1)$ coincid respectiv cu dreptele D şi $x = 0$ găsim :

$$\frac{3+a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{3a+c}{-12}; \quad \frac{a}{1} = \frac{b+1}{0} = \frac{b+c}{0}$$

de unde $a = -\frac{5}{3}$, $b = -1$, $c = 0$ şi cercul căutat are ecuaţia $3(x^2 + y^2) - 10x - 6y + 3 = 0$

b) $\overline{AC} = \sqrt{10}$

c) Raza sferei tangente la cercul de rotaţie este egală cu $\frac{5}{3}$.

Raza bazei conului este egală cu $\frac{\sqrt{10}}{2}$. Înălţimea conului este $\frac{3}{2}\sqrt{10}$. Înălţimea calotei sferice cuprinse în con (care trebuie scăzută din volumul conului) este egală cu $\frac{\sqrt{10}}{6}$. Cu aceste elemente volumul cerut se calculează uşor.

2. Notăm $OA = x$, $OB = y$, $(O = D_1 \cap D_2)$ $OM = d$, $\sphericalangle AOM = \alpha$, $\sphericalangle BOM = \beta$ şi latura triunghiului echilateral cu a. Se scrie relaţia lui Pithagora generalizată în $\triangle AOB$, $\triangle AMO$, $\triangle BOM$ şi se obţin trei relaţii cu necunoscute x, y, a. Se află necunoscutele şi cu aceasta problema este rezolvată.

3. a) Fie $O = AD \cap CE$. Unim O cu B şi cu F.
(x) $\triangle ABD = \triangle CBE$ avînd două laturi şi unghiul cuprins egale. De aici
$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BEC$ şi deci $\square\ AOBE$ e inscriptibil deci cercul O_1, trece prin O şi $60° = \sphericalangle EBA = \sphericalangle EOA = \sphericalangle DOC = \sphericalangle DBC$ şi $\square DBOC$ e inscriptibil şi cercul O_2 trece şi el prin O. În plus $\sphericalangle BOC = 120°$ şi deci $\sphericalangle AOC = 120°$ şi $\square AOCF$ e inscriptibil deci şi cercul O_3 trece prin O.

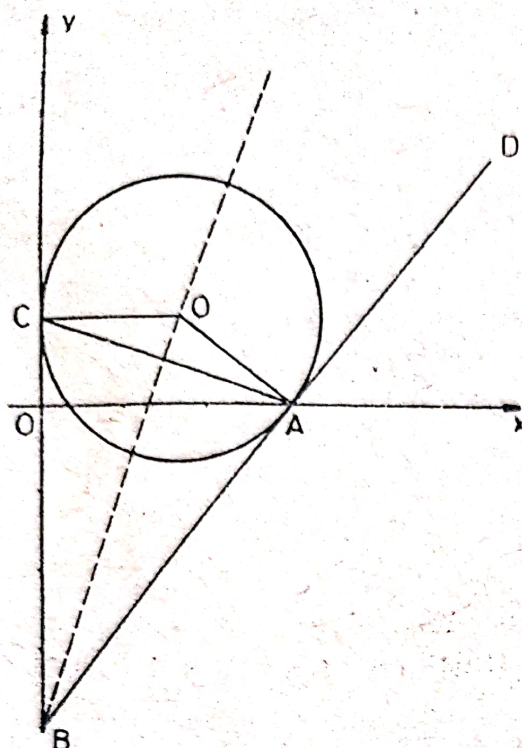


Fig. 7.83

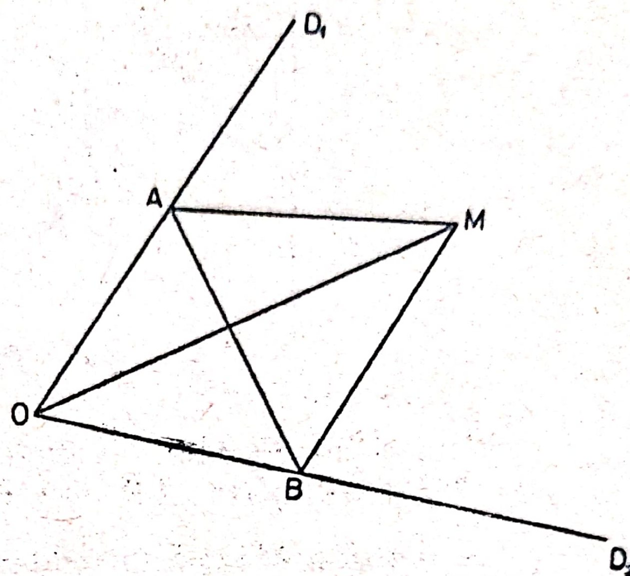


Fig. 7.84.

b) C, O, E, sînt colineare prin construcţie ca şi A, O, D. Din egalitatea (*) rezultă şi $\overline{AD} = \overline{CE}$.

c) Întrucît $\sphericalangle BOC = 120°$ locul lui O va fi un arc de cerc din care segmentul $\overline{BC}$ se vede sub un unghi de 120°.

d) Notînd cu R_1, R_2, R_3 razele cercurilor O_1, O_2, O_3 şi cu a, b, c, laturile triunghiurilor avem

$$R_1 = \frac{c}{\sqrt{3}},\ R_2 = \frac{a}{\sqrt{3}},\ R_3 = \frac{b}{\sqrt{3}};$$

ele sînt egale cînd $a = b = c$.

4. a) Punînd condiţia că tangenta în origine la cercul $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$ să coincidă cu dreapta OB de ecuaţie $cx - by = 0$ şi să treacă prin punctul I găsim

$$p = 0,\ m = \frac{k}{2},\ n = -\frac{bk}{2c}$$

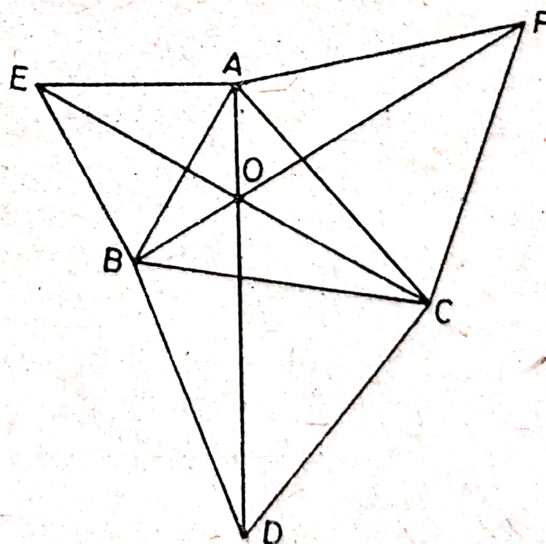


Fig. 7.85.

Fig. 7.86.

Procedînd în mod analog pentru cel de al doilea cerc căutat (dreapta AB are ecuaţia $cx + (a - b)y - ac = 0$ găsim ecuaţia lui $x^2+y^2 - \frac{(a+k)}{b}x - \frac{(k-a)(a-b)}{c}y + ak = 0$

b) Coordonatele lui M vor fi $x_M = k + \frac{k(k-a)(a-b-k)}{(a-b-k)^2+c^2}$, $y_M = \frac{kc(k-a)}{(a-b-k)^2+c^2}$. Ecuaţia dreptei IM este $cx + y(b+ka) - kx = 0$ şi trece pentru orice k prin punctul $P(a-b,\ c)$.

c) Ecuaţia locului geometric al punctului M se află eliminînd k între ecuaţiile:
$x^2 + y^2 - ax - \frac{b^2+c^2-ab}{c}\ y = 0$ şi cea a dreptei IM, deci locul geometric va fi un cerc.

d) Observăm că $\sphericalangle PMO = \sphericalangle BOA$ avînd aceeaşi măsură şi cum P e fix şi unghiul BOA constant rezultă că locul geometric căutat este arcul de cerc din ale cărui puncte segmentul OP se vede sub un unghi constant.

5. a) Se aplică teorema celor trei perpendiculare şi rezultatul se obţine imediat.

b) Locul geometric este un cerc cu diametrul OA.

6. a) $\sphericalangle STC = 30°$ (căci $ST \parallel AB$ şi $\sphericalangle BAT = 30$. $\sphericalangle QSB = \sphericalangle SBA = 30°$(ca alterne interne).

b) vezi problema (12).

c) Locul geometric cerut este o paralelă prin C la CE.

7. a) $y = m_A(x - a)$ (d)
$y = m_B(x + b)$ (d')

b) $b(m_A - m) + am_A(m_B - m) = 0$

c) A' are coordonatele $(0, -am_A)$
B' are coordonatele $\left(-\frac{b}{m_B}, 0\right)$
Dreapta $A'B'$ are ecuaţia $am_Am_Bx + by + abm_A = 0$ Din condiţia de la punctul b) rezultă
$$m_A = \frac{nb}{b + am_B - am}$$
cu care ecuaţia dreptei $A'B'$ se poate scrie $am_B(mx + y) + (am - b)y + abm = 0$
Vîrful fascicolului are coordonatele
$$x = \frac{ab}{b - am},\ y = \frac{abm}{am - b}$$

d) Ecuaţia locului geometric cerut este $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, adică ecuaţia dreptei AB.

8. Fie $N = AC \cap OB$. Avem $\angle MON = a$, $\overline{ON} = \frac{d}{\cos a}$,

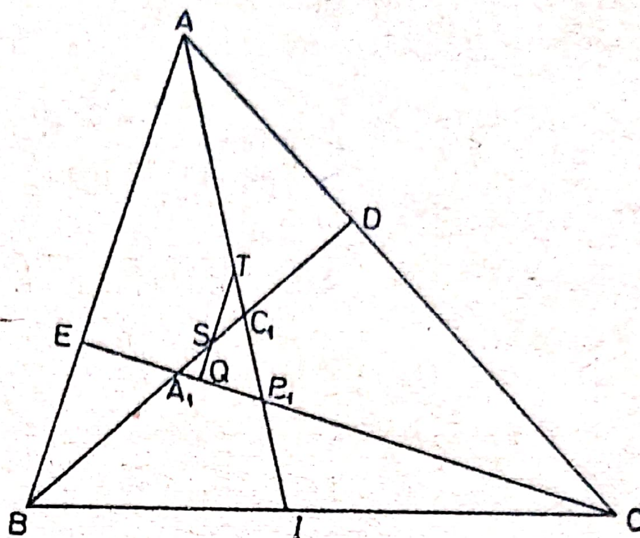


Fig. 7.87.

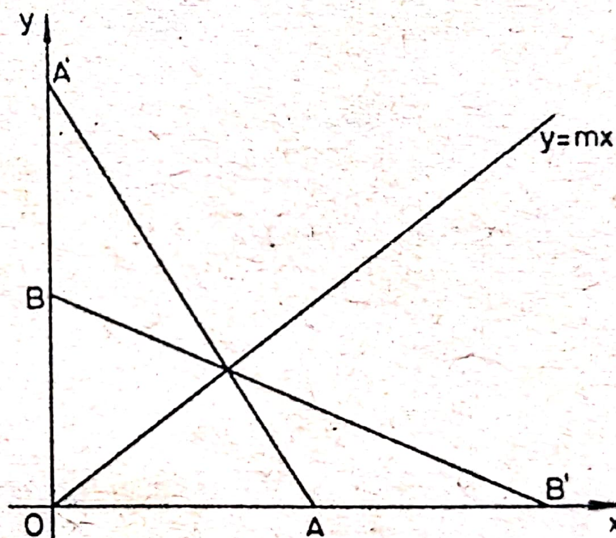


Fig. 7.88.

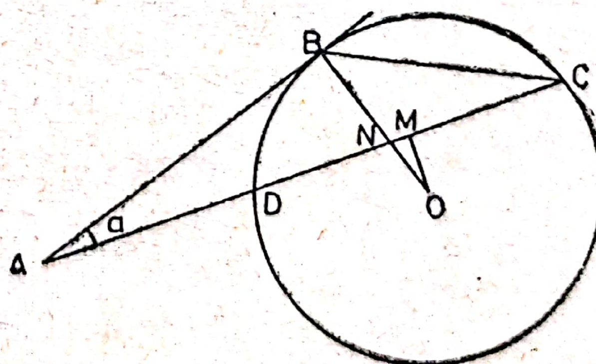


Fig. 7.89.

$$\overline{BN} = \frac{r \cos a - d}{\cos a}, \quad \overline{AB} = \frac{r \cos a - d}{\sin a}, \quad \overline{DC} = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

Notînd h_b înălţimea din B în $\triangle ABC$ avem $h_B = r \cos a - - d$. Scriind puterea lui A faţă de cerc avem pentru determinare lui $\overline{AD}$ (cu ajutorul căruia aflăm $\overline{AC}$) ecuaţia

$$\overline{AD}^2 - 2\overline{AD}\sqrt{r^2 - d^2} - \frac{(r \cos a - d)^2}{\sin^2 a} = 0$$

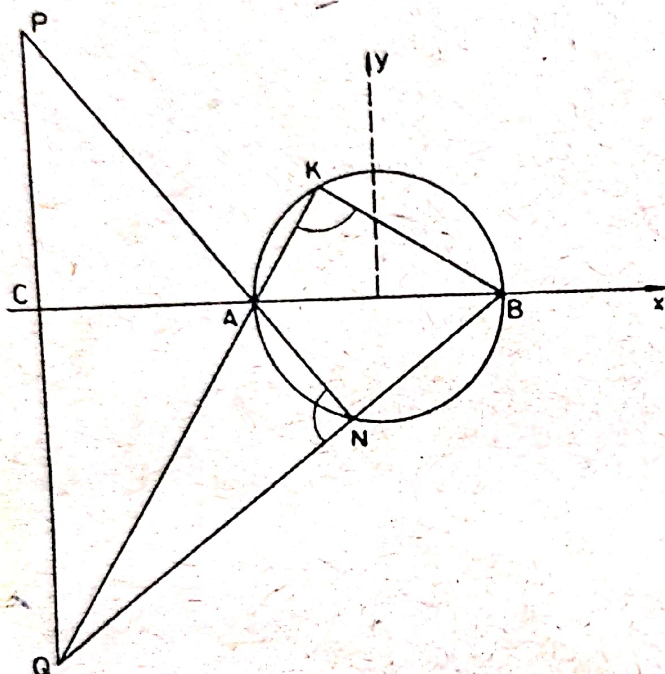


Fig. 7.90.

După aflarea lui $\overline{AD}$ şi apoi a lui $\overline{AC}$ se află imediat aria cerută.

9. a) Din $\triangle PAC \sim \triangle ANB$ rezultă $\overline{CP} = \dfrac{\overline{CA} \cdot \overline{NB}}{\overline{AN}}$

Din $\triangle ACQ \sim \triangle ABK$ rezultă $CQ = \dfrac{\overline{QA} \cdot \overline{BK}}{AB}$

şi $\overline{AK} \cdot \overline{QA} = \overline{AB}^2$

Din $\triangle QAN \sim \triangle QBK$ rezultă $\overline{QA} = \dfrac{\overline{QB} \cdot \overline{AN}}{KB}$

Cu aceste relaţii avem :

$$\overline{CP} \cdot \overline{CQ} = \overline{NB} \cdot \overline{QB} = \overline{QB}(\overline{QB} - \overline{QN}) = \overline{QB}^2 - \overline{QB} \cdot \overline{QN} = \\ = \overline{QB}^2 - \overline{QA} \cdot \overline{QK} = \overline{QB}^2 - \overline{QA}(\overline{QA} + \overline{AK}) = \overline{QB}^2 - \\ - \overline{QA}^2 - \overline{AB}^2$$

Pe de altă parte $\overline{QB}^2 - 4\overline{AB}^2 = \overline{QA}^2 - \overline{AB}^2$, $(\overline{AB}^2 = \overline{CQ}^2)$,

de unde $\overline{CP} \cdot \overline{CQ} = 2\overline{AB}^2$.

b) Luăm sistemul de coordonate ca în figură şi $\overline{AB} = 2a$. Ecuaţia este $x^2 + y^2 - a = 0$ ecuaţia dreptei AP este $y = m(x + a)$ coordonatele punctelor din figură sînt $B(a, 0)$, $A(-a, 0)$, $P(-3a, -2ma)$. Pentru aflarea coordonatelor lui Q folosim proprietatea demonstrată la punctul a) şi găsim $Q\left(-3a, \dfrac{4a}{m}\right)$. Ecuaţia dreptei $\overline{QA}$ va

fi $y = -\frac{2}{m}(x + a)$ și coordonatele lui K

$$x_k = \frac{(m^2-4)a}{m^2+4} \qquad y_k = -\frac{4am}{m^2+4}$$

Pentru a demonstra coliniaritatea punctelor P, K, B trebuie să demonstrăm că

$$\begin{vmatrix} -3a & -2ma & 1 \\ \frac{(m^2-4)a}{m^2+4} & -\frac{4am}{m^2+4} & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ceea ce se verifică fără dificultate.

Coordonatele lui N sînt $x_N = \frac{a(1-m^2)}{1+m^2}$ $y_N = \frac{2ma}{1+m^2}$ cu care proprietatea cerută se verifică imediat.

10. Se află mai întîi $h_a = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 8$ cm

Apoi se notează $EF = x$ $EH = y$ și avem $\frac{x}{BC} = \frac{h_a - y}{h_a}$ și cu aceasta pentru determinarea laturilor x și y avem sistemul

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 8x = 21(8 - y) \end{cases}$$

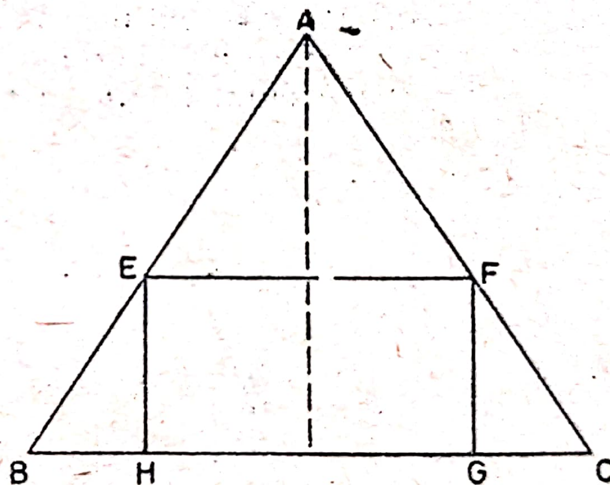


Fig. 7.91.

11. a) Notînd cu V volumul paralelipipedului și cu V_1 volumul cerut avem $V_1 = V - V_{AILE} = 614{,}4$ cm^3 $- 6{,}4$ cm^3 $= 608$ cm^3.

b) Notînd cu S aria totală a paralelipipedului și cu S_1 aria cerută avem (fig. 7.92):

$S_1 = S - S_{AEI} - S_{AEL} - S_{AIL} + S_{EIL} = 563{,}2$ cm^2 $- 6{,}4$ cm^2 $- 4{,}8$ cm^2 $- 6$ cm^2 $+ 10$ cm^2 $= 547$ cm^2.

12. a) Ducem $AF \parallel BC$ (fig. 7.93) și ținînd seama că $\triangle MAF \sim \triangle MEC$ și $\triangle NAF \sim \triangle BEN$ se ajunge la $\frac{MF}{ME} = \frac{AF}{EC}$,

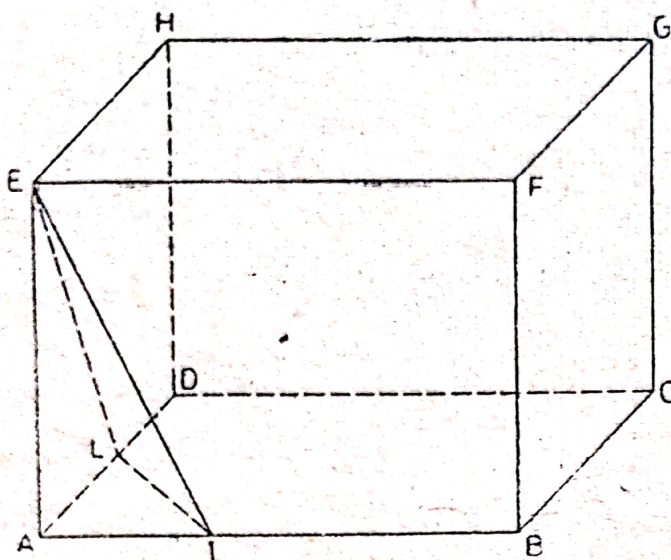


Fig. 7.92.

$\frac{\overline{NF}}{\overline{NE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BE}}$ de unde scriind unele proporţii derivate se obţine $\overline{NF} = \overline{MF}$ şi deci $\overline{EM} + \overline{EN} = 2\overline{AD}$. Scriind apoi $\overline{AD} < \overline{AB} + \overline{BD}$, $\overline{AD} < \overline{AC} + \overline{DC}$ şi sumînd se obţine rezultatul cerut.

b) Ţinînd seama că $\sphericalangle BGC = 90°$, avem $\overline{GD} = \frac{\overline{BC}}{2}$, de unde $\overline{EM} + \overline{EN} = 2\overline{AD} = 6\overline{GD} = 3\overline{BC}$

c) Locul geometric cerut este un cerc. Referind figura la un sistem de coordonate format din dreapta $\overline{BC}$ şi mediatoarea segmentului $\overline{BC}$ (ca axa Oy) în care punctele B şi C au coordonatele, respectiv $(-a, 0)$, $(a, 0)$ ecuaţia locului lui A va fi $x^2 + y^2 = 9a^2$.

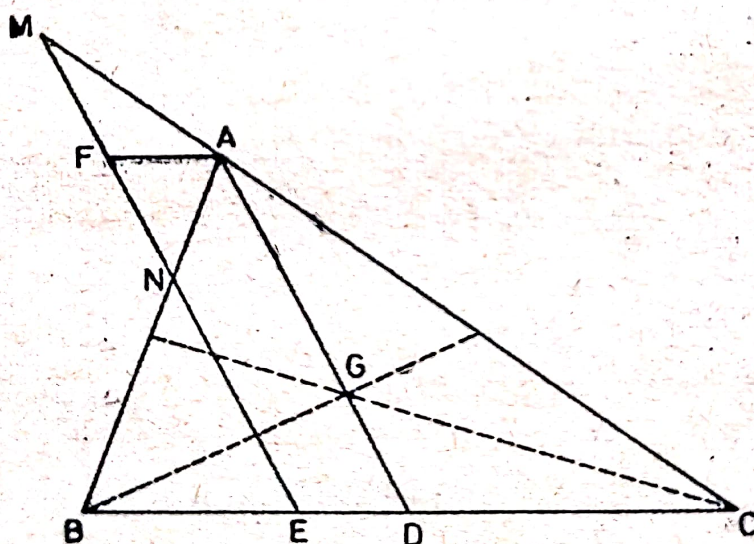


Fig. 7.93.

13. a) $S_t = S_{ABC} + 2S_{AVB} + S_{VBC} = \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + a\sqrt{a^2 + 2b^2})$

b) Notînd cu α unghiul cerut avem $\triangle AVD$ fiind dreptunghic (D e mijlocul lui BC), $\overline{VD} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + b^2} = a$, $\overline{VA} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ şi deci $\alpha = 45°$.

c) Fie $\triangle AEF$ secţiunea dată. Înălţimea acestui triunghi coincide cu înălţimea $\triangle VAD$ şi este egală cu

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

Baza triunghiului, este egală cu

$$EF = \frac{2ab^2\sqrt{2}}{a^2 + 2b^2}$$

de unde aria secţiunii cerută se află cu uşurinţă.

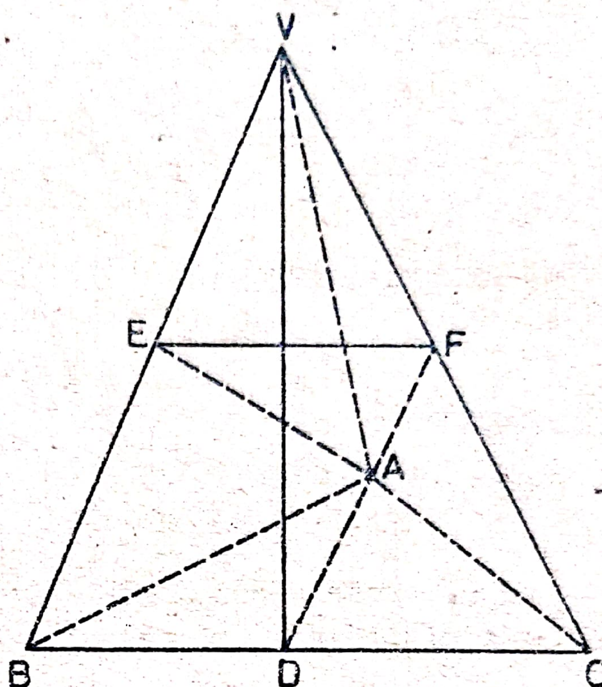


Fig. 7.94

14. Prin O se duce paralela $\overline{EF}$ la baze şi se demonstrează din asemănarea triunghiurilor $\triangle AEO \sim \triangle ADC$, $\triangle BOF \sim \sim \triangle BDC$ şi $\triangle ODC \sim \triangle OAB$ că $\overline{EO} = \overline{OF}$. După aceasta se scrie $S_{AOD} = S_{AEO} + S_{DOE}$ şi $S_{BOC} =$

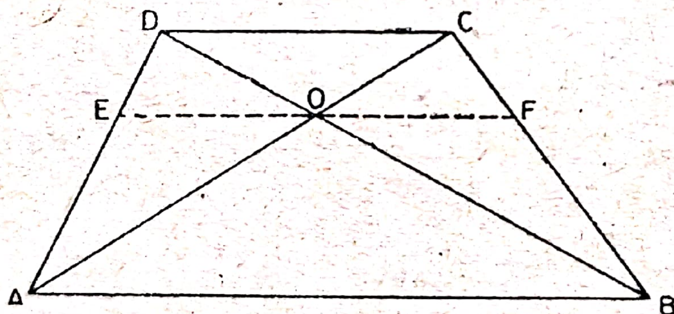


Fig. 7.95

$= S_{BOF} + S_{COF}$ şi pentru calculul ariilor S_{AEO} şi S_{DOE} se ia drept bază $\overline{EO}$ iar pentru calculul ariilor S_{OBF} şi S_{COF} se ia ca bază $\overline{OF}$, de unde rezultă imediat egalitatea cerută.

15. a) Laturile neparalele se văd sub unghiuri de 30° iar baza mare sub un unghi de 120°.

b) $p = R(\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)$

16. Alegînd un sistem de coordonate cu originea în centrul cercului şi axele paralele cu laturile patratului, vîrfurile A, B, C, O

vor avea coordonatele, respectiv $\left(-\frac{R\sqrt{2}}{2}, \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}, \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}, -\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$. În aceste condiții trebuie să demonstrăm, de exemplu că dacă

$$\left(x+\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(x-\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2=C_1 \text{ și } x^2+y^2= = R^2$$

atunci

$\left(x-\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(y+\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2$ este o constantă pe care o notăm cu C_2.

Din primele două relații rezultă $4R^2-2Ry=C_1$ cu care constanta C_2 din expresia a treia devine $C_2=8R^2C_1$.

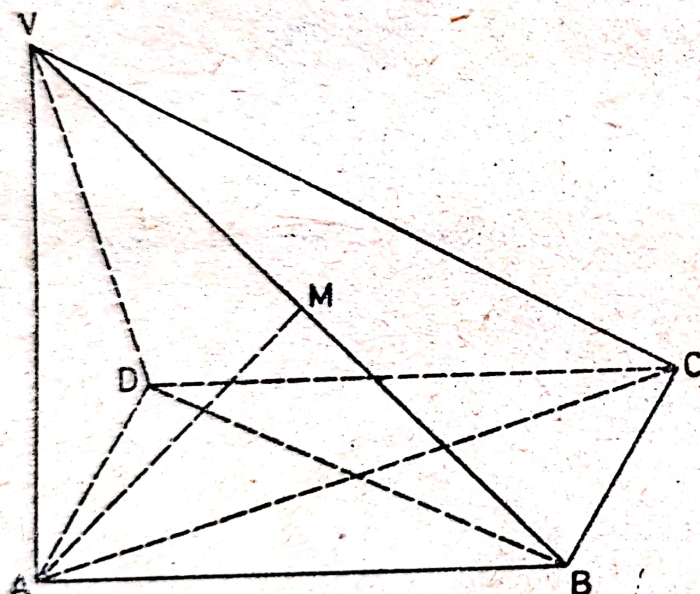


Fig. 7.93.

17. a) $\overline{VB}=\sqrt{a^2+c^2}$,
$\overline{VC}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
$\overline{VC}=\sqrt{b^2+c^2}$

b) Notînd cu S_t aria totală avem $S_t = = ab+\frac{1}{2}a(b+ +c)+\frac{1}{2}a(b+c)+ +\frac{1}{2}(a\sqrt{b^2+c^2}+ +b\sqrt{a^2+c^2})$.

c) $\overline{BC}\perp\overline{AB}$, $\overline{BC}\perp\overline{VA}$ deci $\overline{BC}\perp\overline{AM}$ fiind perpendiculară pe planul VAB.

$\overline{AM}\perp\overline{VB}$ deci $\overline{AM}\perp$ pe VBC fiind perpendiculară pe două drepte din acest plan. Cealaltă proprietate se demonstrează analog.

18. a) Se prelungește $\overline{BA}$ cu segmentul $\overline{AE}=\overline{AC}$. Se demonstrează ușor că $MC=ME$, în $\triangle MBE$ putem scrie $\overline{MB}+\overline{ME}>\overline{BE}$ de unde rezultă rezultatul cerut.

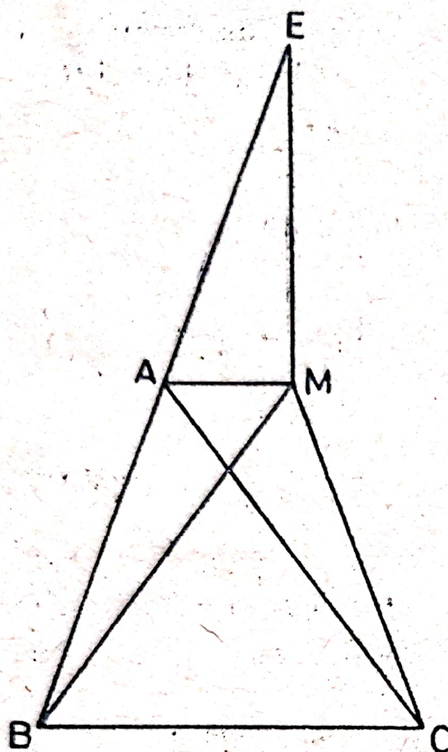


Fig. 7.97

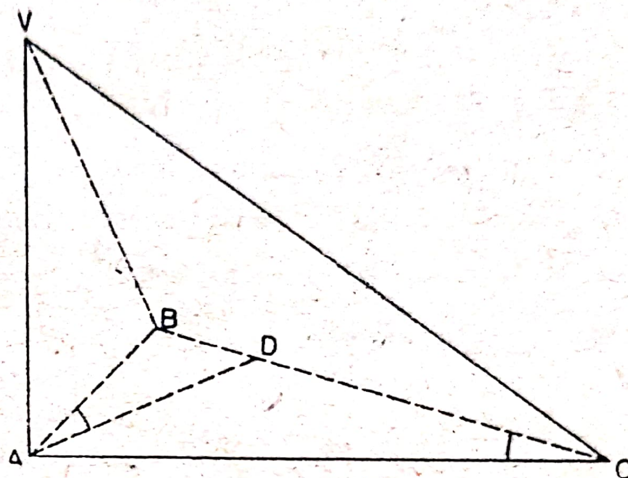


Fig. 7.98

b) Se utilizează formula care dă lungimea medianei în funcție de laturi în $\triangle ABC$ și $\triangle MBC$.

19. a) Relația dată se scrie $\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$ și deci $\triangle ABD \sim \triangle ACD$, de unde $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ACD$ și $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DAC$. Deci $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD + \sphericalangle DAC = \sphericalangle BAD + \sphericalangle ABD = 90°$.

b) $\overline{AB} = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\overline{BD} = \sqrt{b^2 - a^2 - c^2}$,

$\overline{BC} = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{b^2 - a^2 - c^2}}$, $\overline{AC} = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{b^2 - a^2 - c^2}}$

$\overline{VC} = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 - a^2) - a^2c^2}}{\sqrt{b^2 - a^2 - c^2}}$

20. a) Trebuie arătat că $\sphericalangle ODE = \sphericalangle BAC$. $\sphericalangle BAC = 180° - \frac{\overset{\frown}{DE}}{2} = \sphericalangle ODE$.

b) Dacă $\overline{AB} = \overline{AC}$ este evident că $\overline{AO} \perp \overline{DE}$
Dacă $\overline{AO} \perp \overline{DE}$, $\overline{AO}$ e înălțime și mediană în $\triangle ADE$

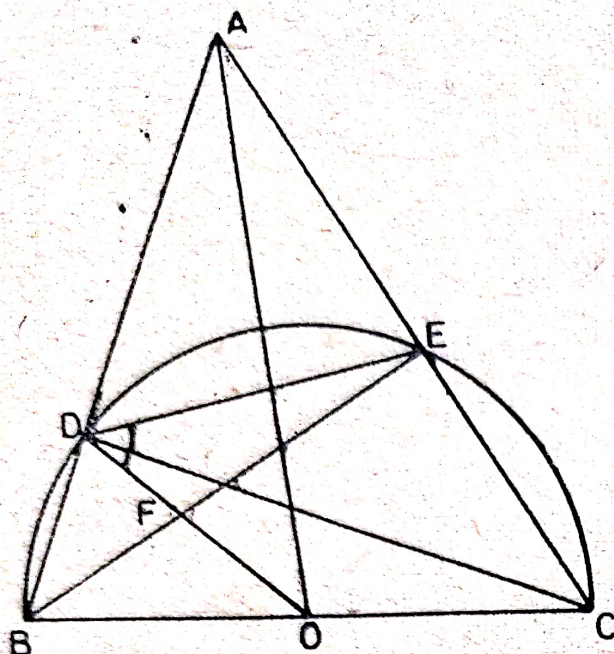


Fig.7.99

deci bisectoare a $\sphericalangle\, BAC$ și deci $\overline{AB} = \overline{AC}$

21. $BO'C = 180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 180 - \left(90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} =$ constant.

Locul geometric căutat este arcul de cerc din care se vede segmentul fix $\overline{BC}$ sub un unghi de $90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$.

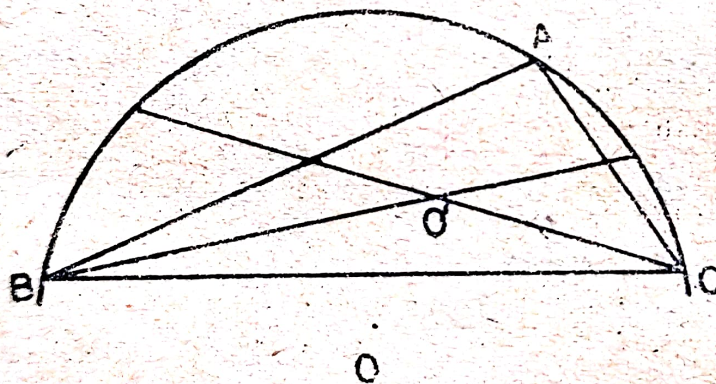


Fig. 7.100

22. a)b) Fie N' intersecția dintre dreapta BP și cercul dat; deoarece P este ortocentrul triunghiului QAB rezultă că unghiul $BN'A$ este drept, deci N' se află pe cercul de diametru AB; în concluzie N' coincide cu N. Atunci este evident că patratul $QNPM$ este inscriptibil și că punctele B, P, N, sînt coliniare. 2) Triunghiurile ACP și QCB sînt asemenea; rezultă $CP \cdot CQ = AC \cdot CB =$ constant.

23. a) Din egalitatea fețelor $AGB'A'$, $BCC'B'$, $A'B'C'D'$ rezultă notînd $AB = d$, $AA' = a$ întrucît $AB = A'B' = C'D'' = b$, $AA' = BB' = CC' = a$, $BC = B'C' = b$ deci

figura $A'B'C'D'$ este romb. b). Să presupunem că unghiul ABC este ascuţit şi că cele trei unghiuri din B sînt ascuţite. Se constată cu uşurinţă că $BB'AC$ este o piramidă triunghiulară regulată în care muchiile BB', BA, BC sînt egale cu a iar laturile bazei sînt $2a \sin \frac{x}{2}$. Observînd că volumul acestei piramide este $\frac{1}{6}$ din volumul paralelipipedului $ABCD\ A'B'C'D'$ se obţine că volumul paralelipipedului este $\frac{a^3 \sin^2 \frac{x}{2} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{x}{2}}}{3}$.

c) Planul $ABCD$ taie sfera circumscrisă paralelipipedului după un cerc, deci rombul $ABCD$ este, în cazul considerat înscris într-un cerc; se impune că unghiul BAC este drept.

24. Fie m panta coardei AB care trece prin focarul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Punctele A şi B au abscisele date de ecuaţia $m^2x^2 - px(m^2 + 2) + \frac{m^2p^2}{4} = 0$ fie ele x_1 şi x_2: ordonatele vor fi $y_1 = m\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)$, $y_2 = m\left(x_2 - \frac{p}{2}\right)$ şi deci $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{1 + m}\ \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1 + m^2} \cdot \frac{2p\sqrt{1 + m^2}}{m^2} = \frac{2p(1 + m^2)}{m^2}$. Punctul de contact al tangentei paralele $GUAB$ este $T\left(\frac{p}{2m^2}, \frac{p}{m}\right)$ şi deci $TF = \frac{p}{2} \cdot \frac{1 + m^2}{m^2}$. Cu aceasta $\overline{AB} = 4\overline{TF}$.

25. a) măs $\sphericalangle BMA = \frac{1}{2}$ (măs $\sphericalangle AQB$ — măs $\overset{\frown}{AP}$) $= \frac{1}{2}$ măs $\overset{\frown}{PB} =$ măs $\sphericalangle PQB$.

b) Folosind puterea punctului avem $MA^2 = MP \cdot MB$, $NA^2 = NQ \cdot NB$. Dar $MA^2 = MB^2 - AB^2$, $NA^2 = NB^2 - AB^2$; atunci $MP \cdot MP - NQ \cdot NB = MB^2 - AB^2 - (NB^2 - AB^2) = MB^2 - NB^2$.

26. Fie O vîrful triedrului şi fie A, B, C puncte situate pe cele trei muchii ale sale astfel ca $OA = OB = OC = a$. Atunci bisectoarele feţelor AOB, BOC, COA taie pe AB, BC, res-

pectiv CA în punctele M, N, P astfel că $MN = NP = PM =$ $= OM = ON = OP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Rezultă că unghiul MNO are $60°$.

27. Deoarece triunghiurile NAB şi BCM sînt isoscele şi au unghiurile din A şi C egale rezultă că unghiurile ANB şi CBM sînt egale, deci M, B, N sînt coliniare. La fel, triunghiurile BCM' şi $N'DM'$ sînt isoscele şi au unghiurile din D şi C egale; deci unghiurile $BB'C$ şi $N'M'D$ sînt egale şi atunci B, M', N' sînt coliniare. În triunghiul $MM'B$ mediana BC este jumătatea laturii corespunzătoare, MM'; rezultă că triunghiul este dreptunghic în B, adică dreptele MBN şi $M'N'B$ sînt ortogonale.

28. Fie a latura patratului de bază $ABCD$ şi $h = SO$, înălţimea piramidei, O fiind centrul pătratului. Atenţie deosebită la stabilirea secţiunii! Fie deci M, N mijloacele laturilor AB şi AD şi P mijlocul muchiei SC. Planul de secţiune va tăia baza după segmentul MN şi pe AC în punctul E, mijlocul segmentului AO; planul de secţiune intersectează planul ASC după o dreaptă, anume dreapta EP şi deci înălţimea SO, într-un punct F. Fie Q proiecţia punctului P pe planul bazei; evident Q este mijlocul segmentului OC, deci $EO =$ $= OQ$; rezultă atunci că $OF = \frac{1}{2}\ PQ = \frac{1}{4}\ SO$. Întrucît MN este paralelă cu planul BSD rezultă că planul MNP taie planul BSD după o dreaptă paralelă cu MN şi deci cu BD: este paralela prin F la BD; aceasta intersectează muchiile BS şi SD în punctele G, respectiv H. Cu aceasta rezultă că secţiunea este pentagonul $MGPHN$. Pentru a determina aria acestui pentagon să observăm că el se descompune în trapezul isoscel $MGHN$ şi triunghiul isoscel GPH. Observînd că $EF = FP$ rezultă că aria pentagonului este $\frac{EF(MN + 2HG)}{2}$. Se constată uşor că $MN = a\sqrt{2}$, $HG =$ $= \frac{3a\sqrt{2}}{4}$ iar $EF = \frac{1}{4}\sqrt{4^2 + 2a^2}$ şi deci aria pentagonului este $\frac{a\sqrt{2b^2 + 4a^2}}{4}$

29. Fie M intersecţia dreptelor $A'D$ şi $B'C'$, N intersecţia dreptelor $A'E$ şi $B'C'$. Se arată uşor că $A'D = DM$, $A'E = EN$. Deci ED este linie mijlocie în triunghiul AMN; rezultă $A'I = II'$

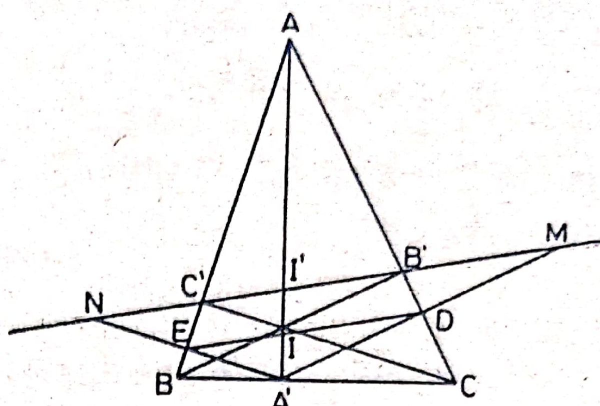


Fig. 7.101.

30. a) Patrulaterul $MBFP$ este inscriptibil; deci $\sphericalangle MBP = \sphericalangle MFP$; patrulaterul $MAEP$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle MAP = \sphericalangle MEP$; rezultă $\sphericalangle MBP + \sphericalangle MAP = 90°$ şi deci triunghiul APB este dreptunghic în P. b) Locul geometric este cercul de diametru AB.

31. a) Fie O centrul cubului (deci mijlocul segmentului AC). Piramidele cu baza $BA'D$ şi cu vîrfurile în A, respectiv O, sînt evident regulate. Rezultă că BDA' este perpendicular pe AO, deci vîrfurile D, B, A' se proiectează în acelaşi punct pe AC'. La fel, punctele B', C, O' se proiectează în acelaşi punct pe AC'.

b) Fie P punctul în care se proiectează pe AC' punctul B. Atunci $\overline{AB}^2 - \overline{AP}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OP}^2$. Deoarece $\overline{AB} = a$, $\overline{OB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \overline{AO}$, rezultă $\overline{AP} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Aşadar proiecţiile respective împart pe $\overline{AC'}$ în trei părţi egale.

32. Să alegem un sistem de coordonate cu centrul în P (0, 0) şi fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Deoarece segmentele PA' şi BC au acelaşi mijloc rezultă că $x_{A'} = x_2 + x_3$, $y_{A'} = y_2 + y_3$ La fel $x_{B'} = x_3 + x_1$, $y_{B'} = y_3 + y_1$, $x_{C'} = x_1 + x_2$, $y_C = y_1 + y_2$. Ecuaţiile dreptelor AA', BB', CC' sînt $\Delta_1 = x(y_2 + y_3 - y_1) - y(x_2 + x_3 - x_1) + y_1(x_2 + x_3) - x_1(y_2 + y_3) = 0$

$\Delta_2 = x(y_3 + y_1 - y_2) - y(x_3 + x_1 - x_2) + y_2(x_3 + x_1) - x_2(y_3 + y_1) = 0$ şi respectiv

$$\Delta_3 = x(x_1 + y_2 - y_3) - y(x_1 + x_2 - x_3) + y_3(x_1 + x_2) - x_3(y_1 + y_2) = 0$$

de unde se deduce imediat că cele trei drepte sînt concurente în punctul $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2}\right)$

33. Fie P punctul în interiorul pătratului astfel ca triunghiul PDC să fie echilateral. Se arată uşor că unghiurile PBA şi PAB au 15°. Deoarece există o singură semidreaptă situată de o anumită parte a unei semidrepte care face cu aceasta un unghi dat, rezultă şi reciproca afirmaţiei demonstrate, adică afirmaţia din enunţ.

34. a) Evident. b) $OP = \sqrt{5}$, $OQ = \frac{\sqrt{11}}{2}$

35. a) Avem $BD^2 = BE \cdot AB$, $CD^2 = CF \cdot AC$, $AC^2 = CD \cdot BC$, $AB^2 = BD \cdot BC$ de unde rezultă imediat $\frac{BE}{CF} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$.

b) Din relaţia evidentă $AB \cdot AC = BC \cdot AD$ rezultă $AD^2(AB^2 + AC^2) = AB^2 \cdot AC^2$ şi deci $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$:

c) Din relaţiile de la a) rezultă şi $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF} \cdot \frac{CD}{BD}$

36. a) Triunghiul ASB este echilateral, deci $AB = a$. Triunghiul ASC este dreptunghic deci $AC = a\sqrt{2}$. În triunghiul BSC avem $AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2AS \cdot SC \cdot \cos 120° = 2a^2 + a^2 = 3a^2$, deci $BC = a\sqrt{3}$. Să remarcăm faptul că triunghiul ABC este dreptunghic în A, deoarece $BC^2 = AB^2 + AC^2$. b) Aria totală a piramidei este $\frac{a^2}{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$. c) Deoarece muchiile SA, SB, SC sînt egale rezultă că S' este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, adică mijlocul laturii BC. Rezultă $SS' = \frac{a}{2}$.

37. a) Fie $C(m, 0)$ cu $|m| < 2a$ (pentru ca triunghiul să existe). Coordonatele punctului B sînt $\frac{m}{2}$ şi $\frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - m^2}$ $\left(\text{sau } -\frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - m^2}\right)$. Coordonatele punctului M sînt $x = \frac{3m}{4}$ şi $y = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2 - m^2}$ $\left(\text{sau } -\frac{1}{4}\sqrt{4a^2 - m^2}\right)$. Elimi-

nînd pe m între coordonatele din M găsim locul geometric $x^2 + 9y^2 = \frac{9a^2}{4}$, o elipsă de semiaxe $\frac{3a}{2}$ şi $\frac{a}{2}$.
Ecuaţia dreptei BC: $\sqrt{4a^2 - m^2} \cdot x + my - m\sqrt{4a^2 - m^2} = 0$, iar ecuaţia tangentei în M la elipsa loc geometric este $3mx + 9\sqrt{4a^2 - m^2}\, y - 9a^2 = 0$. Condiţia de coincidenţă conduce la $m = a\sqrt{3}$ sau $m = -a\sqrt{3}$.

38. a) Dacă m_a semnifică lungimea medianei din A atunci $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}$ şi deci $AG = \frac{1}{3}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}$
$BG = \frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+c^2) - b^2}$ $CG = \frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+b^2) - c^2}$;

b) Din ipoteză $BG^2 + CG^2 = a^2$ adică $\frac{1}{9}[2(a^2 + c^2 + a^2 + b^2) - b^2 - c^2] = a^2$ de unde $5a^2 = b^2 + c^2$.

39. Fie A, B două puncte fixe şi k^2 o constantă. Fie O mijlocul segmentului AB. Dacă M este astfel încît $MA^2 + MB^2 = k^2$ atunci $MO^2 = \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2) - \frac{1}{4}AB^2 = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}AB^2$ este constant. Deci M descrie un cerc cu centrul O avînd raza $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$. Condiţia de existenţă a problemei $2k^2 \geqslant B^2$.

40. a) Condiţia necesară şi suficientă ca BC să fie tangenta cercului ABO este ca unghiul $\hat{CBD}$ să aibă măsură $\frac{1}{2}$ din măsura arcului AD ceea ce este evident realizat.

b) Scriind puterea punctului C în raport cu cercul ABD avem $CB^2 = CD \cdot AC$.

41. a) $CC' = \sqrt{x^2 + (a-x)^2 - 2x(a-x)\cos 60^\circ} = \sqrt{3x^2 - 3ax + a^2}$.

b) Fie D intersecţia dreptelor AC şi BC'. Triunghiul ADB este un triunghi echilateral fix. Patrulaterul $DCMC'$ este paralelogram deci mijlocul segmentului CC' este şi mijloc al segmentului DM. Rezultă că locul mijlocului segmentului CC' este linia mijlocie a triunghiului ADB.

42. Cele trei sfere ocupă un volum maxim dacă centrele lor se găsesc într-un plan care trece prin centrul sferei mari. Pro-

blema se reduce la a determina raza a trei cercuri egale tangente între ele și tangente interior unui cerc de rază R. Se obține $r = R(2\sqrt{3} - 3)$.

43. Fie $M(x_0, y_0)$, $y_0^2 = 2px_0$. Tangenta în M are ecuația $yy_0 = p(x + x_0)$ și taie axa Ox în punctul $T(-x_0, 0)$. Normala în M are ecuația $y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0)$ și taie axa Ox în $N(p + x_0, 0)$. Perpendiculara în M pe OM este de ecuație $y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$ și taie axa Ox în punctul $P\left(\frac{y_0^2 + x_0^2}{x_0}, 0\right)$.

a) $2OP - TP = 2 \cdot \frac{y_0^2 + x_0^2}{x} - \left(\frac{y_0^2 + x_0^2}{x_0} + x_0\right) = \frac{y_0^2}{x_0} = \frac{2px_0}{x_0} = 2p$

b) Centrul de greutate al triunghiului TMN are coordonatele $x = \frac{x_0 + (-x_0) + p + x_0}{3} = \frac{p + x_0}{3}$, $y = \frac{y_0}{3}$. Deoarece $y_0^2 = 2px_0$, eliminînd pe x_0 și y_0 găsim locul geometric al centrului de greutate al triunghiului TMN: parabola

$$y^2 = \frac{2p}{3}x - \frac{2}{3}p^2$$

44. a) Patrulaterul $PKAN$ este inscriptibil, rezultă $\sphericalangle PKN = \sphericalangle PAN$; patrulaterul $PKBL$ este inscriptibil; rezultă $\sphericalangle PKL = \sphericalangle PBL$. Dar unghiurile PAD și PBC sînt egale și deci unghiurile PKN și PKL sînt egale. b) Din cele demonstrate la punctul a) rezultă că $\sphericalangle NKL = 2\sphericalangle DAP$, $\sphericalangle NML = 2\sphericalangle ADP$. Prin urmare $\sphericalangle NKL + \sphericalangle NML = 2(\sphericalangle DAP + \sphericalangle ADP) = 180°$.

45. a) Evident, AD este perpendiculară pe EC și CD este perpendiculară pe AE. Așadar D este ortocentrul triunghiului EAC. Rezultă că DE este perpendicularăpe AC.
b) Patrulaterul $ABCE$ este inscriptibil (în cercul de diametru BE) deci unghiurile EAC și EBC sînt egale. Rezultă că unghiurile AED și BEC sînt egale, avînd complemente egale.

46. a) Raza cercului de contact dintre con și sferă este $x = R \sin 2\alpha$. b). Raportul ariilor calotelor este egal cu raportul înălțimilor lor. Cele două înălțimi se găsesc rezolvînd sistemul $u + v = 2R$, $uv = R^2 \sin^2 2\alpha$. Se obține $u = 2R \cos^2\alpha$, $v = 2R \sin^2\alpha$ și deci ariile celor două calote se află în raportul $\operatorname{tg}^2\alpha$.

47. a) Patrulaterul $ABMP$ este inscriptibil, deci P descrie acelaşi cerc ca M.
b) Locul geometric al punctului P este o conică.
c) Să observăm că dacă asociem lui P un punct prin metoda prin care pe el l-am asociat lui M, atunci acel punct este chiar M. Rezultă că dacă locul lui P cînd M descrie o mulţime Γ de puncte este Γ_1, locul lui P cînd M descrie pe Γ_1 este Γ. Deci dacă P descrie dreapta (d) M descrie conica de la b).

48. a) Deoarece AD este paralelă cu tangenta BC deducem că $\overset{\frown}{EA} = \overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{BE}$; aceasta arată că unghiurile ECF şi EAC sînt egale. De aici se obţine că triunghiurile ACF şi ECP sînt asemenea. b) Din asemănarea celor două triunghiuri rezultă $FC^2 = FR \cdot FA$.
c) Puterea punctului F faţă de cerc este $FB^2 = FE \cdot FA$. Deducem $FB = FC$.

49. $AB = r\left(2 + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}\right)$, $BC = 2r(2 + \sqrt{3})$

50. $AE^2 = AC^2 + (AB^2 - AD^2) = AB^2 + (AC^2 - AD^2) = AF^2$.

51. a) Fie x o muchie a piramidei; atunci diagonala bazei este $x\sqrt{2}$ şi rezultă $h^2 = x^2 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2$ de unde $x = h\sqrt{2}$
b) apotema piramidei este $a = h\sqrt{\frac{3}{2}}$
c) Concluzia este impusă de egalitatea $(x\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2$ care exprimă valabilitatea teoremei lui Pitagora în triunghiul secţiunii axial-diagonale.

52. Ecuaţia cercului înscris în pătratul $ABCD$ este $x^2 + y^2 - a^2 = 0$
b) Fie $y + a = m(x + a)$ o dreaptă oarecare prin A. $E(a, 2am - a)$, $F\left(-a + \frac{2a}{m}, a\right)$, $I(a, am - a)$. Ecuaţia dreptei FI este $m(m - 2)x - (2m - 2)y + a(m^2 - 2m + 2) = 0$ şi se obţine uşor că distanţa de la o la aceasta este a. c) Din ecuaţiile dreptelor FI şi DE se obţin coordonatele intersecţiei.

Capitolul VIII

ANALIZĂ MATEMATICĂ

ŞIRURI

1. Relaţia de recurenţă se poate scrie $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$. Notînd $b_n = a_n + 1$ obţinem $b_{n+1} = 2b_n$ de unde $b_{n+1} = 2^{n+1}$ pentru orice $n \geqslant 1$, relaţii ce se verifică şi pentru $n = 0$; $b_1 = 2$. Rezultă $a_n = 2^n - 1$ pentru orice $n \in N$.

2. Încercăm să determinăm x astfel ca $a_{n+1} + x = (a_n + x)$. Se obţine $x = \frac{\beta}{\alpha - 1}$ pentru $\alpha \neq 1$. Rămînînd la această ipoteză, punînd $b_n = a_n + x$, obţinem $b_{n+1} = \alpha b_n$ de unde $b_{n+1} = \alpha^n b_1$ cu $b_1 = a + \frac{\beta}{\alpha - 1}$ de unde se obţine $a_n = a \cdot \alpha^n + \frac{\beta(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1}$. Pentru $\alpha = 1$ şirul este o progresie aritmetică şi obţinem $a_n = a + (n - 1)\beta$.

3. Avem $a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \ldots a_{n-1}) + a_n = 2a_n$ pentru $n \geqslant 3$ de unde deducem $a_{n+1} = 2^{n-2}\, a_3$ pentru $n \geqslant 3$; deoarece $a_3 = a + b)$ rezultă $a_{n+1} = 2^{n-2}\,(a + b)$.

4. Evident $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, $a_4 = 0$. Prin inducţie se arată că $a_{4n+1}, = 1$, $a_{4n+a} = a_{4n+4} = 0$, $a_{4n+3} = -1$ pentru orice $n \geqslant 0$.

5. Prin inducţie se obţine $a_n = \sqrt{n}$ pentru orice $n \in N$.

6. Relaţia dată se scrie $a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1})$. Să notăm $b_{n-1} = a_n\, a_{n-1}$ pentru $n \geqslant 2$; rezultă $b_n = 2 \cdot b_{n-1}$ şi deci $b_n = 2^{n-1} \cdot b_1 = 3 \cdot 2^{n-1}$ pentru $n \geqslant 2$.

Prin urmare $a_{n+1} - a_n = 3\cdot 2^{n-1}$ pentru $n \geqslant 2$ de unde

$$\sum_{k=2}^{n}(a_{k+1} - a_k) = 3\sum_{k=2}^{n} 2^{k-1} \text{ şi deci } a_{n+1} = a_2 + 3\sum_{k=2}^{n} 2^{k-1} =$$

$$= 3\left(1 + \sum_{k=2}^{n} 2^{k-1}\right) 3. \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 3(2^n - 1) \text{ pentru orice } n \in N$$

7. Fie $\varepsilon > 0$; atunci pentru orice $n \in N \geqslant \left[\frac{|a|}{\varepsilon}\right] + 1$ avem $\left|\frac{a}{n} - 0\right| < \varepsilon$ şi prin urmare $\lim\limits_{n} \frac{a}{n} = 0$.

8. Se observă că $\left|\frac{n^3 + 2n^2}{2n^3 + n + 1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{4n^2 - n - 1}{2(2n^3 + n + 1)}\right| <$ $< \frac{4n^2}{4n^3 + 2n + 2} \leqslant \frac{4n^2}{4n^3 + 4n} = \frac{n}{n^2 + 1}$ pentru orice $n \in N$. Fie $\varepsilon > 0$; atunci $\frac{n}{n^2 + 1} < \varepsilon$ se realizează pentru orice $n \in N$ cu $n \geqslant$ $\geqslant \left[\frac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon^2}}{2}\right] + 1$ ceea ce demonstrează afirmaţia.

9. $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 0| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{2n}}$. Luînd $n \geqslant \left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right] + 1$ se obţine $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \varepsilon$.

10. Se vede că $\sqrt{4n^2 + 3n + 1} - 2n - \frac{3}{4} > 0$ pentru orice număr natural n. Se constată că, pentru $\varepsilon > 0$, luînd $n(\varepsilon) =$ $= \left[\frac{\frac{7}{16} - \frac{3\varepsilon}{2} - \varepsilon^2}{4\varepsilon}\right] + 1$ avem pentru $n \geqslant n(\varepsilon)$ $\sqrt{4n^2 + 3n + 1} -$ $- 2n < \varepsilon$.

11. Să presupunem că există un şir $(a_n)_{n \in N}$ pentru care mulţimea limitelor ar conţine mai mult de un element şi să alegem din această mulţime două elemente diferite 1_1 şi 1_2 ($1_1 \neq$ $\neq 1_2$).

Fie $\varepsilon = \frac{|1_1 - 1_2|}{3}$

Conform definiţiei limitei unui şir convergent, există $n_1(\varepsilon)$ astfel ca pentru $n \geqslant n_1(\varepsilon)$ $|a_n - 1_1| < \varepsilon$, există $n_2(\varepsilon)$ astfel ca pentru $n \geqslant n_2(\varepsilon)$ $|a_n - 1_2| < \varepsilon$.

Deci pentru $n \geqslant \max \{n_1, n_2\}$ avem simultan $|a_n - 1_1| < \varepsilon$ și $|a_n - 1_2| < \varepsilon$; dar atunci $|1_1 - 1_2| < \frac{2\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}|1_1 - 1_2|$ ceea ce, evident, este absurd.

12. Fie $1 = \lim_n a_n \neq 0$. Să presupunem că $1 > 0$.

Atunci există n_0 astfel ca $|a_n - 1| < \frac{l}{2}$ pentru orice $n \geqslant n_0$, rezultă $|a_n| \geqslant \frac{l}{2}$ pentru orice $n \geqslant n_0$ și este, deci suficient să luăm $\alpha = \frac{l}{2}$. Dacă $1 < 0$ se raționează analog.

13. Fie $(a_{1_n})_{n\in N}$ și $(a_{k_n})_{n\in N}$ două subșiruri convergente ale șirului $(a_n)_{n\in N}$. Să definim $m_1 = 1_1$ $m_2 = \min \{k_j : k_j > m_1\}$, $m_3 = \min \{1_j : 1_j > m_2\}, \ldots,$ $m_{2n} = \min \{k_j : k_j > m_{2n-1}\}$, $m_{2n+1} = \min \{1_j : 1_j > m_{2n}\}, \ldots$ Atunci, cum se vede ușor $(a_{m_n})_{n\in N}$ este subșir al fiecăruia din șirurile $(a_{1_n})_{n\in N}$ și $(a_{k_n})_{n\in N}$ și în același timp, este subșir al șirului $(a_n)_{n\in N}$. Prin urmare el este convergent. Deoarece limita unui șir nu poate fi alta decît limita unui subșir al său rezultă $\lim_n a_{1_n} = \lim_n a_{k_n} = \lim_n a_{m_n}$; așadar cele două subșiruri au aceeași limită.

14. Avem $|a_n \cdot b_n| \leqslant M \cdot |a_n|$ pentru orice $n \in N$ unde $|b_n| \leqslant M$ pentru orice $n \in N$. Fie $\varepsilon > 0$; deoarece $a_n \to 0$ rezultă că există $n(\varepsilon)$ astfel ca $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ pentru orice $n \geqslant n(\varepsilon)$. Atunci $|a_n \cdot b_n| < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant n(\varepsilon)$ și deci $\lim_n a_n \cdot b_n = 0$

15. Subșirul $(a_{2n})_{n\in N}$ este convergent către $\frac{1}{2}$, iar subșirul $(a_{2n+1})_{n\in N}$ este convergent către $-\frac{1}{2}$; prin urmare șirul dat nu este convergent.

16. Se procedează ca la exercițiul precedent.

17. Idem.

18. Fie $\varepsilon > 0$; există $n(\varepsilon)$ astfel ca $|a_n - a) < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \geqslant n(\varepsilon)$.

Dacă $n \geqslant n(\varepsilon)$ atunci pentru orice p natural $n + p > n(\varepsilon)$ şi deci $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ şi $|a_{n+p} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$; rezultă $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant n(\varepsilon)$ şi orice p natural.

19. Arătăm că există $\varepsilon_0 \left(= \frac{1}{2}\right)$ astfel că pentru orice număr natural n există $p(=n)$ astfel că $|a_{n+p} - a_n| > \varepsilon_0$. În adevăr $a_{n+n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$. Aşadar şirul dat nu satisface condiţia (necesară) din exerciţiul 18 (pentru convergenţă) şi deci nu este convergent. Fiind crescător, în mod evident, dar neconvergent, rezultă că şirul dat este nemărginit la dreapta şi deci $\lim\limits_{n} a_n = +\infty$

20. Să notăm $\frac{a_n}{b_n} - 1 = \varepsilon_n$, unde $1 = \lim\limits_{n} \frac{a_n}{b_n}$; atunci $a_n = 1 b_n + b_n \varepsilon_n$ şi deci $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} - 1 = \frac{b_1 \varepsilon_1 + \ldots + b_n \varepsilon_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$

Fie $\varepsilon > 0$; există $n_1 \in N$ astfel ca $\left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $n \geqslant n_1$

Rezultă că pentru $n \geqslant n_1$ putem scrie succesiv

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} - 1 =$$

$$= \frac{b_1 \varepsilon_1 + \ldots + b_{n_1} \varepsilon_{n_1} + b_{n_1+1} \varepsilon_{n_1+1} + \ldots + b_n \varepsilon_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} =$$

$$= \frac{b_1 \varepsilon_1 + \ldots + b_{n_1} \varepsilon_{n_1}}{s_n} + \frac{b_{n_1+1} \varepsilon_{n_1+1} + \ldots + b_n \varepsilon_n}{s_n}$$

de unde

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} - 1\right| < \frac{|b_1| \cdot |\varepsilon_1| + \ldots + |b_{n_1}| \cdot |\varepsilon_{n_1}|}{s_n} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{b_{n_1+1} + \ldots + b_n}{a_n} < \frac{b_1 |\varepsilon_1| + \ldots + b_{n_1} |\varepsilon_{n_1}|}{s_n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Suma $b_1|\varepsilon_1| + \ldots + b_{n_1} \cdot |\varepsilon_{n_1}|$ este constantă și cum $\lim_n s_n = +\infty$ rezultă că există $n_2 \in N$ astfel ca $\frac{b_1|\varepsilon_1| + \ldots + b_{n_1}|\varepsilon_{n_1}|}{s_n} < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \geq n_2$. Atunci pentru $n \geq max\{n_1, n_2\}$ avem $\left|\frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n} - 1\right| < \varepsilon$ ceea ce arată că șirul $\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}\right)_{n \in N}$ este convergent către 1.

21. Se aplică exercițiul 20) luînd $b_n = 1$ pentru fiecare $n \in N$.

22. Fie $1 = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Fie α un număr pozitiv oarecare și să alegem $\varepsilon > 0$ astfel ca $(1 + \varepsilon)^2 < 1 + \alpha$. Există $n_1 \in N$ astfel ca $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_1$

Să punem $\frac{a_{n+1}}{a_n} - l = l\varepsilon_n$ pentru $n \in N$

Atunci $a_{n+1} = a_1\, l^n(1 + \varepsilon_1)\ldots(1 + \varepsilon_n)$
Să remarcăm faptul că putem presupune $1 + \varepsilon_k < 0$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots$, obținem

$\frac{\sqrt[n]{a_{n+1}}}{l} = \sqrt[n]{a_1(1 + \varepsilon_1)\ldots(1 + \varepsilon_{n_1})}\ \sqrt[n]{1 + \varepsilon_{n_1+1})\ldots(1 + \varepsilon_n)}$.

Evident $\lim_n \sqrt[n]{a_1(1 + \varepsilon_1)\ldots(1 + \varepsilon_{n_1})} = 1$ și deci, presupunînd $a_1 \geq 1$, există $n_2 \in N$ astfel ca $1 < \sqrt[n]{a_1(1+\varepsilon_1)\ldots(1+\varepsilon_{n_1})} < < 1 + \varepsilon$ pentru $n \geq n_2$. Deoarece $1 + \varepsilon < 1 + \varepsilon$ pentru $k \geq n_1$ rezultă că $\sqrt[n]{(1 + \varepsilon_{n_1+1})\ldots(1 + \varepsilon_n)} < 1 + \varepsilon$. Cu aceasta rezultă

$$1 < \frac{\sqrt[n]{a_{n+1}}}{l} < (1 + \varepsilon)^2 < 1 + \alpha$$

pentru $n \geq \max\{n_1, n_2\}$; deci $\lim_n \sqrt[n]{a_{n+1}} = l$

Este momentul să facem unele precizări. Cititorul poate fi surprins de alegerile făcute și ar putea să se întrebe cum de au fost făcute acestea (de pildă $(1 + \varepsilon)^2 < 1 + \alpha$).

Trebuie spus că autorul a consumat mai multe pagini pentru a ajunge la această redactare finală, concisă. În desfăşurarea raţionamentului important a fost să se ajungă la

$$\frac{\sqrt[n]{a_{n+1}}}{l} = \sqrt[n]{a_1(1+\varepsilon_1)\ldots(1+\varepsilon_{n_1})} \cdot \sqrt[n]{(1+\varepsilon_{n_1+1})\ldots(1+\varepsilon_n)}$$

din care se degajă ideea alegerii lui $\varepsilon > 0$ astfel ca $(1+\varepsilon)^2 < 1+\alpha$. Presupunem $a_1 \geqslant 1$, neesenţială în fapt, o putem face deoarece, în caz contrar, am adăuga şirului încă un termen, ceea ce nu ar schimba ipoteza.

23. Fie $b_n = a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$ pentru orice $n \in N$. Evident $\frac{b_{n+1}}{b_n} = a_{n+1}$; conform ipotezei există $\lim\limits_n \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

Potrivit exerciţiului 22) există $\lim\limits_n \sqrt[n]{b_n}$ adică $\lim\limits_n \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$ şi este egală cu $\lim\limits_n a_n$

24. Aplicăm rezultatul din exerciţiul 20; luînd $a_n = \sqrt{1+n^2}$

$$\text{şi } b_n = n \text{ avem } \lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$$

$$\text{şi deci } \lim_n \frac{\sqrt{1+1^2}+\sqrt{1+2^2}+\ldots+\sqrt{1+n^2}}{1+2+\ldots+n} = 1$$

$$\text{adică } \lim_n \frac{\sqrt{1+1^2}+\ldots+\sqrt{1+n^2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = 1;$$

$$\text{atunci } \lim_n \frac{\sqrt{1+1^2}+\sqrt{1+2^2}+\ldots+\sqrt{1+n^2}}{n^2} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt{1+1^2}+\ldots+\sqrt{1+n^2}}{n(n+1)} \cdot \lim \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

25. Se verifică imediat că şirul este descrescător şi că $\frac{1}{2} < a_n < \frac{9}{10}$ pentru orice $n \geqslant 4$ de unde rezultă că şirul este convergent şi $\frac{1}{2} < \lim a_n < 1$

26. Avem $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{a+\sqrt{a}}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a}}{a}} > 1$ şi prin inducţie arătăm că $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ pentru orice n. În acest scop folosim observaţia $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$; atunci presupunînd $a_k > a_{k-1}$ avem

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \sqrt{\frac{1+a_k}{a+a_{k-1}}} > 1$$

Evident $0 < a_n$ pentru orice n; pe de altă parte $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$ pentru orice $n \geqslant 2$ şi deci $a_n < \sqrt{a + a_n}$, întrucît $a_{n-1} < a_n$; inegalitatea $a_n < \sqrt{a + a_n}$ este echivalentă cu $a_n^2 - a_n - a < 0$. Rezultă că, pentru orice $n \geqslant 2$, a_n se află în mulţimea soluţiei a inecuaţiei $x^2 - x - a < 0$ care este $\left(\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)$ şi ţinînd seama de observaţia de mai sus rezultă $0 < a_n < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ pentru orice n natural. Fiind monoton şi mărginit rezultă că şirul dat este convergent. Fie $l = \lim a_n$.

Atunci din $a_n^2 = a + a_{n-1}$ rezultă $l = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

27. Notînd $b' = b + \sqrt{b + \ldots + \sqrt{b}}$, unde radicalul este scris de $k-1$ ori reducem problema la situaţia $k = 1$. Aşadar fie $a_n = \sqrt{a + \ldots \sqrt{a + \sqrt{b}}}$ unde a este scris de n ori iar b o dată. Ca în exerciţiul precedent se arată că şirul $(a_n)_{n\in N}$ este monoton crescător şi mărginit şi că $\lim\limits_{n} a_n = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

28. După cum se ştie $b_1 \leqslant a_1$ (media geometrică este mai mică decît media aritmetică) şi în general $b_n \leqslant a_n$ pentru orice n. Observăm că $b_1 \leqslant b_2 \leqslant a_2 \leqslant a_1$; prin inducţie arătăm că $b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_n \leqslant a_{n+1}$ pentru orice n. De aici rezultă că şirul $(b_n)_{n\in N}$ este monoton crescător şi mărginit, iar şirul $(a_n)_{n\in N}$ este monoton descrescător şi mărginit. Prin urmare şirurile sînt convergente.

Din $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ rezultă că $\lim a_n = \lim b_n$.

29. Din relațiile $a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} = k$, $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p+1} = k$ deducem $a_{n+p+1} = a_n$ pentru orice $n \in N$, deci șirul este periodic.

30. Din relațiile $a_n + 2a_{n+1} + \ldots + pa_{n+p-1} = k$, $a_{n+1} + 2a_{n+2} + \ldots + pa_{n+p} = k$ deducem imediat $pa_{n+p} = a_{n+1} + \ldots + a_{n+p-1}$ pentru orice n natural. Fie $\alpha = \min \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ și $\beta = \max \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$. Din $pa_{p+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_p$ rezultă că $a_{p+1} \in [\alpha, \beta]$. Presupunînd acum că $a_k \in [\alpha, \beta]$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n + p - 1$, atunci din $pa_{n+p} = a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p-1}$ deducem $a_{n+p} \in [\alpha, \beta]$ și deci $a_n \in [\alpha, \beta]$ pentru orice n natural: șirul $(a_n)_{n\in N}$ este mărginit. Rămîne să arătăm că șirul este convergent. Să remarcăm la început că, din $pa_n = a_{n-1} + \ldots + a_{n-p}$ rezultă $a_n \leqslant \max \{a_{n-1}, \ldots a_{n-p}\}$.

Fie $b_n = \max \{a_{n-1}, \ldots, a_{n-p}\}$; atunci $b_{n+1} = \max \{a_n, a_{n-1}, \ldots a_{n-p+1}\} \leqslant b_n$. Șirul $(b_n)_{n\in N}$ este deci descrescător și cum, evident, $b_n \in [\alpha, \beta]$ rezultă că există $\lim_n b_n = l$.

Arătăm că l este și limita șirului $(a_n)_{n\in N}$. Fie $\varepsilon > 0$ există n_0 astfel încît pentru $n \geqslant n_0$ să avem $l \leqslant b_n < l + \varepsilon$
Fie acum $n \geqslant n_0$, arbitrar și fie $j \in \{1, 2, \ldots p\}$

Atunci $a_{n+j} = \frac{1}{p}(a_{n+j-1} + \ldots + a_{n+j-p}) = \frac{1}{p} a_n +$

$$+ \frac{1}{p} \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ i\neq j}} a_{n+j-1} \leqslant \frac{1}{p} a_n + \frac{p-1}{p} \cdot \max \; \{a_{n+j-1}; \; 1 \leqslant i \leqslant p,$$

$$i \neq j\} \leqslant \frac{1}{p} a_n + \frac{p-1}{p} \cdot b_{n+j} \leqslant \frac{1}{p} a_n + \frac{p-1}{p}(l + \varepsilon).$$

Deoarece $b_{n+p+1} = \max \{a_{n+j}; \; j = 1, 2, \ldots p\}$ rezultă că există $j_0 \in \{1,2, \ldots p\}$ astfel ca $b_{n+p+1} = a_{n+j_0}$. Deci $l \leqslant b_{n+p+1}$

$= a_{n+j_0} \leqslant \frac{1}{p} a_n + \frac{p-1}{p}(1+)$ care conduce la $l - (p-1)\varepsilon \leqslant$

$\leqslant a_n$. Deoarece $a_n \leqslant b_n < l + \varepsilon$ pentru $n \geqslant n_0$, rezultă $l - (p-1)\varepsilon \leqslant a_n < l + \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant n_0$ și deci $\lim a_n = l$.

Ținînd seama că $a_1 + 2a_2 + \ldots + pa_p = a_{n+1} + \ldots + pa_{n+p}$ pentru orice n rezultă $l(1 + 2 + \ldots + p) = k$ și deci

$$l = \frac{k}{1 + 2 + \ldots + p} = \frac{2k}{p(p+1)}$$

31. Deoarece pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin x \in (0,1)$ și $\sin x < x$; rezultă că $a_{n+1} < a_n$ pentru orice n: șirul este monoton descrescător. Fiind mărginit șirul este convergent, limita lui este 0.

32. Pentru $a > 1$ se arată că șirul este strict crescător; pentru $0 < a < 1$ subșirul termenilor de rang impar este strict crescător iar subșirul termenilor de rang par este strict descrescător, orice termen al celui de al doilea subșir fiind mai mare decît orice termen al primului subșir. Se poate arăta că pentru $a \in \left(0, e^{\frac{1}{e}}\right)$ șirul este convergent iar pentru $a \in \left(e^{\frac{1}{e}}, +\infty\right)$ șirul este divergent.

33. a) Deoarece $\lim\limits_{n} \frac{n+1}{n} = 1$ rezultă, conform exercițiului 22, că $\lim\limits_{n} \sqrt[n]{n} = 1$ și deci șirul $(\sqrt[n]{n})_{n\in N}$ este mărginit, prin urmare șirul $(a_n)_{n\in N}$ este mărginit.
Folosind faptul că $e < 3$ se arată că pentru $n > 3$ $a_{n+1} < a_n$, adică șirul este descrescător.

b) Formula dată este aproape evidentă. De aici se deduce că $\lim a_n = 0$.

34. Punînd condiția $a_2 > a_1$ se obține $a \in \left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ și în acest caz se demonstrează prin inducție că $a_{2n-1} < a_{2n+1} < a_{2n+2} < a_{2n}$ pentru orice $n \in N$. Prin urmare șirul termenilor de rang impar este crescător și mărginit iar șirul termenilor de rang par este descrescător și mărginit; ambele sînt convergente; notînd cu α și β limitele celor două subșiruri, din relația $a_{n+1} = \sqrt{1 - a_n}$ obținem $\alpha = \sqrt{1-\beta}$ și $\beta = \sqrt{1-\alpha}$ sistem care are soluția $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Dacă $a \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$, observînd că $\sqrt{1-a} \in \left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ rezultă că renunțînd la primul termen al șirului ne găsim în situația analizată mai sus. Așadar șirul dat este convergent și are limita $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Pentru $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ șirul este constant: $a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ pentru orice $n \in N$.

35. Remarcăm la început că şirul este descrescător; în adevăr $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} = a_n + 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1}$ şi observînd că $2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 0$ pentru orice $n \in N$, rezultă $a_{n+1} < a_n$. Deoarece $a_1 = -1$ deducem că $a_n \leqslant -1$ pentru orice $n \in N$. Apoi, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$ pentru orice $k \in N$. Însumînd aceste inegalităţi pentru $k = 1, 2, \ldots n$, obţinem $\sqrt{n+1} - 1 < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ de unde $-2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$ şi prin urmare $-2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} = a_n$; b) Deoarece şirul $(a_n)_{n \in N}$ este descrescător şi mărginit rezultă că $(a_n)_{n \in N}$ este convergent. c) Din $a_{n+p} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} - 2\sqrt{n+p}$ şi $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ obţinem $a_{n+p} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} - 2\sqrt{n+p} + 2\sqrt{n}$ şi atunci $b_n + \alpha\sqrt{n} = a_{n+p} - a_n + 2\frac{p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}}$

Observînd că $\lim\limits_{n}\left(a_{n+p} - a_n + \frac{2p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}}\right) = 0$ pentru orice p, deducem că şirul b_n este convergent dacă şi numai dacă $\alpha = 0$, în care caz $\lim b_n = 0$.

36. a) Din $2a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ pentru $k = 3, 4, \ldots, n, \ldots$, deducem prin adunare, $2a_n + a_{n-1} = 2b + a$ pentru orice $n \geqslant 3$. Notînd $2b + a = l$ putem scrie $2\left(a_n - \frac{l}{3}\right) + \left(a_{n-1} - \frac{l}{3}\right) = 0$ pentru $n \geqslant 3$; punînd $b_n = a_n - \frac{l}{3}$ obţinem $2b_n + b_{n-1} = 0$ pentru $n \geqslant 3$, de unde rezultă uşor $b_n = (-1)^{n-2} \cdot \frac{b_2}{2^{n-2}}$

și deci $a_n = \frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-2}\frac{b-a}{3\cdot 2^{n-2}}$;

b) $\lim a_n = \frac{a+2b}{3}$

37. a) Procedînd ca mai sus, obținem $(\alpha+\beta)a_n + \beta a_{n-1} = (\alpha+\beta)a_2 + \beta a_1 = l$. Notînd $a_k - \frac{1}{\alpha+2\beta} = b_k$, rezultă $(\alpha+\beta)b_n + \beta b_{n-1} = 0$ de unde $b_n = (-1)^{n-2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-2}\cdot b_2$

și deci $a_n = \frac{(\alpha+\beta)b+\beta a}{\alpha+2\beta} + (-1)^{n-2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-2}\cdot\frac{\beta(b-a)}{\alpha+2\beta}$

b) $\lim\limits_n a_n = \frac{(\alpha-\beta)b+\beta a}{\alpha+2\beta}$

38. Avem $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{\gamma^k} + \beta\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\gamma^k}$. După cum se știe $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\gamma^k} = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1-(1/\gamma)^n}{1-\frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma^n-1}{\gamma^n(\gamma-1)}$. Pentru calculul sumei $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{\gamma^k}$ procedăm astfel: notăm $\sigma_p = \frac{1}{\gamma^p}+\ldots+\frac{1}{\gamma^n}$ și observăm că $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{\gamma^k} = \sum\limits_{p=1}^{n}\sigma_p$. Dar $\sigma_p = \frac{\gamma^{n-p+1}-1}{\gamma^n(\gamma-1)}$ cum se verifică ușor;

deci $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{\gamma^k} = \frac{1}{\gamma^n(\gamma-1)}\sum\limits_{p=1}^{n}(\gamma^{n-p+1}-1) = \frac{1}{\gamma^n(\gamma-1)}\left(\sum\limits_{k=1}\gamma^k - n\right) = \frac{\gamma(\gamma^n-1)-n(\gamma-1)}{^n(\gamma-1)^2}$. Așadar $a_n = \alpha\frac{\gamma(\gamma^n-1)-n(\gamma-1)}{\gamma^n(\gamma-1)^2} + \beta\frac{\gamma^n-1}{\gamma^n(\gamma-1)}$. Deoarece $\gamma>1$ rezultă $\lim\limits_n a_n = \alpha\frac{\gamma}{(\gamma-1)^2} + \beta\frac{1}{\gamma-1} = \frac{\alpha\gamma+\beta\gamma-\beta}{(\gamma-1)^2}$

39. Se aplică exercițiul 22 luînd $a_n = n$ pentru orice n.

40. Deoarece $\frac{|a|}{n} \to 0$ rezultă că există $n_0 \in N$ astfel ca pentru $n \geqslant n_0 \frac{|a|}{n} < \frac{1}{2}$. Atunci pentru $n > n_0$ avem

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a^{n_0}|}{n_0!} \cdot \frac{|a|}{n_0+1} \cdots \frac{|a|}{n} < \frac{|a^{n_0}|}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}$$

și deducem că $\lim\limits_n \frac{a^n}{n!} = 0$

41. Deoarece $0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n}$ pentru orice n rezultă $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

42. a) Deoarece pentru fiecare $k = 1, 2, \ldots n$, $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant$

$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ rezultă $\frac{n}{n^2+n} < a_n < \frac{n}{n^2+1}$ de unde se deduce

că $\lim a_n = 1$

b) Se ține seama de $\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+n^{p-i}}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+k^{p-1}}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+1}}$

pentru orice $k = 1, 2, \ldots n$, din care rezultă

$\frac{n}{\sqrt[p]{n^p+n^{p-1}}} < a_n < \frac{n}{\sqrt[p]{n^p+1}}$ și, prin urmare, $\lim a_n = 1$.

43., 44. *Idem.*

45. $s_{2n} \leqslant s_{2n-2}$ și $s_{2n+1} \leqslant s_{2n-1}$ și din relația dc definiție, deducem că $\lim s_{2n} = \lim s_{2n+1}$. De aici rezultă că șirul $(s_n)_n$ N este convergent.

46. $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p$ și deci $\lim a_n = \int\limits_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$

47. Monotonia a făcut obiectul exercițiului 32.
Pentru $0 < a < 1$ subșirul termenilor de rang par este strict descrescător, iar subșirul termenilor de rang impar este strict crescător. Dacă prin α și β desemnăm cele două limite ale subșirurilor de mai sus trebuie să avem, în baza relației $a_{n+1} = a^{a_n}$, $\alpha = a^\beta$, $\beta = a^\alpha$ de unde se deduce $\alpha = \beta$, fiecare reprezentînd unica soluție a ecuației $x = a^x$ (din graficele funcțiilor $x \to x$, $x \to a^x$ $(a < 1)$ se constată că această ecuație are o soluție și numai una). Pentru $a > 1$ se arată că șirul este strict crescător. Dacă șirul are o limită atunci

aceasta trebuie să fie soluţie a ecuaţiei $x = a^x$. Cum se constată luînd de pildă $a = \frac{5}{4}$ şi $a = e$ această ecuaţie poate avea soluţii sau nu, după diverse valori ale lui a. Problema este deci a determina valorile lui a pentru care ecuaţia de mai sus are soluţii. Observînd că $a > b$ implică $a^x > b^x$ pentru orice $x > 0$, problema revine la a determina acel a pentru care dreapta $y = x$ este tangentă graficului funcţiei $x \to a^x$.
Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $y = a^x$ în punctul de abscisă α este $y - a^\alpha = a^\alpha \ln \cdot (x - \alpha)$ şi condiţiile ca aceasta să fie $y = x$ sînt $a^\alpha \ln a = 1$, $\alpha \ln a = 1$ sistem care se rezolvă astfel: $\alpha = \frac{1}{\ln a}$ deci $a^{\frac{1}{\ln a}} \cdot \ln a = 1$; punînd $\frac{1}{\ln a} = u$ avem $a = e^{\frac{1}{u}}$ şi deci $(e^{\frac{1}{u}})^u = u$ adică $u = e$ şi deci $a = e^{\frac{1}{e}}$ în care caz $\alpha = e$. Rezultă că dacă $a \in (1, e^{\frac{1}{e}})$ atunci ecuaţia $x = a^x$ are soluţii, şirul este convergent, iar în cazul $a \in (e^{\frac{1}{e}} + \infty)$ ecuaţia nu are soluţii, şirul este divergent.

48. $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = -\sqrt{2}$.

49. $\alpha = \sqrt[3]{3}, = -\frac{\sqrt[3]{3}}{9}$

50. $\sqrt{n^3 + n} - n = \frac{n}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2} + \sqrt[3]{n(n^3+n)} + \sqrt[3]{n^2}}$

de unde rezultă $\lim a_n = 0$; b)

$$a_n = n^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$$

de unde $\lim a_n = +\infty$. c) Se constată fără dificultate că $x - 1 \geqslant \ln x$ pentru orice $x > 0$; deci $\sqrt[n]{n} - 1 \geqslant \ln \sqrt[n]{n}$ adică $n(\sqrt[n]{n} - 1) \geqslant \ln n$ şi deci $\lim n(\sqrt[n]{n} - 1) = +\infty$

d) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ deci limita cerută este 1.

e) Deoarece $0 < \frac{(n^2+1)\sin n^2!}{n^3} \leqslant \frac{n^2+1}{n^3}$ deducem că limita este 0.

f) avem $\cos\frac{\pi}{n} < \cos\frac{\pi}{n+k} < \cos\frac{\pi}{n+n}$ pentru orice $k = 1, 2 \ldots n$ și deci

$$\frac{(n+1)\cos\frac{\pi}{n}}{n+1} < \frac{\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{\pi}{n+1} + \ldots + \cos\frac{\pi}{n+n}}{n+1} <$$

$$< \frac{(n+1)\cos\frac{\pi}{2n}}{n+1}$$

de unde rezultă că limita șirului este 1.

$$\text{g)}\quad \lim n \sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi$$

h) Observînd că $(n+1)\sin^2\frac{\pi}{2n} < \sin^2\frac{\pi}{n} + \ldots + \sin^2\frac{\pi}{2n} < (n+1)\sin^2\frac{\pi}{n}$ se deduce că $\lim\left(\sin^2\frac{\pi}{n} + \ldots + \sin^2\frac{\pi}{2n}\right) = 0$

$$\text{i)}\quad \frac{\cos^2\frac{\pi}{n} + \ldots + \cos^2\frac{\pi}{2n}}{n+1} = \frac{1 - \sin^2\frac{\pi}{n} + \ldots + 1 - \sin^2\frac{\pi}{2n}}{n+1} =$$

$= 1 - \frac{\sin^2\frac{\pi}{n} + \ldots + \sin^2\frac{\pi}{2n}}{n+1}$ și folosind exercițiul h) rezultă

$$\lim\left(\cos^2\frac{\pi}{n} + \ldots + \cos^2\frac{\pi}{2n}\right) = 1$$

j) Avem succesiv $\left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = \left(1 + \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1 + b^{\frac{1}{n}} - 1}{2}\right)^n =$

$=(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha n}$ unde $\alpha = \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1 + b^{\frac{1}{n}} - 1}{2}$

Fie $(\alpha_n)_{n\in N}$ un şir care tinde către 0. Atunci $\lim_n \frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n} =$

$$= \lim_n \ln(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = \ln(\lim_n (1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}) = 1$$

Notînd $a^{\frac{1}{n}} - 1 = \alpha_n$ deducem că $\lim_n \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln a$ şi,

analog $\lim_n \frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln b$. Cu acestea rezultă

$$\lim_n \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = e^{\frac{1}{n}(\ln a + \ln b)} = \sqrt{ab}$$

k) $\lim_n \left(\frac{1+\sin^2\frac{\pi}{n}}{1-\sin^2\frac{\pi}{n}}\right)^{\frac{1}{1-\cos\frac{\pi}{n}}} = \lim_n \left(1 + \frac{2\sin^2\frac{\pi}{n}}{1-\sin^2\frac{\pi}{n}}\right)^{\frac{1}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}} = e^4$

l) Se aplică exerciţiul 23) luînd $a_1 = 1$ $a_2 = \sin\frac{\pi}{2}, \ldots$

$a_n = \sin\frac{\pi}{n}$; rezultă $\lim \sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}\ldots\sin\frac{\pi}{n}} =$

$$= \lim \sin\frac{\pi}{n} = 0.$$

m) După cum am văzut $\lim_n \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$; putem

deci aplica exerciţiul 22) luînd $a_k = \sin\frac{\pi}{k}$, $b_k = \frac{1}{k}$,

$k = 1, 2, \ldots$

Rezultă $\lim_n \frac{\sin\frac{\pi}{2} + \ldots + \sin\frac{\pi}{n}}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}} = \lim \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi$

n) Şirul considerat este evident descrescător. Prin inducţie se arată că $0 < \frac{\sqrt{1}}{2+\sqrt{1}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdots \frac{\sqrt{n}}{2+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$; de aici

$$\text{rezultă } \lim_n \frac{\sqrt{1}}{2+\sqrt{1}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdots \frac{\sqrt{n}}{2+\sqrt{n}} = 0$$

p) Notînd $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$ se constată că şirul $(a_n)_{n\in N}$ este descrescător; prin inducţie se arată că $0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ deducem $\lim_n a_n = 0$

q) Avem $n - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+4k+1}{k^2+4k+3} = n - \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{2}{(k+1)(k+3)}\right) =$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right) = \frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\text{; rezultă}$$

$$\lim\left(n - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+4k+1}{k^2+4k+3}\right) = \frac{5}{6}$$

r) Se arată prin inducţie $(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^{2^n}) = = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{2n+1} - 1$ de unde, în condiţia $|a| < 1$, rezultă $\lim\ (1+a)1+a^2)\ldots(1+a^{2^n}) =$

$$= \frac{1}{1-a}$$

s) $a_n = \frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^1} + \ldots + \frac{1}{C_n^n} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{C_n^k} = 1 +$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-k-1)(n-k)}{n!}$$

$$\text{Dar} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-k-1)!\,(n-k)}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1-k)!\,k(k+1)}{n!}$$

deoarece cele două sume au exact aceiaşi termeni. Rezultă $2a_n = 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-k-1)(n-k) + (n-1-k)!(k+1)}{n!} =$

$$= 2 + \frac{n+1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-1-k)!}{(n-1)!} = 2 + \frac{n+1}{n} a_{n-1}$$

Evident că $2 \leqslant a_n$ pentru orice n. Folosind egalitatea $2a_n = a + \frac{n+1}{n} a_{n-1}$ se obţine că $a_n \leqslant 2 + \frac{4}{n}$ pentru orice $n \geqslant 5$. În adevăr, pentru $n = 5$ inegalitatea se verifică; presupunînd $a_{n-1} \leqslant 2 + \frac{4}{n-1}$ avem $2a_n = 2 + + a_{n-1} + \frac{1}{n} a_{n-1} \leqslant 4 + \frac{4}{n-1} + \frac{1}{n}\left(2 + \frac{4}{n-1}\right) = 4 + + \frac{4}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{4}{n(n-1)} = 4 + \frac{6n+2}{n(n-1)} \leqslant 4 + \frac{8}{n}$ pentru $n \geqslant 5$. Rezultă, atunci $\lim a_n = 2$

t) Notînd $x_n - \frac{b}{\alpha - 1} = y_n$ relaţia $x_n = ax_{n-1} + b$ devine $y_n = ay_{n-1}$ pentru $n \geqslant 2$ şi deci $y_n = a^{n-2} y_2$ de unde rezultă $\lim y_n = 0$ şi deci $\lim x_n = \frac{b}{a-1}$

u) Să considerăm intervalul $[0, k-1]$ şi funcţia $x \to \frac{1}{1+x}$

Să fie $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} \ldots < \frac{j}{n} < \frac{j+1}{n} < \ldots < \frac{kn-n-1}{n} < < \frac{kn-n}{n} = k-1$ o diviziune de pas $\frac{1}{n}$ a segmentului $[0, 1]$. Atunci $\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{kn-n}{n}} =$

$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{kn}$ reprezintă o sumă Riemann asociată funcţiei $x \to \frac{1}{1+x}$ şi diviziunii considerate pe

$[0, k-1]$ și cum $\lim \frac{1}{n} = 0$ rezultă că $\lim \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \right.$ $\left. + \ldots + \frac{1}{kn}\right) = \int_0^{k-1} \frac{1}{1+x} dx = \ln k.$

În particular luînd $k = 2$ se obține $\lim_n \left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \right.$ $\left. + \frac{1}{n+n}\right) = \ln 2$ (vezi exercițiul 25)

v) $\prod_{k=1}^{n} a^{\frac{1}{k(k+1)}} = a^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}} = a^{\frac{n}{n+1}}$ de unde pentru $a > 0$ se obține $\lim_n \prod_{k=1}^{n} a^{\frac{1}{k(k+1)}} = a$

w) Evident $\frac{1}{2^n + 2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^k + 2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{1 + 2^{n+1}}$ pentru orice $k = 0, 1, 2, \ldots, n$; deducem $\frac{n+1}{2^n + 2^{n+1}} < \frac{1}{1 + a^{n+1}} +$ $+ \frac{1}{2 + 2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^n + 2^{n+1}} < \frac{n+1}{1 + 2^{n+1}}$ și deoarece $\lim \frac{n+1}{2^n + 2^{n+1}} = \lim \frac{n+1}{1 + 2^{n+1}} = 0$ rezultă $\lim \left(\frac{1}{1 + 2^{n+1}} + \right.$ $\left. + \frac{1}{2 + 2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^n + 2^{n+1}}\right) = 0$

x) Folosind dezvoltarea $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se constată imediat că $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. Pe de altă parte remarcăm că $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 +$ $+ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n-1}}$ și deci $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 3$. Șirul considerat este evident monoton; fiind și mărginit este convergent. Din $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \ldots \frac{1}{n!}$ rezultă că $e \leqslant \lim \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$

Fie acum $n > k$ atunci $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) +$
$+ \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n}\left(1-\right.$
$\left.-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) > 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) +$
$+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)$ de unde $e \geqslant 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{k!}$
pentru orice k. Deci $\lim a_n = e$.

y) Evident $\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

pentru orice $k = 1, 2, \ldots n$; rezultă că $n \arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant n \arcsin\frac{1}{n^2+1}$$ și observînd că

$\lim\limits_{n} n \arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n} n \arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 1$ deducem

$$\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 1$$

z) Știm că dacă $(a_n)_{n\in N}$ este un șir de numere reale convergent către zero atunci $\lim\limits_{n} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$

Prin urmare $\varepsilon > 0$ fiind dat există $\delta > 0$ astfel ca $|a_n| < \delta$ implică $1 - \varepsilon < \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} < 1 + \varepsilon$

Deoarece $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$ rezultă că există n_0 astfel ca $\left|\frac{n}{n^2}\right| < \delta$ pentru orice $n \geqslant n_0$; evident că atunci $\left|\frac{k}{n^2}\right| < \delta$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots n$.
Rezultă

$1 - \varepsilon < \dfrac{\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}{\frac{k}{n^2}} < 1 + \varepsilon$ pentru $n\ n_0$ și orice $k =$
$= 1, 2, \ldots n$; de aici deducem

$$1-\varepsilon<\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)}{\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}}<1+\varepsilon$$

adică

$$1-\varepsilon<\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)}{\frac{n(n+1)}{2n^2}}<1+\varepsilon \text{ pentru } n\geqslant$$

$\geqslant n_0$; aceasta arată că $\lim \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)}{\frac{n(n+1)}{2n^2}}$

există şi este egală cu 1. Deoarece $\lim\limits_{n}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$

rezultă că $\lim\limits_{n}\ \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$

şi deci $\lim\limits_{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=\sqrt{e}.$

3. LIMITE DE FUNCŢII

1. Fie $a\in R$ astfel arbitrar; există $\alpha>0$ astfel ca $\dfrac{1}{\alpha}>a$. Atunci pentru $|x|<\alpha$ rezultă $\dfrac{1}{|x|}>a$.

2. Pentru $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$, $n\in N$ avem $\lim\limits_{n} f(x_n)=0$ iar pentru $y_n=\dfrac{2}{(4n+1)\pi}$, $n\in N$ $\lim\limits_{n} f(y_n)=1$. Am indicat două şiruri convergente la zero astfel că şirurile valorilor funcţiei nu au aceeaşi limită.

3. De pildă, $x_n=2n\pi\to\infty$ şi $\lim\limits_{n}\ \sin\ x_n=0$, $y_n=$ $=\dfrac{(4n+1)\pi}{2}\to\infty$ şi $\lim\limits_{n}\ \sin\ y_n=1$.

4. Folosim faptul că funcţia $x \to a^x$ este strict crescătoare pentru $a > 1$. Aşadar dacă $x > n$ atunci $a^x > a^n$. Fie acum $M > 0$, altfel arbitrar; arătăm că există n_M astfel că $a^n > M$ pentru $n > n_M$. Prin absurd, să presupunem că pentru orice $n \in N$ avem $a^n \leqslant M$; atunci $a < \sqrt[n]{M}$. Cum ştim însă $\lim\limits_{n} \sqrt[n]{M} = 1$ şi deci există $n \in N$ astfel ca $\sqrt[n]{M} < a$.
Contradicţia obţinută arată că $a^n > M$ pentru $n > n_M$ cu un anumit n_M.
Deci pentru $x > n_M$ $a^x > M$. Pentru $0 < a < 1$ se procedează similar.

5. Fie $a = 1 + b$, $b > 0$; atunci $\frac{a^n}{n} = \frac{(1+b)^n}{n} >$

$$> \frac{nb + \frac{n(n-1)}{2} b^2}{n} = b + \frac{n-1}{2} b^2$$ de unde deducem că

$$\lim_{n} \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

Fie acum x real pozitiv. Există $n \in N$ astfel ca $n \leqslant x < n+1$

şi, prin urmare $\frac{(1+b)^n}{n+1} < \frac{(1+b)^x}{x} < \frac{(1+b)^{n+1}}{n}$ şi deci

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x} = +\infty.$$

6. $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = -\lim\limits_{y \to \infty} ye^{-y} = 0$ aplicînd exerciţiul precedent.

7. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin^3 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x(\cos x - 1)}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x\ (1 + \cos x)} =$$

$$= -\frac{1}{2}$$

8. $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln(\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$$

9. Punînd $a^x - 1 = y$ rezultă $x \ln a = \ln(1+y)$ şi se obţine $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

10. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim\limits_{y\to 0} y\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{y\pi}{2}}=$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{2\,\frac{\pi y}{2}}{\pi\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{x^2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{x^2}-1}=\frac{1}{2}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x})}{x^3}=-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{xe^{x}+xe^{-x}}{2}\cdot\sin\frac{xe^{x}-xe^{-x}}{2}}{x^3}=$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{xe^{x}+xe^{-x}}{2}}{xe^{2}+xe^{-x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{xe^{x}-xe^{-x}}{2}}{xe^{x}-xe^{-x}}\cdot$$

$\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(e^{x}+e^{-x})(e^{x}-e^{-x})}{4x^3}=-2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{x}+e^{-x})}{4}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x^3}=$

$$=-\lim_{x\to 0} e\,\frac{2x-1}{xe^{x}}=-2.$$

13. a) Să observăm că, dacă m $> n$ atunci $\frac{m}{n}<\frac{m-p}{n-p}$ pentru orice $p<n$. Prin urmare $\frac{m}{n}<\frac{m-1}{n-1}<\frac{m-2}{n-2}<\ldots<$ $<\frac{m-k+1}{n-k+1}$ de unde $\left(\frac{m}{n}\right)^k<\frac{m}{n}\cdot\frac{m-1}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{m-k+1}{n-k+1}=$ $=\frac{C_m^k}{C_n^k}$. b) Avem $C_m^k>C_n^k\cdot\frac{m^k}{n^k}$ şi deci pentru orice u real pozitiv şi fiecare $k=0,1,\ldots,x$ $C_m^k u^k>C_n^k u^k\frac{m^k}{n^k}$ de unde $\sum\limits_{k=0}^{n}C_m^k u^k>\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^k\frac{m^k}{u^k}$ şi cu atît mai mult $\sum\limits_{k=0}^{m}C_m^k u^k>\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^k\frac{m^k}{n^n}$ adică $(1+u)^m>\left(1+u\cdot\frac{m}{n}\right)^n$

și deci $(1+u)^{\frac{m}{n}} > 1 + u\cdot\frac{m}{n}$ sau $(1+u)^r > 1 + ru > 1$

c) Folosind rezultatul de la b) se arată că $(1+u)^r > 1 + ru$ pentru orice u real pozitiv și pentru orice $r > 1$. Fie $x < y$; să punem în inegalitatea de mai sus $r = \frac{y}{x}$ și $u = \frac{1}{y}$; obținem $\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{y}{x}} > 1 + \frac{1}{x}$ adică $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{y}\right)^y$.

d) Fie $n \leqslant x < n+1$ atunci $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ de unde deducem că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

14. Din ipoteză rezultă că M fiind dat există a încît $x > a$ implică $f(x) > \frac{2M}{l}$; de asemenea există b astfel încît $x > b$ implică $g(x) > \frac{l}{2}$; atunci pentru $x > \max\{a, b\}$ avem $f(x)\cdot g(x) > M$, în consecință $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)\cdot g(x)] = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^3 - 5x^2 + 1) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ luînd $f(x) = x^3$, $g(x) = 1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}$; $\lim(x^2 + 3x - 1) = = \lim x^2\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ (se aplică un enunț similar celui demonstrat; formulați și demonstrați afirmația).

15. $\lim\limits_{x\uparrow 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim\limits_{x\downarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$, deci funcția considerată nu are limită în $x = 0$

16. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x - a^a}{x - a} = a^a \lim\limits_{x\to a}\frac{a^{x-a} - 1}{x - 1} = a^a \ln a$ (vezi exercițiul 9)

17. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos px - \cos qx}{x^2} = \lim \frac{2\sin\frac{p+q}{2}x \cdot \sin\frac{q-f}{2}x}{x^2} = \frac{q^2-p^2}{2}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x-1+b^x-1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab},$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{arc sin } x - \text{arc tg } x}{x^3} = \lim \frac{\text{arc sin}\frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}}}{x^3} = \frac{1}{2}$

Notînd arc sin $x = \alpha$, arc tg $x = \beta$ avem sin $(\alpha - \beta) =$ $= x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ şi deci arc sin x — arc tg $x =$ $=$ arc sin $\frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}{(1+x)-(1-x)} = \frac{3}{2}.$$

21. limita este 1.

22. $\frac{114}{27}$.

23. Se amplifică cu conjugata numărătorului şi cu conjugata numitorului; se obţine $\frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{a}}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\right.$ $\left.+\frac{\cos x(1-\cos 2x\ldots\cos x)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}+$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)+\cos 2x(1-\cos 3x\ldots\cos nx)}{x^2} = \frac{1}{2}+2+$$

$$+\frac{3^2}{2}+\ldots+\frac{n^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

25. $\lim_{x\to 0}(2 - \operatorname{tg} x\sqrt{\operatorname{ctg} x})^{\frac{1}{\sin x - \cos x}} = e^{\lim \frac{1-\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x - \cos x}} =$

$= e^{\lim \frac{1-\operatorname{tg} x}{(1+\sqrt{\operatorname{tg} x})(\sin x - \cos x)}} = e^{-1}$

26. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos \alpha x)}{\ln(\cos \beta x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha x}{2}\right)}{\ln\left(1 - 2\sin^2\frac{\beta x}{2}\right)} =$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left((1-2\sin^2\frac{\alpha x}{2}\right)}{-2\sin^2\frac{\alpha x}{2}} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{\beta x}{2}}{\ln\left(1-2\sin^2\frac{\beta x}{2}\right)} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{\alpha x}{2}}{\sin^2\frac{\beta x}{2}} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}.$

27. $\lim \frac{\ln(1+\sin\sqrt{x})}{x + \operatorname{tg}\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x + \operatorname{tg}\sqrt{x}} =$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x} + \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = 1.$

28. $\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[1 + \left(\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{x} - 1\right)\right]^x =$

$= e^{\lim_{x\to\infty} x\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} - 1\right)} = e^{\lim_{y\to 0}\frac{\sin y + \cos y - 1}{y}} = e.$

29. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2) - \ln(1-x)}{\operatorname{arc\,tg}(1+x) - \operatorname{arc\,tg}(1-x)} =$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{2-x^2}} =$

$= 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{2-x^2}} = 2$

(s-a folosit exercițiul 8 și egalitatea $\operatorname{arc\,tg} u - \operatorname{arc\,tg} v =$
$= \operatorname{arc\,tg}\frac{u-v}{1+vu} (\operatorname{mod} \pi)$)

30. $\lim_{x\to\infty}[\ln(e^x + e^{-x}) - x] = \lim_{x\to\infty}[\ln(e^x + e^{-2}) - \ln e^x] =$

$= \lim_{x\to\infty} \ln\frac{e^x + e^{-x}}{e^x} = 0.$

31. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x - 1} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = -1$$

(s-a folosit exercițiul 8).

32. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

33. Să punem $\arccos x = u$; deoarece $x \to 1$ putem presupune că $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Rezultă

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin nu}{\sqrt{1 - \cos^2 u}} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin nu}{\sin u} = n$$

34. $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{nx} \log_a \prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{1 + kx} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{nx} \sum_{k=1}^{n} \log_a (1 + kx)^{\frac{1}{k}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log_a (1 + kx)^{\frac{1}{kx}}\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log_a (\lim(1 + kx)^{\frac{1}{kx}}) =$$

$$= \log_a e.$$

35. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x - \frac{\pi}{4}}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} - 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x - \frac{\pi}{4}}}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1}{\sqrt{x - \frac{\pi}{4}}}} =$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin^2 \frac{\frac{\pi}{4} - x}{2}}{\sqrt{x - \frac{\pi}{4}}}} = e^0 = 1.$$

4. FUNCȚII CONTINUE

1. $f(x) = \cos x$ dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ și $f(x) = \sin x$ dacă $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Deoarece funcțiile sin și cos sînt continue pe toată dreapta reală, rămîne de verificat continuitatea funcției f în punctul $\frac{\pi}{4}$. Deoarece $\lim\limits_{x \uparrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ rezultă că f este continuă în punctul $x = \frac{\pi}{4}$.

2. Fie $x_0 \in (a, b)$ astfel încît $f(x_0) > g(x_0)$; rezultă $f(x_0) = h(x_0)$. Fie $\varepsilon = \frac{h(x_0) - g(x_0)}{3} > 0$. Există o vecinătate U a punctului x_0 astfel ca $h(x) > h(x_0) - \varepsilon$ și $g(x) < g(x_0) + \varepsilon$ pentru orice $x \in U \cap (a, b)$ și prin urmare $h(x) > g(x)$ pentru orice $x \in U \cap (a, b)$, deci $f(x) = h(x)$ pe $U \cap (a, b)$ și deci f este continuă în x_0. Fie acum $x_0 \in (a, b)$ astfel ca $h(x_0) = g(x_0)$ deci $f(x_0) = h(x_0) = g(x_0)$. Din continuitatea funcțiilor h și g rezultă că, $\varepsilon > 0$ fiind dat, există vecinătatea U a punctului x_0 astfel încît $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$, $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ pentru $x \in U \cap (a, b)$. Deci $|\max\{h(x); g(x)\} - f(x_0)| < \varepsilon$ pentru $x \in U \cap (a, b)$ adică $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ dacă $x \in U \cap (a, b)$.

3. Fie x rațional și $(x_n)_{n \in N}$ un șir de numere iraționale convergent către x; atunci $f(x_n) = 0$ și $f(x) = 1$, de unde se vede că f nu este continuă în punctele raționale. Tot astfel se arată că f este discontinuă în punctele iraționale.

4. Pentru $x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ $\frac{1}{x} \in [n, n+1)$ și deci $\left[\frac{1}{x}\right] = n$, n fiind număr natural. Deci $f(x) = x^n$ pentru $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$. Rezultă că în punctele $x \in \bigcup\limits_{n \in N} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ f este continuă. Se vede că f este continuă și în $x = 1$ deoarece $f(x) = x$ dacă $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ și $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x) = f(1)$. În punctele $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ f nu este continuă deoarece $\lim\limits_{x \uparrow \frac{1}{n}} f(x) = \left(\frac{1}{n}\right)^n$ iar $\lim\limits_{x \downarrow \frac{1}{n}} f(x) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$. Ară-

tăm că f este continuă în 0. Evident f este descrescătoare şi deoarece $0 < f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ rezultă că $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = 0$.

5. Pe mulţimea $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ f este continuă. Trebuie analizată continuitatea funcţiei f în punctele -1 şi 1. Avem $f(-1) = f(1) = 0$. Calculăm limitele laterale în punctul -1: $\lim\limits_{x \uparrow -1} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \downarrow -1} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow -1} a \sin \frac{\pi(1+x)}{2} = 0$. Pentru orice $a \in R$. La fel $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 1} f(x) = 0$ şi deci f este continuă pe toată axa pentru orice $a \in R$.

6. Fie x un punct de continuitate al funcţiei f şi fie (x_n') un şir de numere raţionale convergent către x, iar (x_n'') un şir de numere iraţionale convergent către x. Trebuie să avem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n' = \lim (x_n'')^2$ adică $x = x^2$. Aşadar f nu poate fi continuă decît în $x = 0$, şi $x = 1$. Se arată uşor că în aceste puncte f este continuă.

7. Ca la exerciţiul precedent se obţine că f este continuă numai în $x = 0$.

8. Funcţia este continuă pe toată axa reală.

9. Se constată că $\lim\limits_{x \uparrow \pi} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \downarrow \pi} f(x) = -2$ şi deci f nu este continuă în punctul $x = \pi$ pentru orice $a \in R$. În celelalte puncte ale mulţimii de definiţie f este continuă.

10. Studiem continuitatea funcţiei f în punctul $x = -1$. Avem $f(-1) = -2\pi$, $\lim\limits_{x \uparrow -1} f(x) = -2\pi$ $\lim\limits_{x \downarrow -1} f(x) = \lim \frac{\sin(2x^2-1)\pi}{x^2-1} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin(2y+1)\pi}{y} = -\lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin 2x\pi y}{y} = -2$ şi deci f este continuă în $x = -1$; $f(1) = 2\pi$, $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x) = -2\pi$ şi prin urmare f nu este continuă în $x = 1$.

11. Se obţine uşor că f este continuă în punctele $x = -1$, $x = 1$ pentru orice a şi b reali. Pentru ca f să fie continuă în $x = 0$ este necesar şi suficient ca $-a = a = b$ deci $a = 0$, $b = 0$.

12. Fie $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $n \in N$. Evident $x_n \to 0$ şi $f(x_n) \to 0$. Fie $y_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ deci $y_n \to 0$ şi avem $f(y_n) \to 1$. Rezultă că f

nu este continuă în $x = 0$, pentru orice $a \in R$; pe $(0, 1]$ f este continuă.

13. Avem $|f(x) - f(0)| = |x \sin \frac{1}{x}| \leqslant |x|$ și prin urmare f este continuă în $x = 0$. Evident în celelalte puncte f este continuă.

14. Se aplică teorema de continuitate a compunerii a două funcții continue funcției $x \to f(x)$ și funcției $u \to u^2$. Dacă funcția g este continuă nu rezultă că f este continuă. Fie $f : R \to R$ definită astfel $f(x) = -1$ dacă x este rațional și $f(x) = 1$ dacă $x =$ rațional; f este discontinuă în orice punct de pe axă; dar $g = f^2$ este funcția dată de $g(x) = 1$ pentru orice $x \in R$ și este continuă pe toată axa.

15. Fie $x_0 \in A$; deoarece $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$ pentru orice a, $b \in R$ rezultă $||f(x)| - |f(x_0)|| \leqslant |f(x) - f(x_0)|$. Fie acum $\varepsilon > 0$; deoarece f este continuă în x_0, rezultă că există o vecinătate U a punctului x_0 astfel că $x \in U \cap A$ să implice $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Deducem $||f(x)| - |f(x_0)|| < \varepsilon$ pentru $x \in U \cap A$ și deci f este continuă. Exemplul dat în exercițiul 14, dovedește că reciproca nu este adevărată.

16. Fie $A = [0, 1]$ și $f(x) = x$ pentru orice $x \in [0, 1]$, $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ dacă $x \in (0, 1]$, $g(0) = 0$.

Atunci f și $f \cdot g$ sînt continue în $x = 0$, dar g nu este continuă în $x = 0$ (vezi exercițiile 12 și 13). Să impunem funcției f condiția $f(x_0) \neq 0$. Atunci există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încît $f(x) \neq 0$ pentru orice x U. În adevăr să presupunem că pentru orice $n \in N$ există $x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$ astfel ca $f(x_n) = 0$. Evident $x_n \to x$ și ar rezulta $\lim_n f(x_n) = 0$ și deci din continuitatea lui f am obține $f(x_0) = 0$. Așadar pe mulțimea $U \cap A$ avem $g(x) = \frac{(g \cdot f)(x)}{f(x)}$ și deci g este continuă în x_0 ca raport a două funcții continue în care numitorul nu se anulează.

17. Se raționează exact ca în soluția exercițiului (6), Comentarii și exerciții rezolvate.

18. Fie $\alpha = \lim\limits_{x \downarrow a} f(x) < 0$ și $\beta = \lim\limits_{x \uparrow b} f(x) > 0$; rezultă că există $x_0 \in \left(a, \frac{2a+b}{3}\right)$ astfel ca $f(x_0) < 0$ și există $y_0 \in \left(\frac{2b+a}{3}, b\right)$ încît $f(x_0) > 0$. Aplicînd teorema 2 rezultă că trebuie să existe un punct $x \in (x_0, y_0) \subset (a, b)$ în care $f(x) = 0$.

19. Să considerăm $f(x) = \cos x - x$ pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Avem $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} (x) = -\frac{\pi}{2}$. Conform exercițiului 18) ecuația $\cos x = x$ are cel puțin o rădăcină pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Funcția f fiind continuă și strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că ecuația considerată are o singură rădăcină.

20. Fie la început n par și fie $f(x) = e^x - x^n$. Deoarece $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \times \lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) < 0$ rezultă că ecuația $e^x - x^n = 0$ are cel puțin o rădăcină pe $(-\infty, 0)$. Funcția f fiind strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$ rezultă că ecuația are o singură rădăcină pe acest interval. Dacă n este impar, atunci pe $(-\infty, 0)$ $f(x) > 0$. În acest caz ecuația nu are nici o rădăcină reală.

21. Avem $f(x) - f(y) = (x - y)(x^2 - xy + y^2 + \alpha)$ și deci $[f(x) - f(y)] \cdot (x - y) > 0$ dacă $x \neq y$ adică f este strict crescătoare. Din evaluarea anterioară se deduce și faptul că f este continuă (dacă mai e cazul (!)). Deoarece $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ rezultă că pentru orice λ ecuația considerată are o singură rădăcină pe $(-\infty, \infty)$.

22. Să remarcăm la început că $f(-x) = f(x)$. Fie acum $x \in (0, 1)$. Deoarece $f(x) = f(x^{2^n})$ pentru orice n, iar $x^{2^n} \to 0$ din continuitatea funcției în $x = 0$ deducem că $f(x) = f(0)$. Dacă $x \in (1, \infty)$ atunci deoarece $f(x) = f\left(\sqrt[2^n]{x}\right)$ pentru orice n, iar $\sqrt[2^n]{x} \to 1$, din continuitatea în $x = 1$, deducem $f(x) = f(1)$. Tot din continuitatea în $x = 1$, luînd $x_n \uparrow 1$, $x_n > 0$ deducem $f(0) = f(1)$ și deci pentru $x \in [0, \infty)$ avem $f(x) = f(0)$. Din remarca inițială rezultă $f(x) = f(0)$ pentru orice $x \in (-\infty, +\infty)$: f este constantă. Evident că orice funcție constantă satisface condiția.

23. a) Prin inducție se arată că $f(nx) = n \cdot f(x)$ pentru orice $n \in N$ și orice $x \in R$. Luînd $x = 0$ de aici deducem $f(0) = 0$. Apoi $f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right)$ și deci $f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} f(x)$ pentru orice $n \in N$ și orice x. Atunci $f\left(\frac{m}{n} x\right) = m f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{m}{n} f(x)$ și deci $f(px) = pf(x)$ pentru orice p rațional pozitiv și orice x real. Din $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(0) = 0$ rezultă $f(-x) = -f(x)$ pentru orice x. Atunci dacă p este rațional negativ avem $f(px) = -f((-p)x) = -(-p \cdot f(x)) = pf(x)$. b) Fie că f este continuă în x_0 și fie x arbitrar, fixat. Fie $(x_n)_{n \in N}$ un șir convergent către x. Atunci șirul $(x_n - x + x_0)_{n \in N}$ converge către x_0 și deci $\lim\limits_n f(x_n - x + x_0) = f(x_0)$ adică $\lim\limits_n f(x_n) - f(x) + f(x_0) = f(x_0)$ și deci $\lim\limits_n f(x_n) = f(x)$. După cum am văzut $f(x, y) = x \cdot f(y)$ pentru orice x rațional și orice y real. Fie acum x real oarecare; există șiruri (x_n) de numere raționale astfel încît $\lim\limits_n x_n = x$. Atunci $f(x \cdot y) = f[(\lim\limits_n x_n) \cdot y] = f(\lim\limits_n (x_n \cdot y)) = \lim\limits_n f(x_n \cdot y) = \lim\limits_n (x_n \cdot f(y)) = (\lim\limits_n x_n) f(y) = x \cdot f(y)$.

c) În condițiile formulate avem $f(x\,y) = x \cdot f(y)$ pentru orice $x, y \in R$. Punînd $y = 1$ și $f(1) = c$ rezultă $f(x) = c \cdot x$ pentru orice $x \in R$. Evident funcțiile de această formă sînt continue și satisfac condițiile impuse.

24. Se deduce imediat, prin inducție, că $f(k^n x) = f(x)$ și $f(x) = f(k^{-n} x)$ pentru orice $x \in R$ și orice $n \in N$. Deoarece $k \neq 1$ atunci sau k^n sau k^{-n} tinde către zero și atunci deducem $f(x) = f(0)$. Evident că funcțiile constante satisfac condiția $f(kx) = f(x)$ și sînt continue.

25. Din $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$ deducem că $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in R$. Să presupunem că există $x_0 \in R$ astfel că $f(x_0) = 0$. Atunci pentru fiecare $x \in R$ avem $f(x) = f(x_0 + x - x_0) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0$. Așadar, în acest caz f este identic nulă. Să admitem acum că f nu se anulează în nici un punct; atunci $f(x) > 0$ pentru orice $x \in R$. Să punem $f(1) = a$. Prin inducție se arată că $f(nx) = [f(x)]^n$ pentru orice $n \in N$ și orice $x \in R$.

Atunci $f(n) = a^n$. Mai departe $f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right)^n$ și deci $f\left(\frac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$; apoi $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. Să mai observăm că $f(0) = f(a + 0) = f(0) \cdot f(0)$ de unde $f(0) = 1$ (dacă $f(0) = 0$ atunci f este identic nulă). Atunci $f(0) = 1 = f(x + (-x)) = f(x) \cdot f(-x)$ și deci $f(-x) = [f(x)]^{-1}$. De aici obținem $f\left(-\frac{m}{n}\right) = a^{-\frac{m}{n}}$. Conchidem că pentru orice număr rațional x avem $f(x) = a^x$. Folosim continuitatea lui f pentru a arăta că $f(x) = a^x$ pentru orice x real. În adevăr fie (x_n) un șir de numere raționale convergente către x; atunci $f(x) = f(\lim x_n) = \lim a^{x_n} = a^{\lim x_n} = a^x$ (al doilea egal este justificat de continuitatea lui f, iar penultimul de continuitatea funcției $x \to a^x$). Evident funcțiile a^x satisfac condițiile din enunț.

Observație. Cititorul nu trebuie să fie surprins de prezența propozițiilor din finalul soluțiilor problemelor (23), (24), (25). Pînă în acel moment, am demonstrat că funcțiile care satisfac condițiile din enunț au în mod *necesar* forma indicată, ceea ce nu înseamnă că acestea și satisfac aceste condiții. Că, totuși, este evident că funcțiile determinate satisfac condițiile respective este adevărat.

5. FUNCȚII DERIVABILE

1. Funcția este continuă pe $[-\pi, \pi]$, este derivabilă pe $(-\pi, \pi)$ (Se vede imediat că în $x = 0$ f este derivabilă și $f'(0) = 0$) și $f(-\pi) = f(\pi)$. Deci teorema lui Rolle se poate aplica: există un punct $x = 0$, încît $f'(x) = 0$. Acest exemplu poate servi și pentru a ilustra că produsul a două funcții poate fi derivabil într-un punct chiar dacă unul din factorii produsului nu este derivabil în acel punct.

2. Funcția considerată este continuă pe $[-1, 1]$, $f(-1) = f(1)$ $(= 0)$ este derivabilă pe $(-1, 1)$ cu excepția punctului $x = 0$. Teorema lui Rolle nu se poate aplica. Se constată, de altfel că pentru $x \in (-1, 0)$ $f'(x) > 0$, iar pentru $x \in (0, 1)$, $f'(x) < 0$.

3. Funcţia dată nu este continuă în punctul $x = 0$, deci teorema lui Rolle nu poate fi aplicată. Aceasta nu înseamnă, însă, că nu există puncte în $\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ în care derivata funcţiei să se anuleze.

Există, în fapt, o infinitate de astfel de puncte, anume $x_k = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}$, $k = 1, 2, \ldots$

4. Să admitem că $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$.

Definim $h : [a, b] \to R$ prin $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Funcţia h este continuă pe $[a, b]$ derivabilă pe (a, b) şi $h(a) = h(b) = 0$. Conform teoremei lui Rolle $h'(x) — 0$ pentru cel puţin o valoare $x \in (a, b)$ şi prin urmare $f'(x) \cdot g(x) - f(x)g'(x) = 0$ pentru cel puţin un x din (a, b). Contradicţia obţinută arată că g se anulează cel puţin într-un punct din (a, b).

5. $f'(x) = \frac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}$ pentru orice $x \in R|\{-1\}$, funcţia este crescătoare pe $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ şi este descrescătoare pe $(-2, -1) \cup (-1, 0)$; $x = -2$ este punct de maxim local, $x = 0$ este punct de minim local.

6. $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x - 2^2)}$ pentru orice $x \in R|\{2\}$ funcţia este strict crescătoare pe domeniul de definiţie.

7. $f'(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x + 1)^2\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^{1/2}}$ pentru $x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$

Funcţia este strict crescătoare pe $\left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup [1, \infty)$ şi strict descrescătoare pe $\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, -1\right)$. Punctul $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ este un punct de maxim relativ, punctul $x = 1$ este un punct de minim relativ, deşi derivata nu se anulează în acest punct.

8. $f'(x) = 1 + \ln x$ pentru $x \in (0, \infty)$. Funcţia este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ şi este strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$, punctu $x = \frac{1}{e}$ este punct de minim.

9. $f'(x) = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$ pentru orice x real.
Funcția este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$ și strict crescătoare pe $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$; punctul $x = 1-\sqrt{2}$ este punct de minim, $x = 1+\sqrt{2}$ este un punct de maxim relativ.

10. $f'(x) = \frac{2x+1}{(1+x^2)(x^2+2x+2)}$ pentru orice $x \in R$. Funcția este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ și strict crescătoare pe $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$. Punctul $x = -\frac{1}{2}$ este un punct de minim relativ.

11. $f'(x) = 1 - \sin x$ pentru $x \in R$. $f'(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in R$, egalitatea avînd loc în punctele $x = \frac{(4k+1)\pi}{2}$. Funcția este strict crescătoare pe R.

12. $f'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2\sqrt{x}}$ pentru orice $x \in (0, \infty)$. Funcția este strict crescătoare pe $[0, 1)$ și strict descrescătoare pe $(1, \infty)$. Punctul $x = 1$ este un punct de maxim absolut, punctul $x = 0$ este un punct de minim absolut, deși funcția nu este derivabilă în acest punct (funcția are derivată infinită în $x = 0$).

13. $f'(x) = 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x)$. Pe intervalele de forma

$$\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \left((2k+1)\pi, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right), \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}, (2k+2)\pi\right)$$

funcția este strict crescătoare, iar pe intervalele

$$\left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right), \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right), \left(2k\pi + \frac{5\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$$

funcția este strict descrescătoare;

punctele $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = (2k+1)\pi$, $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ sînt puncte de minim local, iar punctele $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$, $x = 2k\pi$ sînt puncte de maxim local.

14. $f'(x) = \frac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$ pentru $x \in R|\{-1, 1\}$. Funcția este strict crescătoare pe $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ și este strict descrescătoare pe $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$. Punctul $x = -\sqrt{3}$ este un punct de maxim local iar punctul $x = \sqrt{3}$ este un punct de minim local.

15. $f'(x) = \frac{1 + \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1 - x^2}$ pentru $x \in (-1, 1)$ de unde se vede că $f'(x) > 0$ pe mulțimea de definiție și prin urmare funcția este strict crescătoare pe $(-1, 1)$.

16. $f'(x) = -2 \operatorname{sig} n(\sin 2x)$ pentru $x \neq k\frac{\pi}{2}$; Pe mulțimea $\bigcup_{k \in z} \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ funcția este strict descrescătoare, iar pe mulțimea $\bigcup_{k \in z} \left(k\pi = \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi\right)$ funcția este strict crescătoare; punctele $x = k\pi$ sînt puncte de maxim, iar punctele $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ sînt puncte de minim; în punctele de extrem funcția nu este derivabilă.

17. Fie A și B proiecțiile celor două localități pe direcția căii ferate, a, b distanțele la calea ferată și fie S locul de acostare. Notînd cu x lungimea segmentului AS problema revine la a determina pe x astfel ca $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(d - x^2) + b^2}$ să fie minimă, unde $AB = d$. Se obține $x = \frac{ad}{a+b}$. Se constată că unghiurile pe care cele două segmente de șosea le fac cu calea ferată sînt egale, ceea ce amintește de a doua lege a reflexiei.

18. Notînd cu $2x$ înălțimea cilindrului se obține voumul său $V(x) = 2\pi\, x(R^2 - x^2)$ care este maxim pentru $x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

19. Notînd cu x înălțimea conului, volumul lui este $V(x) = \frac{\pi x^2(2R - x)}{3}$ care are valoare maximă pentru $x = \frac{2R}{3}$.

20. Notînd cu a şi b laturile dreptunghiului şi cu x latura pătratului ce se elimină în fiecare colţ al dreptunghiului, volumul tăvii este $V(x) = x(a - 2x)(b - 2x)$. V este maxim pentru $x = \dfrac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{b}$. Se constată că $x < \min\left\{\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right\}$.

21. Funcţia este definită pe R, $f(0) = -4$, $f(x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = -2$ sau $x = 2$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) = 1$, deci dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală la ambele ramuri infinite. Deoarece $f(x) = f(-x)$ rezultă că dreapta $x = 0$ este axă de simetrie a graficului; $f'(x) = \dfrac{8x}{(1 + x^2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{1 - 3x^2}{(1 + x^2)^3}$. Variaţia funcţiei este redată în tabelul de mai jos.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		2		$+\infty$
f'		$-$	$-$		$-$		0		$+$	$+$	$+$	$+$ $+$	$+$
f''	$+$	$+$	$+$		$+$ 0	$-$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	$+$ $+$	$+$
f	1	$\downarrow$	0	$\downarrow$	$\frac{-11}{4}$	$\downarrow$	-4	$\uparrow$	$-\frac{11}{4}$	$\uparrow$	0	$\uparrow$ $\uparrow$	1
			convexă				concavă				convexă		

Punctul $(0, -4)$ este un punct de minim absolut, punctele $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{11}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{11}{4}\right)$ sînt puncte de inflexiune. Graficul este redat în fig. 8.1.

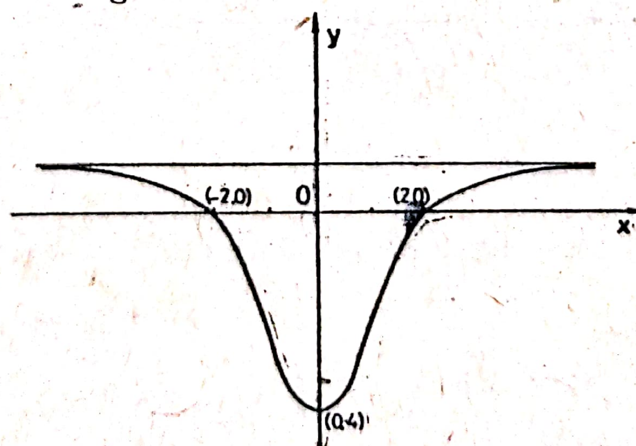


Fig. 8.1.

22. Funcţia este definită pe R, $f(x) > 0$ pentru orice $x \in R$, $f(0) = 1$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$ şi $-\infty$. $f'(x) = 2\dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$, $f''(x) = -4\dfrac{x^3 - 3x - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$. Se poate arăta cu şirul lui Rolle că derivata a doua are trei rădăcini reale situate pe $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ $(1, 0)$, deci graficul are trei puncte de inflexiune. Variaţia este redată în tabelul :

x	$-\infty$			-1	0			1					$+\infty$
f'	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	+	+
f	1	↑	↑	3 ↓	1	↓		$\frac{1}{3}$	↑		↑		1

Punctul $(-1, 3)$ este punct de maxim, punctul $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ este punct de minim. Graficul este redat în fig. 8.2.

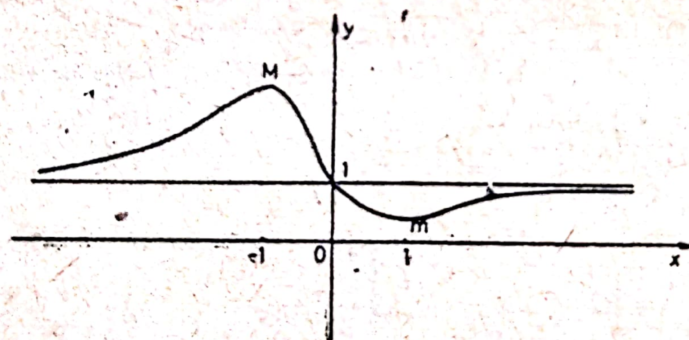


Fig. 8,2.

23. Domeniul maxim de definiţie al funcţiei este $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$. $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 4}{2(x+2)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}}$

Variaţia funcţiei este descrisă în tabelul următor.

x			$\approx -3{,}2$		-2	0	1		
f'		$+\ +$	0	$-$		‖‖‖		$+\ +\ +\ +\ +\ +$	
f	$-\infty$	↑		↓	$-\infty$	‖‖‖	0	↑	↑ $+\infty$

Dreapta $y = x - \frac{3}{2}$ este asimptotă oblică la ambele ramuri infinite, iar dreapta $x = -2$ este asimptotă verticală. Graficul este redat în fig. 8.3.

24. Domeniul maxim de definiție: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Graficul taie axa Ox în punctul $(2, 0)$. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală la ambele ramuri infinite, dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală; $f'(x) = \frac{6 - 2x}{x^4}$, $f''(x) = \frac{6x - 24}{x^5}$. Punctul $\left(3, \frac{1}{27}\right)$ este punct de maxim relativ, punctul $\left(4, \frac{1}{32}\right)$ este punct de inflexiune. Variația funcției este redată în

x	$-\infty$	0		2		3		4		$+\infty$
f'	$+\ +\ +\ +\ +\ +$	‖	$+$	$+$		0	$-$	$-$	$-\ -$	
f''	$+\ +\ +\ +\ +\ +$	‖	$-$	$-$			$-$	0	$+\ +\ +\ +$	
f	0 ↑ ↑ ↑ $+\infty$ convexă	‖ $-\infty$	↑	0	↑ concavă	$\frac{1}{27}$	↓	$\frac{1}{32}$	↓ ↓ ↓ convexă	0

Graficul este reprezentat în fig. 8.4.

25. Domeniul maxim $R \setminus \{1, 3\}$. Graficul taie axa Oy în $\left(0, \frac{2}{3}\right)$. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ deci dreapta $y = 1$ este asimptotă

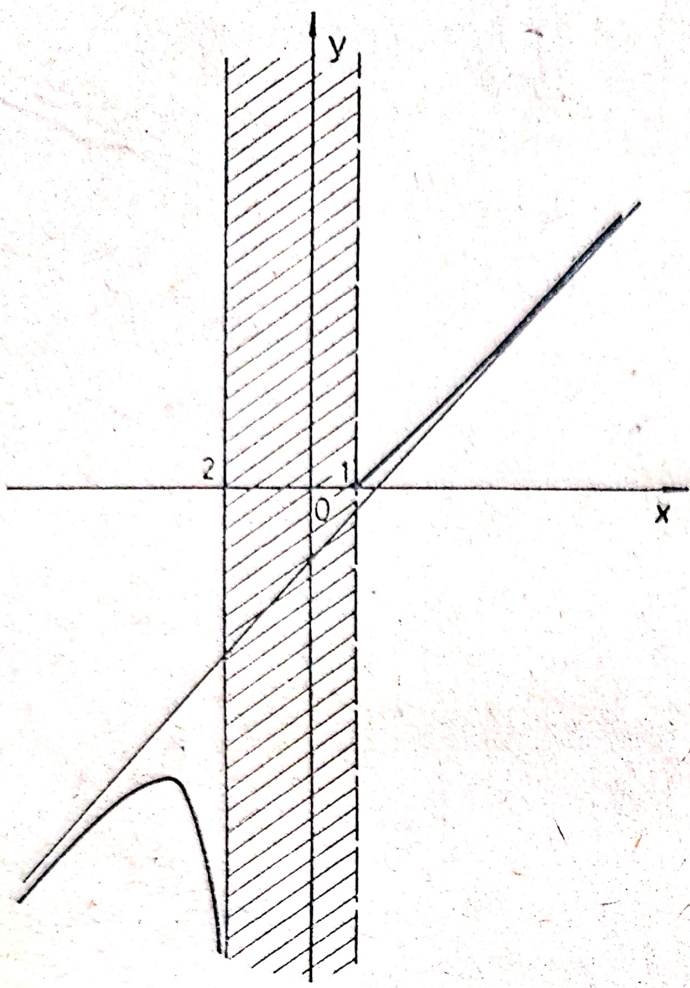


Fig. 8.3.

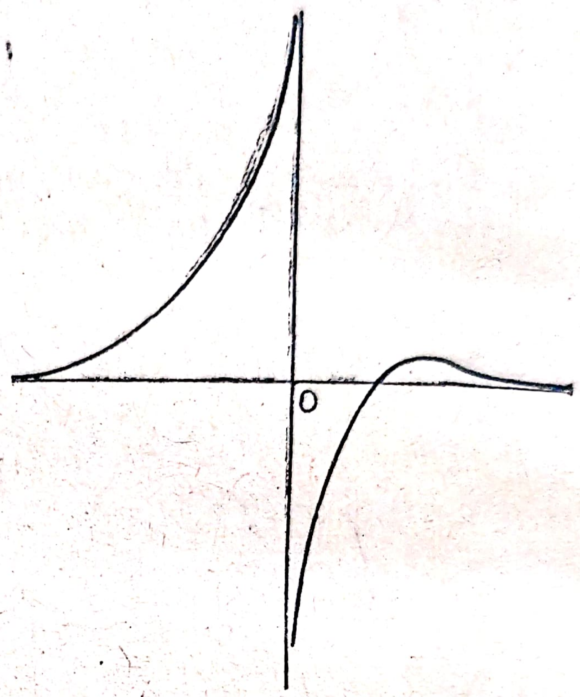


Fig. 8.4.

orizontală; dreptele $x = 1$, $x = 3$ sînt asimptote verticale. $f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 2x + 5}{(x^2 - 4x + 3)^2}$. Variația funcției este

x	$-\infty$ $\qquad$ 1	$\frac{5}{3}$ $\qquad$ 3	$+\infty$
f'	$-\ -\ -\ 0\ +\ +\ +$	$+\ \ 0\ \ -$	$-\ -\ -$
f	$1\ \downarrow\ \downarrow\ \frac{1}{2}\ \uparrow\ \uparrow\ +\infty$	$-\infty\ \uparrow\ -\frac{7}{2}\ \downarrow\ -\infty$	$+\infty\ \downarrow\ \downarrow\ 1$

Se poate arăta că graficul are un punct de inflexiune pe intervalul $(-\infty\ -1)$. Graficul este redat în fig. 8.5.

Fig. 8.5.

Fig. 8.6.

26. Domeniul maxim de definiție $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup [1, +\infty)$. Graficul taie axa Ox în punctul $(1, 0)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{(3x+1)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{3x+1}}}$. Tabloul de variație este

x	$-\infty$				$-\frac{1}{\sqrt{3}}$			$-\frac{1}{3}$	0	1				$+\infty$
f'		+	+	+	0	−	−	‖‖‖	‖‖‖		+	+	+	
f	$-\infty$	↑	↑		$-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{6}}$		↓ $-\infty$	‖‖‖	‖‖‖	0	↑	↑		$+\infty$

Dreapta $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ este asimptotă oblică, iar $x = -\frac{1}{2}$ este asimptotă verticală. Graficul este trasat în fig. 8.6.

27. Domeniu maxim $(0, \infty)$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Funcţia poate fi prelungită prin continuitate în $x = 0$ punînd $f(0) = 0$. $f'(x) = 1 + \ln x$, $f''(x) = \frac{1}{x}$.

Punctul $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$ este un punct de minim absolut. Graficul nu are asimptote. Variaţia funcţiei este

x	0		$\frac{1}{2}$		1				$+\infty$
f'		$-$	0	$+$		$+$	$+$	$+$	
f''		$+$		$+$		$+$	$+$	$+$	
f	0	$\downarrow$	$-\frac{1}{e}$ convexă	$\uparrow$	0	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$+\infty$

şi graficul este redat în fig. 8.7.

28. Funcţia este definită pe R; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$ $f''(x) = \sin x$. Graficul nu are asimptote. Variaţia funcţiei este

x	$-\infty$	-4π	-3π	-2π	$-\pi$	0	π	2π	3π	$4\pi \ldots +\infty$
f'	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0 $+$
f''		0 $+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	0
f	$-\infty$ $\uparrow$	-4π $\uparrow$	-3π $\uparrow$	-2π $\uparrow$	$-\pi$ $\uparrow$	0 $\uparrow$	π $\uparrow$	2π $\uparrow$	3π $\uparrow$	4π $\uparrow$ $+\infty$
				…convexă	concavă	concavă	convexă…			

Punctele $k\pi$, k întreg sînt puncte de inflexiune. Vezi graficul în fig. 8.8.

Fig. 8.7.

Fig. 8.8.

29. Domeniul maxim $[-1,\ 1]$ $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, $f'(x)=1+$ $+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}>0$ pentru $x \in (-1,\ 1)$ $f''(x)=\dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ pentru $x \in (-1,\ 1)$. Variația funcției este

x	-1			0			1
f'		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$-1-\dfrac{\pi}{2}$	$\uparrow$	$\uparrow$	0	$\uparrow$	$\uparrow$	$1+\dfrac{\pi}{2}$
		concavă		inf		convexă	

Deoarece $f(-x)=-f(x)$ rezultă că punctul $(0,\ 0)$ este centru de simetrie al graficului (fig. 8.9).

30. Domeniul maxim R. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$. Graficul taie axa Oy în punctul $(0,\ \ln 2)$. $f'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}>0$ pentru orice $x \in R$. Dreapta $y=0$ este asimptotă la $-\infty$, iar dreapta $y=x$ este asimptotă la $+\infty$. Graficul este redat în fig. 8.10.

31. Domeniul maxim de definiție $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 3)\cup(3,\infty)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ deci dreapta $y=0$ este asimp-

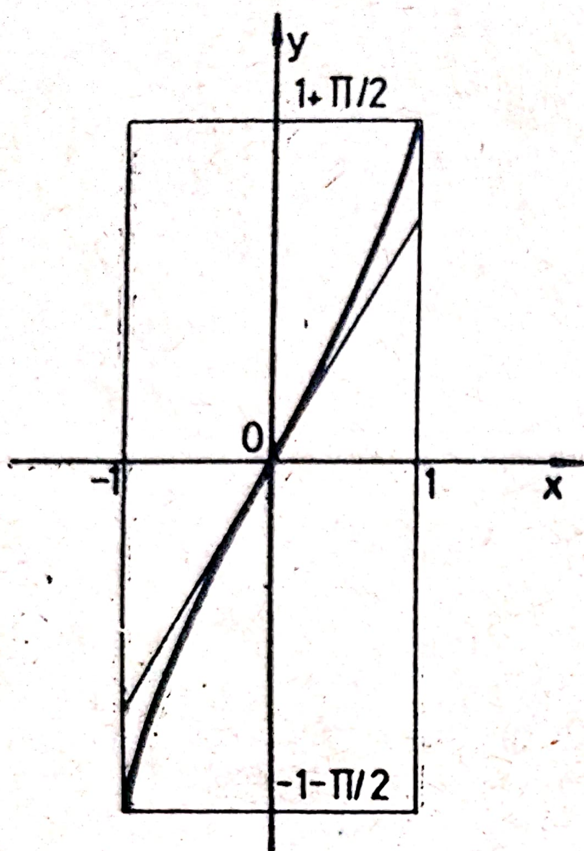


Fig. 8.9.

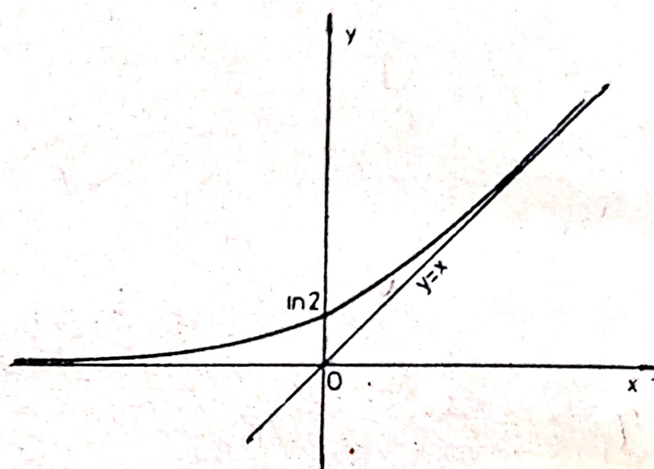


Fig. 8.10

totă orizontală la ambele ramuri infinite; dreptele $x = -1$, $x = 3$ sînt asimptote verticale. $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 6x + 3}{(x^2 - 2x - 3)^2}$

Tabloul de variație a funcției este

x	$-$ $-3-2\sqrt{3}$ -3 1	0 $-3+2\sqrt{3}$ 3	$+\infty$
$f,$	$-$ $-$ 0 $+$ $+$	$+$ $+$ 0 $-$ $-$	$-$ $-$ $-$
f	0 $\downarrow$ $-\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ $\uparrow$ 0 $\uparrow$ $+\infty$	$\uparrow$ $-\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ $\downarrow$ $+\infty$ maxim $-\infty$	$+\infty$ $\downarrow$ 0

Graficul este redat în fig. 8.11.

32. Domeniul maxim de definiție a funcției $(0,1] \cup (2, +\infty)$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, dreapta $y = 0$ este asimptotă la $+\infty$, dreptele $x=0$, $x=2$ sînt asimptote verticale. $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x - 2}{2(x^2 - 2x)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-2x}}} < 0$

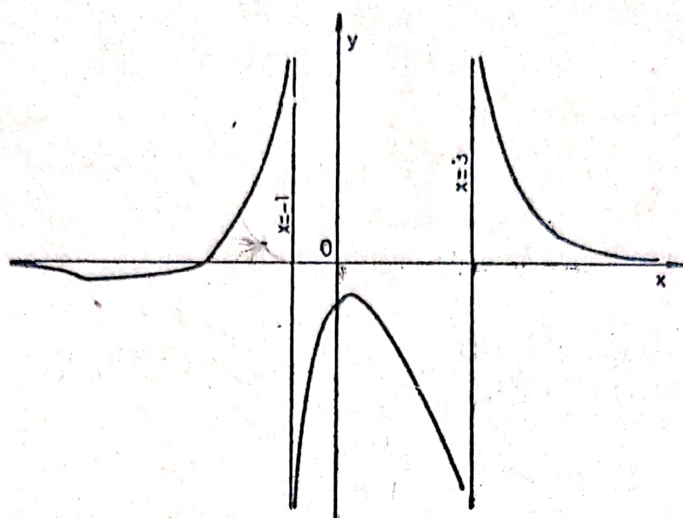


Fig. 8.11.

pentru orice $x \in (0, 1) \cup (2, \infty)$. Variaţia funcţiei este cuprinsă în tabelul

x	0		1		2		$+\infty$
f'	$-$	$-$	||||||	||||||	||||||	$-$ $-$ $-$	
f	$+\infty$ ↓	↓	0 ||||||	||||||	|||||| $+\infty$	↓ ↓	0

Graficul este reprezentat în fig. 8.12.

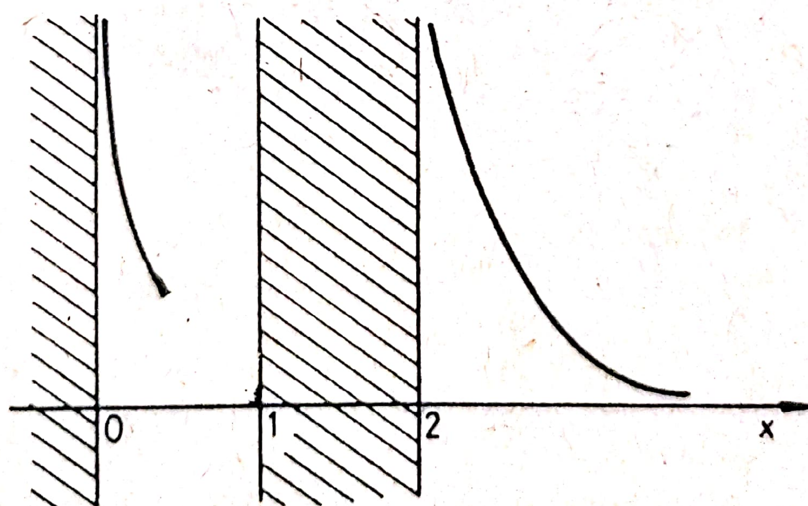


Fig. 8.12.

33. $x \in (-\infty,\ 2] \cup (3, 4]$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \downarrow 3} f(x) = +\infty$ deci dreapta $x = 3$ este asimptotă verticală. $f'(x) =$

$$= \frac{-x^2 + 6x - 10}{2(x-3)^2 \sqrt{\dfrac{-x^2+6x-8}{x-3}}} < 0 \text{ pe } (-\infty,\ 2) \cup (3,\ 4) \text{ deci}$$

funcția este strict descrescătoare pe domeniul de definiție. Variația funcției este

x	$+\infty$		0		2		3		4	
f'		$-$ $-$	$-$	$-$		/////		$-$ $-$		/////
f	$+\infty$	$\downarrow$ $\downarrow$	$\sqrt{\dfrac{8}{3}}$	$\downarrow$	0	/////	$+\infty$	$\downarrow$	0	/////
		convexă						convexă		

iar graficul este redat în fig. 8.13.

34. Domeniul maxim de definiție a funcției $R \setminus \{1\}$ $f'(x) =$

$$= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

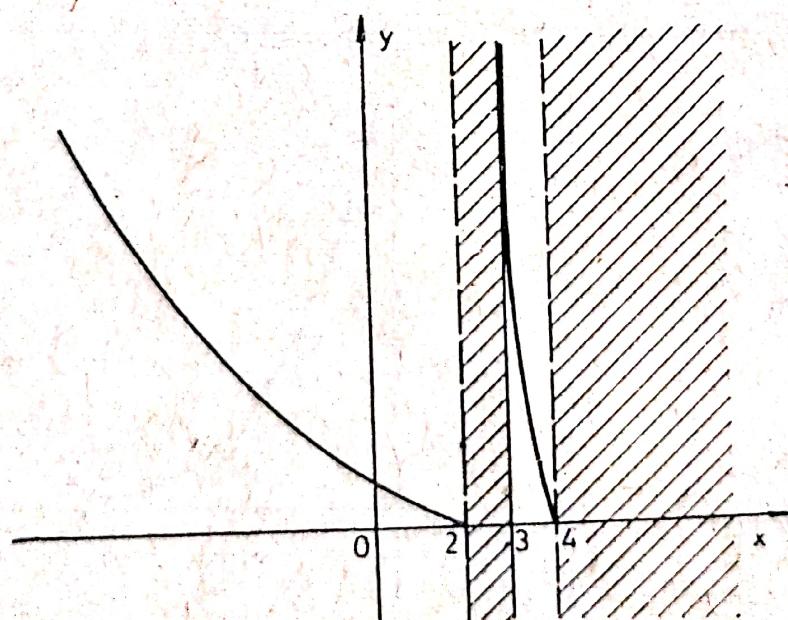


Fig. 8.13.

Tabloul de variaţie este

x	$+\infty$		0		1		3		$-\infty$
f'	+	+ + +	0	+ +	|	— —	0	+ + +	
f''	—	— —	0	+ +	|	+ +		+ +	
f	$-\infty$	↑ concavă ↑	0	↑ convexă $+\infty$	|	$+\infty$ ↓ convexă	$\frac{27}{4}$	↑ ↑	$+\infty$

Dreapta $y = x + 2$ este asimptotă oblică la ambele ramuri infinite, dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală. Graficul este reprezentat în figura 8.14.

35. Mulţimea maximă de existenţă a funcţiei este $R \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}_{k \in Z}$. Graficul taie axa Ox în punctele $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$. În punctele $k\pi$ funcţia are valoarea 1. $f'(x) = \frac{1}{(\cos x - \sin x)^2} > 0$ pe mulţimea de definiţie. Deoarece funcţia este periodică, cu perioada 2π, este suficient să studiem funcţia pe $[0, 2\pi)$.

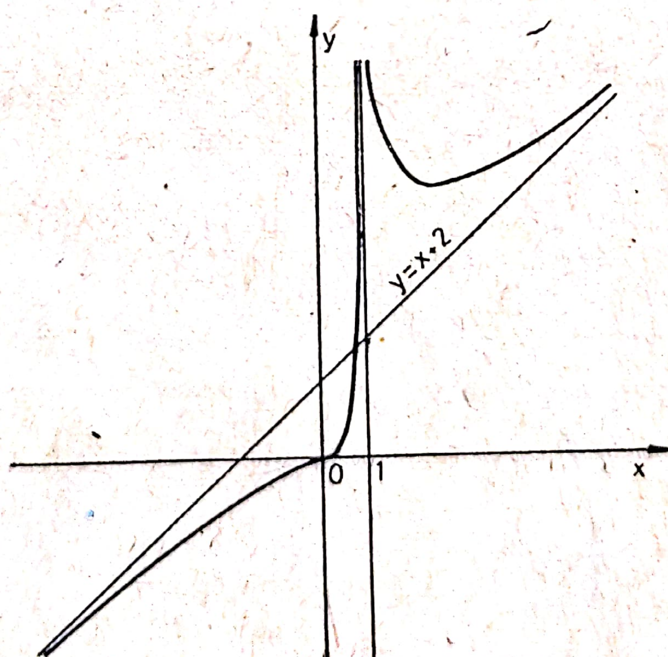


Fig. 8.14.

Variația pe acest interval a funcției este redată în tabelul de mai jos.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
f'	+	+ |	+ +	+	+	+ | +	+	+	+
f''	+	+ |	− − −	0 + +	+	| −	−	0	+ +
f	1 ↑	$+\infty$ | $-\infty$	↑ 0 ↑	$\frac{1}{2}$ ↑	1 ↑	$+\infty$ | $-\infty$ ↓	0 ↓	$\frac{1}{2}$ ↑	1
	convexă		Concavă		Convexă		concavă		convexă

Graficul este reprezentat în figura 8.15.

36. Domeniul maxim de definiție a funcției este R. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ deci dreapta $y = \frac{1}{2}$ este asimptotă orizontală la $+\infty$. $f'(x) = 1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} > 0$ pentru orice

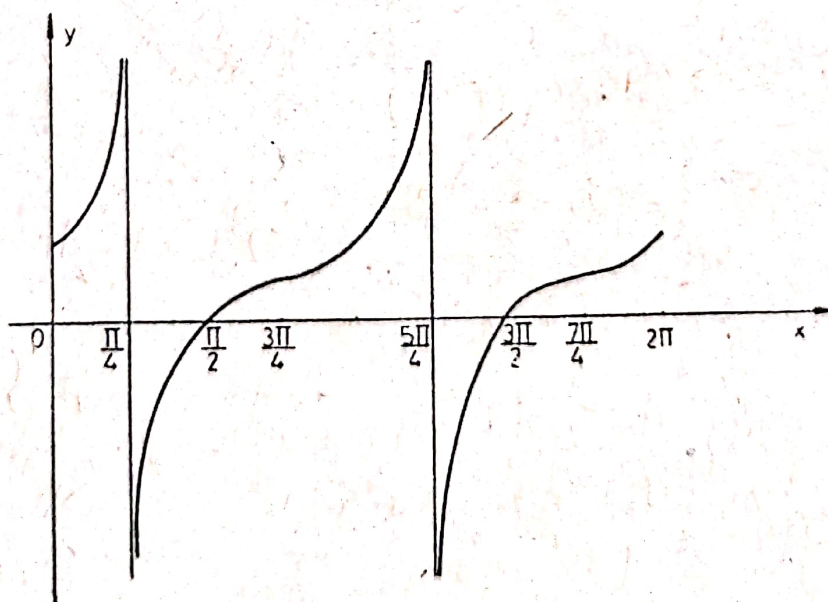


Fig. 8.15.

$x \in R$. Variația funcției este prezentată în tabloul

x	$-\infty$				0		1						$+\infty$
f'		$+$	$+$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
f	$-\infty$	$\uparrow$	$\uparrow$		-1	$\uparrow$	0		$\uparrow$		$\uparrow$		$\frac{1}{2}$

Dreapta $y = 2x + \frac{1}{2}$ este asimptotă oblică la $-\infty$.

Vezi graficul funcției în fig. 8.16.

37. Domeniul maxim de existență este R. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$, deci $y=1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$ $y=-1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$. $f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$ pentru orice $x \in R$: $f''(x) = -\frac{8(e^x \ e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

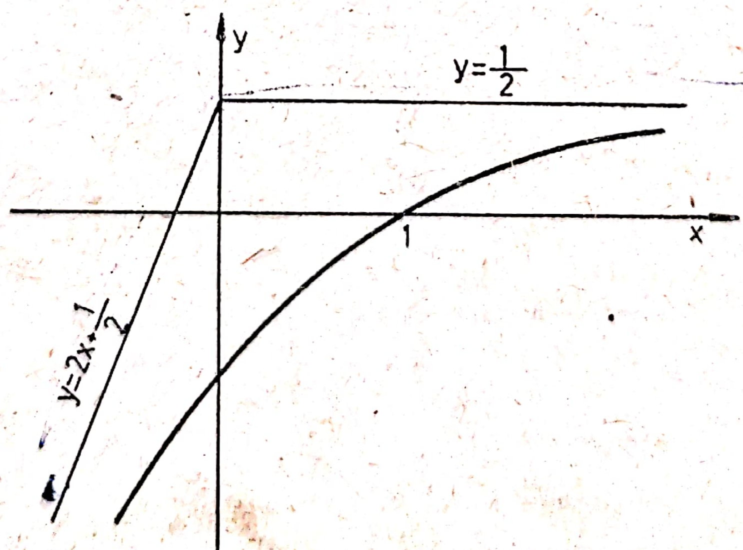


Fig. 8.16.

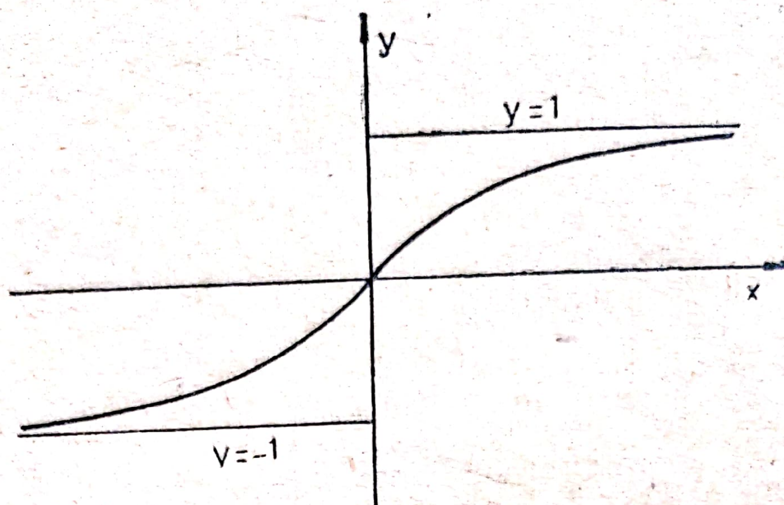


Fig. 8.17.

Punctul (0, 0) este centru de simetrie al graficului reprezentat în fig. 8.17.

38. După explicitarea modulelor se vede că

$$f(x)=\begin{cases} x+2 \text{ pentru } x\in(-\infty,\ 0] \\ 2-x \text{ pentru } x\in(0,\ 2] \\ x-2 \text{ pentru } x\in(2,\ 4] \\ -x+6 \text{ pentru } x\in(4,\ \infty) \end{cases}$$

Graficul este reprezentat în fig. 8.18.

39. $f(x)=|x+2|+|2x+1|=\begin{cases} -3x-3 \text{ pentru } x\in(-\infty,\ -2] \\ -x+1 \text{ pentru } x\in\left(-2,\ -\frac{1}{2}\right] \\ 3x+3 \text{ pentru } x\in\left(-\frac{1}{2},\ \infty\right) \end{cases}$

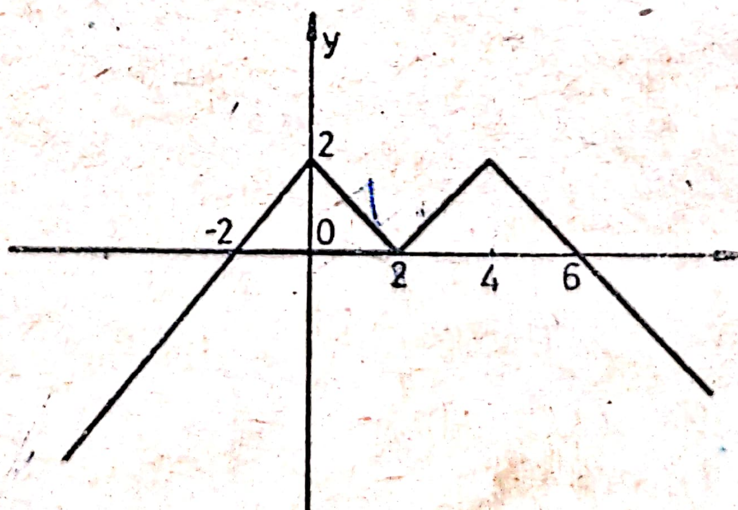


Fig. 8.18.

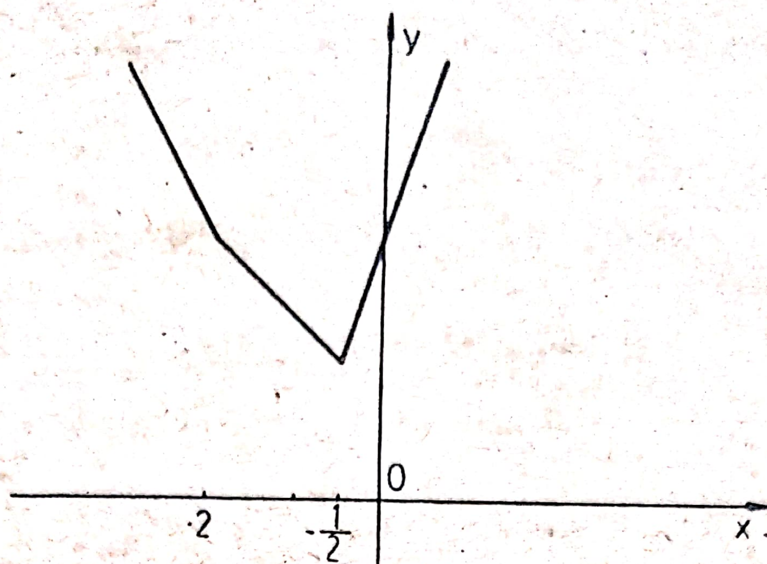


Fig. 8.19.

Graficul este reprezentat în fig. 8.19.

40. $x \in (0, \infty)$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $f(1) = 0$ $f'(x) =$

$$= \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} > 0$$

pentru orice $x \in (0, \infty)$, $f''(x) = -\frac{(1 + \ln x)^2}{x^2(1 + \ln^2 x)^2} < 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.

Funcția este strict crescătoare pe $(0, \infty)$ și concavă pe tot intervalul. Vezi graficul în fig. 8.20.

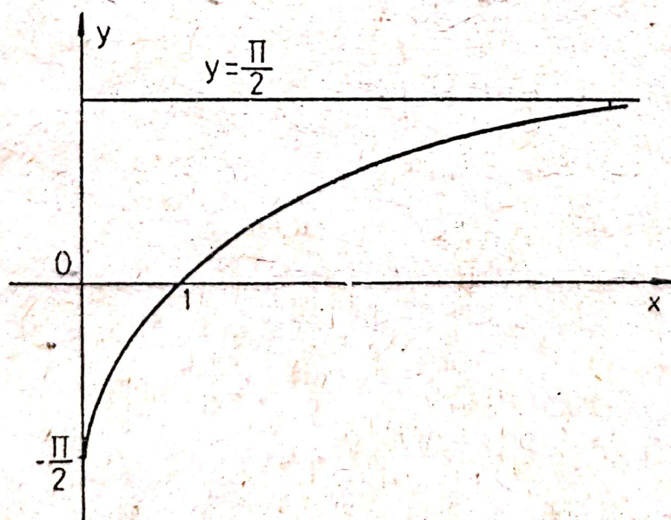


Fig. 8.20.

41. a) Condiția $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = f(0)$ conduce la $b = -1$ iar condiția $f_s'(0) = f_d'(0)$ conduce la $a = 0$. Evident în punctele $x \neq 0$ din mulțimea de definiție funcția este continuă și derivabilă.
b) Se ține seama că $|\sin x| \leqslant |x|$ pentru orice x real iar pe $[0, 1]$ $|x^3 - 1| \leqslant 1$.

42. Remarcăm la început că f este derivabilă pe $(-\infty, -1) \cup \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ pentru orice a și b și că $f_d'(1) = -1$ $f_s'(-1) = 1$. Din aceasta deducem că $a \neq 0$. Din condiția de continuitate în $x = -1$, și $x = 1$ se obțin egalitățile $a \sin \dfrac{\pi(b-1)}{2} = a \sin \dfrac{\pi(b+1)}{2} = 0$ de unde deducem că $b = 1 + 2k$, k fiind număr întreg. Din condiția de derivabilitate se obține $\dfrac{a}{2} \cos \pi k = 1$ de unde $a = (-1)^k \cdot \dfrac{2}{\pi}$.

43. a) Funcția este continuă pe toată axa reală

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-3x-4}{x^2+1} & \text{dacă } x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup [2, \infty] \\[2ex] \dfrac{-4x^2+3x}{x^2+1} & \text{dacă } x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 2\right) \end{cases}$$

de unde se constată că f este derivabilă pe toată axa cu excepția punctelor $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+8x-3}{(x^2+1)^2} & \text{dacă } x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup (2, \infty) \\[2ex] \dfrac{-3x^2-8x+3}{(x^2+1)^2} & \text{dacă } x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 2\right) \end{cases}$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, $f(x) = 0$ dacă și numai dacă x $= 0$ sau $x = \dfrac{3}{4}$ sau $x = -\dfrac{4}{3}$. Variația funcției este redată în tabloul de mai jos.

x	$-\infty$ $\quad -3 \quad \frac{4}{3} - \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{3}{4} \quad 2 \quad +\infty$
f'	$+ + + \; 0 \; - - - \mid + + + \; 0 \; - \; - \; - \mid + + + + + +$
f	$0 \quad \uparrow \quad \uparrow \; \frac{1}{2} \downarrow 0 \downarrow -2 \quad \uparrow \; \frac{1}{2} \uparrow 0 \downarrow 0 \downarrow -2 \uparrow \quad \uparrow \uparrow \quad 0$

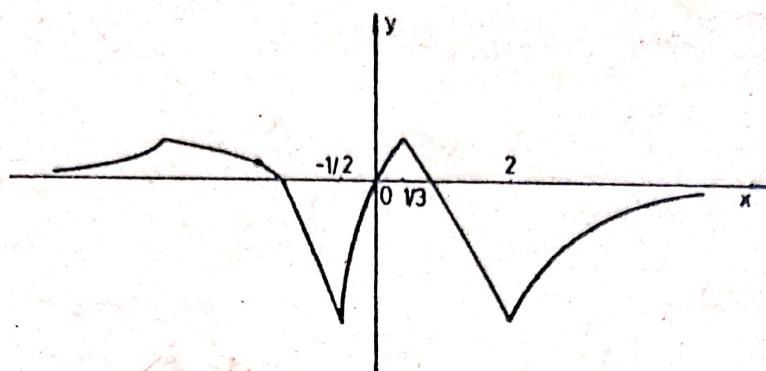


Fig. 8.21.

De aici rezultă că funcția are punctele de maxim $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ și punctele de minim $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$, $(2, -2)$. Să observăm că în punctele $x = -\frac{1}{2}$, $x = -2$ funcția are puncte de extrem fără a fi derivabilă. Graficul funcției este redat în fig. 8.21. c) Pentru $m \in (-\infty, -2)$ ecuația nu are nici o rădăcină reală; pentru $m = -2$ ecuația are rădăcinile $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$; pentru $m \in (-2, 0)$ ecuația are patru rădăcini reale;

Pentru $m = 0$ ecuația are rădăcinile $-\frac{4}{3}$, 0, $\frac{3}{4}$, pentru $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ecuația are patru rădăcini reale; dacă $m = \frac{1}{2}$ ecuația are două rădăcini duble $x_1 = x_2 = -3$, $x_3 = x_4 = \frac{1}{3}$ pentru $m \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ ecuația nu are rădăcini reale.

44. Se utilizează șirul lui Rolle: $f'(x) = 60(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6)$ și are rădăcinile reale $-3, -1, 1, 2$, Șirul lui Rolle arată astfel

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\alpha + 279$	$\alpha - 147$	$\alpha + 217$	$\alpha + 104$	$+\infty$

Înscriem semnul lui f în punctele -3, -1, 1, 2 după diverse valori ale lui α în tabloul

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	$+\infty$
α \ f	$-$	$\alpha+729$	$\alpha-147$	$\alpha+217$	$\alpha+104$	$+$
$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
-729	$-$	0	$-$	$-$	$-$	$+$
-217	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$-$		$-$	0	$-$	$+$
-104		$+$	$-$	$+$	0	$+$
	$-$		$-$	$+$	$+$	$+$
147	$-$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
∞	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	

Pentru $\alpha \in (-\infty, -729)$ ecuația are o singură rădăcină reală situată pe $(2, \infty)$; pentru $\alpha = -729$ ecuația are o rădăcină dublă $x_1 = x_2 = -3$ și încă o rădăcină reală pe $(2, \infty)$; dacă $\alpha \in (-729, -217)$, ecuația are trei rădăcini reale pe $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(2, \infty)$ pentru $\alpha = -217$ ecuația are rădăcină dublă $x_1 = x_2 = 1$ și încă o rădăcină reală pe $(-\infty, -3)$; Cînd $\alpha \in (-217, -104)$ ecuația are cinci rădăcini reale situate, respectiv pe $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$ pentru $\alpha = -104$ ecuația are rădăcina dublă $x_1 = x_2 = 2$ și încă trei rădăcini reale; pentru $\alpha \in (-104, 147)$ ecuația are trei rădăcini reale; dacă $\alpha = 147$ ecuația are o rădăcină reală dublă $x_1 = x_2 = -1$ și încă una reală pe $(-\infty, -3)$; pentru $\alpha \in (147), \infty)$ ecuația are o singură rădăcină reală pe $(-\infty, -3)$.

48. 45) 46) 47) Se rezolvă analog. Notînd $f(x) = x^4 - 2\lambda^2x^2 + \lambda^3 - \lambda + 1$ avem $f'(x) = 4x^3 - 4\lambda^2x$ ale cărei rădăcini sînt 0, λ și $-\lambda$. Avem $f(\lambda) = f(-\lambda) = (1 - \lambda^2)(\lambda^2 - \lambda + 1)$, $f(0) = \lambda^3 - \lambda + 1$. În realizarea șirului lui Rolle trebuie să acordăm atenție ordinii în care plasăm rădăcinile derivatei: pentru $\lambda \in (-\infty, 0)$ ordinea crescătoare este λ, 0, $-\lambda$, iar pentru $\lambda \in (0, \infty)$ ordinea este $-\lambda_0$, 0, λ. Să

mai observăm că $\lambda^3 - \lambda + 1$ are o singură rădăcină reală iraţională situată pe $(-2, -1)$, fie ea λ_0. Cu acestea avem şirul

$\lambda \backslash x$	$-\infty$	λ	0	$-\lambda$	$+\infty$
$\lambda \backslash f$	$+$	$(1-\lambda^2)(\lambda^2-\lambda+1)$	$\lambda^3-\lambda+1$	$(1-\lambda^2)(\lambda^2-\lambda+1)$	$+$
$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
-2		$-$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	0		
			$+$	$-$	$+$
-1	$+$	0		0	
0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
		$+$	$+$	$+$	$+$
		$-\lambda$	0	λ	
0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$+$	$+$		$+$	
			$+$		$+$
1		0		0	
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$	
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
∞					

Deci, pentru $\lambda \in (-\infty, \lambda_0)$ ecuaţia are două rădăcini reale; Dacă $\lambda = \lambda_0$ ecuaţia are rădăcina dublă pe 0 şi încă două rădăcini reale; pentru $\lambda \in (\lambda_0, -1)$ ecuaţia are patru rădăcini reale; pentru $\lambda \in (-1, 0)$ ecuaţia nu are nici o rădăcină reală; dacă $\lambda = 0$ ecuaţia are patru rădăcini nule; pentru $\lambda \in (0, 1)$ ecuaţia nu are nici o rădăcină reală; pentru $\lambda = 1$ şi $\lambda = -1$ ecuaţia are rădăcinile $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$.

49. Se taie graficul funcţiei $x \xrightarrow{f} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 1}$ cu o dreaptă orizontală $y = \lambda$: Derivata $f'(x)$ are rădăcina $x = -1$ şi încă o rădăcină reală x_0 situată pe $(0, 1)$ în care f ia o valoare λ_0, $\lambda_0 < -2$. Graficul funcţiei este reprezentat în figura 8.22. Concluzii: pentru $\lambda \in (-\infty, \lambda_0)$ ecuaţia dată are o singură rădăcină reală; pentru $\lambda = \lambda_0$ ecuaţia are o rădăcină dublă egală cu x_0 şi încă o rădăcină reală; dacă $\lambda \in (\lambda_0, 0)$ ecuaţia

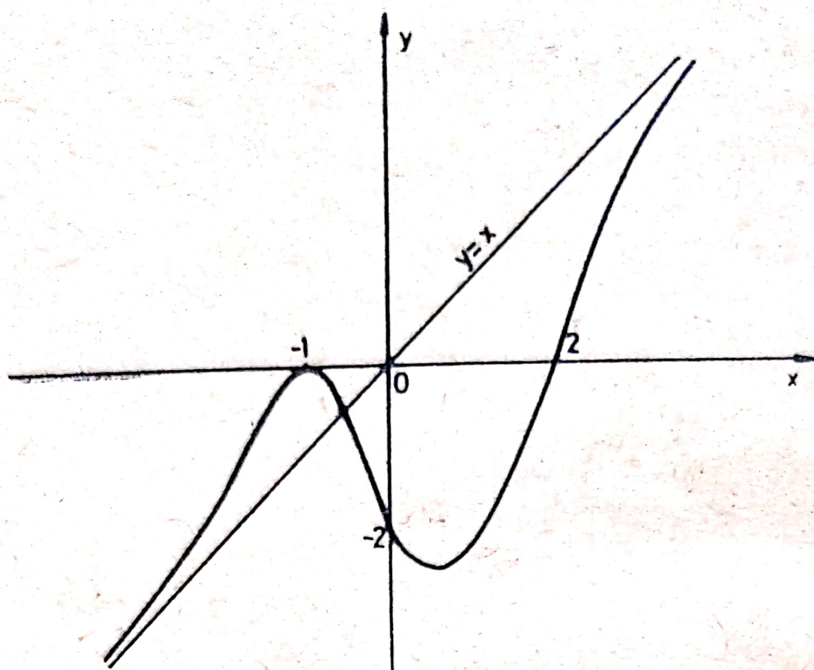


Fig. 8.22

are trei rădăcini reale; pentru $\lambda = 0$ ecuaţia are rădăcinile $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 2$; dacă $\lambda \in (0, \infty)$ ecuaţia are o singură rădăcină reală situată pe $(2, \infty)$. Exerciţiile 50, 51, 52 se rezolvă la fel 53). Fie $f(x) = x^3 - 3a^2x + 2b^3$. Atunci ecuaţia $f'(x) = 0$ are rădăcinile $x_1 = -a$, $x_2 = a$ şi $f(a) = 2(b - a)(b^2 + ab + a^2)$, $f(-a) = 2(a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Ţinînd seama că $b^2 + ab + a^2 \geqslant 0$, $a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$ pentru orice a, b reală egalităţile realizîndu-se numai pentru $a = 0$, $b = 0$ rezultă că semnul lui $f(a)$ şi $f(-a)$ depinde de poziţia punctului $P(a, b)$ în raport cu dreapta $b - a = 0$ şi, respectiv, dreapta $b + a = 0$. De aici rezultă că dacă (a, b) se află în regiunea I (vezi fig. 8.23) ecuaţia are trei rădăcini reale; dacă (a, b) se află în regiunea II ecuaţia are o singură rădăcină reală, dacă (a, b) se află în regiunea III ecuaţia are trei rădăcini reale diferite, iar dacă (a, b) se află în regiunea IV ecuaţia are o singură rădăcină reală. Dacă punctul (a, b) se află pe una din dreptele $a + b = 0$, $a - b = 0$ atunci ecuaţia are o rădăcină dublă egală cu $-a$, respectiv a, şi încă o rădăcină reală.

54. Şirul lui Rolle este

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f	$-\infty$	$a^2 + b^2 - 1$	$a^2 + b^2 - 5$	$+\infty$

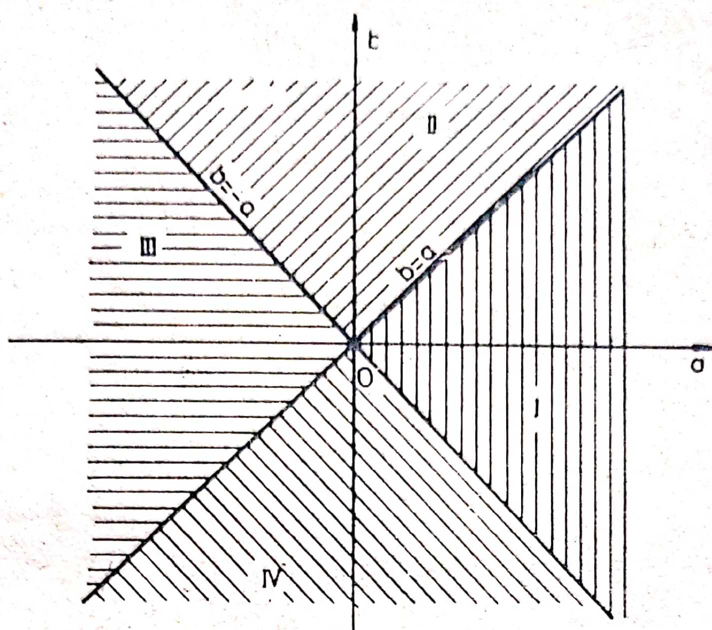


Fig. 8.23.

De aici rezultă că, dacă (a, b) se află în interiorul cercului de rază 1, ecuaţia dată are o singură rădăcină reală, situată pe $(-\infty, -1)$; dacă (a, b) se află pe circumferinţa de rază 1 ecuaţia are o rădăcină dublă egală cu -1 şi rădăcina 2; dacă (a, b) se află în coroana circulară determinată de cercurile de rază 1 şi $\sqrt{5}$, ecuaţia are trei rădăcini reale; dacă (a, b) se află pe circumferinţa de rază $\sqrt{5}$ ecuaţia are rădăcina dublă 1 şi rădăcina -2; dacă (a, b) se află în exteriorul cercului de rază $\sqrt{5}$ ecuaţia are o singură rădăcină reală.

INTEGRALA RIEMANN

1. $\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \ln x$

2. Se face schimbarea $\sqrt{1 + x^2} = t$; rezultă $dt = \frac{x}{(1 + x^2)^{1/2}} dx$ sau $xdx = tdt$ şi deci, formal, $\int x\sqrt{1 + x^2}dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} =$ $= \frac{1}{3}(\sqrt{1 + x^2})^3$

3. Se face schimbarea $\sqrt{2+x^3}=t$ de unde $\int x^2\sqrt{2+x^3}dx =$

$$=\int \frac{2t^2}{3}dt = \frac{2}{9}t^3 = \frac{2}{9}(\sqrt{2+x^3})^3$$

4. Se calculează prin părți: notăm $\ln x = u$ $x^n dx = dv$ de unde $du = \frac{1}{x}dx$ și $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ dacă $n \neq -1$

Deci $\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^n}{n+1}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x -$ $- x^{n+1}$ dacă $n \neq -1$ și $\int x^{-1}\ln x\, dx = \int \frac{1}{x}\ln x\, dx$ care prin schimbarea $\ln x = t$ conduce la $\int \frac{1}{x}\ln x\, dx = \frac{(\ln x)^2}{2}$.

5. Se calculează prin părți: $x = u$, $e^x dx = dv$ și se obține $\int x e^x dx = xe^x - e^x$.

6. Notînd $x = u$, $\sin 2x dx = dv$ se obține $du = dx$, $v = \frac{\cos 2x}{-2}$ și deci $\int x \sin 2x\, dx = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{\cos 2x}{2}dx = -\frac{x}{2} +$ $+\frac{1}{4}\sin 2x.$

7. 8. Fie $E = \int e^{ax}\sin bx\, dx$. Notăm $e^{ax} = u$, $\sin bxdx = dv$. Atunci $du = ae^{ax}dx$. $v = -\frac{1}{b}\cos bx$ și deci $E = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} +$ $+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\, dx.$

Fie $S = \int e^{ax}\cos bx\, dx$. Notînd $e^{ax} = u$ $\cos bx = dv$ avem $du = ae^{ax}dx$, $v = \frac{1}{b}\sin bx$ și deci $S = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\cdot$ $\cdot \sin bxdx$. Prin urmare $E = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}S$ și $S =$ $= \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}E$ de unde se obține $E = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cdot\cos bx)}{a^2+b^2}$,

$$S = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}$$

9. Deoarece $\sin px \sin q = \frac{1}{2}[\cos(p-q)x - \cos(p+q)x$ deducem pentru $p \neq q$, $p \neq -q$, $\int \sin px \sin qx\, dx = = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(p-q)x}{p-q} - \frac{\sin(p+q)x}{p+q}\right)$. Dacă $p = q$ atunci integrala devine $\int \sin^2 px dx$ care prin $px = u$ devine $\int \frac{\sin^2 u}{p} du = = \frac{1}{p}\left(\frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4}\right)$ și deci $\int \sin^2 px dx = \frac{px}{2p} - \frac{1}{4p}\sin 2px$. Dacă $q = -p$ atunci se obține integrala $-\int \sin^2 px dx$.

10. Ținînd seama că $\sin px \cos qx = \frac{1}{2}[\sin(p+q)x + \sin(p - - q)x)]$ rezultă $\int \sin px \cos qx dx = \frac{1}{2}\int \sin(p+q)x dx + + \frac{1}{2}\int \sin(p-q)x dx = -\frac{1}{2\ (p+q)}\cos(p+q)x - \frac{\sin\ (p-q)x}{2(p-q)}$. Dacă $q = p$ atunci $\int \sin px \cos px dx = \frac{1}{2}\int \sin\ 2px dx = = -\frac{1}{4p}\cos 2px$. Analog pentru $q = -p$.

11. $\int \cos px \cos qx dx = \frac{1}{2}\int [\cos(p-q)x + \cos(p+q)]\, dx = = \frac{1}{2(p-q)}\sin(p-q)x + \frac{1}{2(p+q)}\sin(p+q)x$. Dacă $q = = \pm p \int \cos^2 px\, dx = \frac{x}{2p} + \frac{1}{4p}\sin 2px$

12. $\int \sin^{2n+1} x dx = \int (1-\cos^2 x)^n \text{sni}\ x dx = -\int (1-u^2)^n du$ unde $u = \cos x$; deci $\int \sin^{2n+1} x\, dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \frac{\cos^{2k+1}}{n^{2k+1}}$

13. $\int \cos^{2n+1} x dx = \int (1-\sin^2 x)^n \cos x dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{\sin^{2k+1} x}{2k+1}$

14. $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} du =$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \text{arc tg} \frac{2u}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{arc tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

15. Să facem schimbarea $x = \varphi(t) = \sqrt{t}$, $x \in (0, 1)$, $t \in (0, 1)$

atunci $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}$ arc sin x^2

Funcţia $x \to \frac{1}{2}$ arc sin x^2 este primitivă a funcţiei $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

pe întreg $(-1, 1)$

16. $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx = e^{\sin^2 x}$

17. Se face schimbarea $x = \frac{1}{t}$; deci $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ şi (formal)

$$\text{avem} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a}} = -\int \frac{\frac{1}{2^2}\, dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-2t^2}{t^2}}} = -\int \frac{t|t|\ dt}{t^2\sqrt{1-2t^2}}$$

deci pe $(-\infty, -\sqrt{2})$ $\int \frac{dx}{x(x^2-2)^{1/2}} = \int \frac{dt}{(1-2t^2)^{1/2}} =$

$$= \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\, d(t\sqrt{2})}{(1-(t\sqrt{2})^2)^{1/2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc} \cos t\sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc} \cos \frac{\sqrt{2}}{x}$$

iar pe $(\sqrt{2}, \infty)$ $\int \frac{dx}{x(x^2-2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ arc cos $\frac{\sqrt{2}}{x}$

18. $\int \frac{\cos x\ dx}{(1+\sin^2 x)^{1/2}} = \int \frac{d(\sin x)}{[1+(\sin^2 x)^3]^{1/2}} = \int \frac{du}{(1+u^2)^2} = \ln (u + \sqrt{1+u^2}) =$

$= \ln (\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})$

19. Schimbarea $x = \sin t$ realizează o bijecţie derivabilă a intervalului $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pe $(-1, 1)$; deci $\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sin^2 t \cos dt}{(\cos^2 t)^{1/2}} =$

$= \int \sin^2 dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} = \frac{1}{2}$ arc sin $x - \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2}$

20. Schimbarea $x^2 = u$ conduce la $\int \frac{xdx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+u+1} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$ arc tg $\frac{2u+1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ arc tg $\frac{2x^2+1}{3}$

21. Avem $\frac{x^2}{x^4+x^2+1} = \frac{x^2}{(x^2+1)^2 - x^2} = \frac{x^2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} =$
$= \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} = x^3(a+c)+x^2(D+B-A+C)+$
$+ x(A+C-B+D) + B + D$ de unde $A+C=0$, $D+B-$
$-A+C=1$ $A+C+D=0$ $B+D=0$ care conduce la $A - \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$, $B = D = 0$. Prin urmare $\frac{x^2}{x^4+x^2+1} =$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{-x}{x^2+x+1} + \frac{x}{x^2-x+1}\right)$.

Rezultă

$$\int \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx = \frac{1}{2}\left(-\int\frac{x}{x^2+x+1}dx + \int\frac{x}{x^2-x+1}dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1-1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{2x-1+1}{x^2-2+1}dx\right) = \frac{1}{4}\Bigg(-$$
$$-\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \int\frac{1}{x^2+x+1}dx + \int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx +$$
$$+\int\frac{1}{x^2-x+1}dx\Bigg) = -\frac{1}{4}\ln\ (x^2+x+1) + \frac{1}{4}\ln(x^2-x+$$
$$+1) + \frac{1}{4}\ \frac{2}{\sqrt{3}}\ \text{arc tg}\ \frac{2x+1}{3} + \frac{1}{4}\ \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(\text{arc tg}\ \frac{2x-1}{3}\right) = \frac{1}{4}$$
$$\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\text{arc tg}\frac{2x+1}{3} + \text{arc tg}\ \frac{2x-1}{3}\right)$$

22. Ştim că $\int\frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\ x$. Să calculăm aceeaşi integrală prin părţi, punînd $\frac{1}{1+x^2} = u$ $dx = dv$; obţinem $\text{arc tg}\ x =$
$= \frac{x^2}{1+x^2} + \int\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{x}{1+x^2} + 2\int\frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}dx =$
$= \frac{x}{1+x^2} + 2\ \text{arc tg}\,x - 2\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$ adică $\int\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} +\right.$
$\left. + \text{arc tg}\ x\right)$

23. Se pune $\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$
de unde $1 = A(x+1)(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 + (Cx+D)$
$(x+1)^2(x^2+1) + (Ex+F)(x+1)^2$ care conduce după calcule

simple la $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{4}$ $E = -\frac{1}{2}$,

$D = \frac{1}{4}$ $E = -\frac{1}{2}$, $F = 0$. Se obține $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} =$

$= \frac{1}{2} \ln |x+1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4} \ln (x^2+1) + \frac{1}{4}$ arc tg $x +$

$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2+1}$

24. Se pune $\frac{x^2-3x+2}{(x-3)^2(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x-3)^2}$ și se deduce $A = \frac{12}{25}$, $B = \frac{13}{25}$, $C = \frac{2}{5}$ și prin urmare $\int \frac{x^2-3x+2}{(x-3)^2(x+2)} dx$ $= \frac{12}{25} \ln |x+2| + \frac{13}{25} \ln |x-3| - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x-3}$ pe orice interval care nu conține punctele $x = -2$, $x = 3$.

25. Se face schimbarea $\sqrt{x-1} = t$ de unde $dx = 2tdt$ și, formal $\int \frac{x^3}{x-1} dx = 2 \int (1+t^2)^3 dt \ldots$

26. Se pune $x^2 - x + 1 = (x+t)^2$ de unde $x = \frac{1-t^2}{1+2t}$ și $dx =$ $= \frac{-2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2} dt$ și calculul se reduce la calculul unei integrale raționale.

28. $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x(1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \int (\sin^2 x -$ $- \sin^4 x) \, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}$.

29. $$\int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x} dx}{3 \operatorname{tg}^2 x + 5} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{3 \operatorname{tg}^2 x + 5} =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \text{ arc tg } \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}.$$

30. Cu schimbarea $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = u$ $\left(\text{deci } dx = \frac{2du}{1+u^2}\right)$, folosind formulele $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1-u^2}$ se obține $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}$ $dx = 2\int \frac{1-u}{u(u+1)(1+u^2)}\,du.$

31. Se procedează ca la exercițiul precedent.

32. Se folosește schimbarea $\mathrm{tg}\, x = u$ de unde $dx = \frac{du}{1+u^2}$ și integrala se reduce la $\int \frac{du}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(u\sqrt{2})}{1+(u\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}$ $(u\sqrt{2})$ prin urmare $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\, x).$

33. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\sin\cos x-\cos^2 x} = \int \frac{d(\mathrm{tg}\, x)}{\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}\, x-1} = \int \frac{du}{u^2+u-1} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\int \frac{du}{u+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{du}{u+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2u+1+\sqrt{5}}{2u+1-\sqrt{5}}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\,\mathrm{tg}\, x+1+\sqrt{5}}{2\,\mathrm{tg}\, x+1-\sqrt{5}}\right|.$$

34. Se calculează succesiv, prin părți: $\int x^2\cos 3x\, dx = \frac{x^2\cdot\sin 3x}{3} -$ $-\frac{2}{3}\int x\sin 3x\, dx = \frac{x^2}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x.$

35. Prin procedeul indicat la ex. 27 se reduce la o integrală rațională.

36. Se pune $\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ de unde rezultă $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$, $D = 0$ și deci,

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\ln(x^2+1)$$

pe orice interval care nu conține punctul $x = 1$.

37. Fie $E = \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$; calculăm prin părți: $\frac{1}{x^2 + u^2} = u$, $dx = dv$ de unde $v = x$, $du = -\frac{2x}{(x^2 + a^2)}\, dx$. Obținem $E = \frac{x}{x^2 + a^2} + \int \frac{2x^2\, dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{x}{x^2 + a^2} + 2\left[\int \frac{x^2 + a^2}{(x^2 + a^2)^2}\, dx - \int \frac{a^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}\right] = \frac{x}{x^2 + a^2} + 2E - \int a^2 \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$ de unde $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\left(E + \frac{x}{x^2 + a^2}\right)$; dar $E = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$; rezultă $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + \frac{x}{x^2 + a^2}\right)$.

38. Cu schimbarea $1 - x^3 = u$ se obține, formal,

$$\int \frac{dx}{x(1 - x^3)^{1/2}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{6} \ln \left|\frac{u - 1}{n + 1}\right| = \frac{1}{6} \ln \left|\frac{\sqrt{1 - x^3} - 1}{\sqrt{1 - x^3} + 1}\right|.$$

39. Se face schimbarea $\sqrt{1 + e^x} = u$ de unde $\frac{e^x}{2\sqrt{1 + e^x}}\, dx = du$ și deci $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{1 + e^x}} = \int 2du = 2u = 2\sqrt{1 + e^x}$.

40. $\int \frac{(x - 1)dx}{(x^2 - 2x + 3)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x - 2)\, dx}{(x^2 - 2x + 3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2 - 2x + 3)}{(x^2 - 2x + 3)^2} = -\frac{1}{2}\, \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$.

41. $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x\, (1 - \cos^2 x)^2} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x\, (1 - \cos^2 x)^2} = -\int \frac{du}{u(1 - u)^2\, (1 + u)^2}$ care este o integrală rațională.

42. Se face schimbarea $\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} = u$, $x \in (-1, 1)$ care conduce la $\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\, dx = -4\int \frac{u^2}{(u^2 + 1)^2}\, du = -4\left[\int \frac{1}{u^2 + 1}\, du - \int \frac{1}{(u^2 + 1)^2}\, du\right] = -4 \operatorname{arc\,tg} u + 4\int \frac{du}{(u^2 + 1)^2}$. Pentru calculul ultimei integrale vezi ex. 37.

43. Procedăm prin părţi: $\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\,dx = dv$, $\text{arc tg}\, x = u$ de unde $\int \frac{x \,\text{arc tg}\, x}{(1+x^2)^{1/2}}\,dx = \sqrt{1+x^2}\,\text{arc tg}\, x - \sqrt{1+x^2}\,dx$.

Calculul ultimei integrale; fie $E = \int \sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ de unde $2E = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ şi deci $E = \int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2}))$. Aşadar $\int \frac{x\,\text{arc tg}\, x}{(1+x^2)^{1/2}}\,dx = \sqrt{1+x^2}\,\text{arc tg}\, x - \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}))$.

44. Integrînd prin părţi avem $\int \text{arc sin}\, x\,dx = x\,\text{arc sin}\, x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\,\text{arc sin}\, x + \sqrt{1-x^2}$.

45. $\frac{1}{x^6-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^3-1} - \frac{1}{x^3+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{x-2}{x^2-k+1}\right)$. Prin urmare $\int \frac{dx}{x^6-1} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{6}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx - \frac{1}{6}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{12}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\,dx - \frac{1}{12}\int \frac{2x+1+3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{12}(\ln|x^2-x+1 - \ln|x^2+x+1|) - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

46. Se calculează prin părţi: $u = \text{arc sin}\, x$, $dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$\int \frac{x\,\text{arc sin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\,\text{arc sin}\, x + x$.

47. Să punem $\sqrt{x^2+1} = t$ atunci $x^2 = t^2 - 1$ şi $\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = dt$;

prin urmare $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t = \frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3} - \sqrt{x^2+1}$.

48. Se constată $\frac{x^2}{x^4+x^2-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+2}\right)$ și deci $\int\frac{x^2\,dx}{x^4+x^2-2}=$ $=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{3\sqrt{2}}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}$.

49. Notînd $\ln(x+1)=u$, $\frac{x\,dx}{(x+1)^2}=dv$ obținem $du=\frac{dx}{1+x}$, $v=$ $=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}$ și deci $\int\frac{x\ln(x+1)}{(x+1)^2}\,dx=\ln^2(x+1)+$ $+\frac{1}{x+1}\ln(x+1)-\int\frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx-\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\ln^2(x+1)+$ $+\frac{1}{x+1}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln^2(x+1)+\frac{1}{x+1}$.

50. Notăm $\ln\frac{1+x}{1-x}=u$, $x\,dx=dv$ și se obține $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx=$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\quad(x\in(-1,\ 1)).$$

51. Fie $E_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$. Calculăm prin părți integrala $E_{n-1}=$ $=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$ punînd $u=\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}$, $dx=dv$; rezultă $E_{n-1}=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+$ $+2(n-1)\left[\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx\right]=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)E_{n-1}-$ $-2(n-1)a^2\ E_n$ adică $2(n-1)a^2\ E_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+$ $+(2n-3)\ E_{n-1}$.

52. Avem succesiv: $\int\sin^{2n}x\,dx=\int\sin^{2n-1}x.\sin x\,dx=-\sin^{2n-1}x$ $\cos x+(2n-1)\int\sin^{2n-2}x\cos^2 x\,dx=-\sin^{2n-1}x\cos x+$ $+(2n-1)[\int\sin^{2n-2}x\,dx-\int\sin^{2x}x\,dx]$, de unde $2n\int\sin^{2n}x\,dx=$ $=-\sin^{2n-1}x\cos x+(2n-1)\int\sin^{2n-2}x\,dx$ de unde $\int\sin^{2x}x\,dx=-\frac{1}{2n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{2n-1}{2n}\int\sin^{2n-2}x\,dx$.

53. Avem $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{3}{3n+3k+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}+\frac{1}{3n}}$ şi deoarece $\frac{k}{n} < \frac{k}{n} + \frac{1}{3n} < \frac{k+1}{n}$ pentru fiecare $k = 0, 1, \ldots, n-1$ rezultă că $\lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3}{3n+3k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln\ 2.$

54. $\frac{\sqrt{n}}{n^3}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\sqrt{2n-k}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k/n)^2}{\sqrt{2-k/n}}$ şi deci $\lim_n \frac{\sqrt{n}}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{2n-k}} = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx.$ Integrala se calculează cu schimbarea $\sqrt{2-x} = t$, $x \in [0, 1]$, $t \in [1, \sqrt{2}]$. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx = \int_2^1 -2(2-t^2)^2\,dt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{4t^3}{3} + 4t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}.$

55. $\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{2^{n+2}}{2^{2n+2}+(2k+1)^2} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)^2}$ şi cum $\frac{k}{2^n} < \frac{2k+1}{2^{n+1}} < \frac{2k+2}{2^{n+1}} = \frac{k+1}{2^n}$ pentru $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$ rezultă

$$\lim \sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{2^{n+2}}{2^{2n+2}+(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

56. $\lim_n \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)(n^2+k^2)^{1/2}} = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)^{1/2}}.$ Pentru calculul acestei integrale facem schimbarea $\sqrt{1+x^2} = x + t$ de unde $x = \frac{1-t^2}{2t}$, $x \in [0, 1]$, $t \in [1, \sqrt{2}-1]$.

Obţinem $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)^{1/2}} = 2\int\limits_1^{\sqrt{2}-1} \frac{dt}{t^2-2t-1} =$

$$= 2\int\limits_1^{\sqrt{2}-1} \frac{dt}{(t-1)^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right|\Bigg\|_1^{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(2+\sqrt{2})$$

57. $\lim\limits_n n^2 \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{(n^2+k^2)(\sqrt{n^2+k^2}+n)} =$

$$= \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\left[1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]\left(\sqrt{1\left(\frac{k}{n}\right)^2}+1\right)} = \int\limits_0^1 \frac{1}{(1+x^2)(\sqrt{1+x^2}+1)} =$$

$= 1$ (Integrala se calculează cu metoda de la exerciţiul precedent).

58. $\lim\limits_n \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n \sin^2\frac{k\pi}{n} = \int\limits_0^1 \sin^2 \pi x \; dx = \frac{1}{2}$

59. $\lim\limits_n \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^n \sqrt{k} = \lim\limits_n \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \int\limits_0^1 \sqrt{x}\; dx = \frac{2}{3}$

60. $\lim\limits_n n\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{3n^2+k^2} = \lim\limits_n \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+3} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$

61. Deoarece $\xi_k = \frac{k-1}{n} + \frac{k}{n^2} \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ pentru orice $k =$ $= 1, \ldots, n$, rezultă $\lim\limits_n \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}+\frac{k}{n^2}\right) = \int\limits_0^1 f(x)dx.$

62. Se consideră diviziunea segmentului $[0, 1]$ formată cu punctele $x_k = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n^2}$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$ şi alegînd pe fiecare (x_k, x_{k+1}) punctul $\xi_k = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n^2}$ atunci suma Riemann asociată funcţiei f şi acestei diviziuni este :

$$E_n = \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\sum_{k=2}^{n+1} f\left(\frac{kn-k+1}{n^2}\right) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{kn-k+1}{n^2}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{k_n-k+1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Funcţia f fiind integrabilă pe $[0, 1]$, este mărginită; rezultă că $\lim\limits_{n} \frac{1}{n^2} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ şi din egalitatea de mai sus rezultă

$$\lim\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{kn-k+1}{n^2}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

63. Se aplică exerciţiul 61 pentru funcţia $f(x) = \sqrt{x}$ pe $[0, 1]$.

64. Se aplică exerciţiul 61 pentru $f(x) = \ln(1+x)$ pe $[0, 1]$.

65. Se ia în exerciţiul 62 $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ pe $[0, 1]$.

66. Aria cerută este $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \frac{1}{3}$.

67. $A = 2\int_0^1 (x - x^3)\,dx = \frac{1}{2}$.

68. $A = \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$.

69. $A = \int_{-1}^{2}\left|\frac{x^3-3x^2+4}{x^2-9}\right|dx = -\int_{-1}^{2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^2-9}\,dx = -\frac{(x+6)^2}{2}\Big|_{-1}^{2} -$

$$-\frac{63}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(21\ln 10 - 39).$$

70. $A = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$

71. $A = 2\int\limits_{0}^{a} \left(\sqrt{2ax - x^2} - \sqrt{ax} \right) \mathrm{d}x = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \right).$

72. $A = 2\int\limits_{0}^{1} \left(2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2} \right) \mathrm{d}x = \frac{22}{15}.$

73. $A = 4\int\limits_{0}^{a} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x$

74. $V = \pi \int\limits_{-a}^{a} y^2 \mathrm{d}x = \pi \int\limits_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \mathrm{d}x = \frac{4}{3} \pi \, ab^2.$

75. $V = \pi \int\limits_{-a}^{a} (y_1^2 - y_2^2) \, \mathrm{d}x$ unde $y_1 = 2a + \sqrt{a^2 - x^2}$, $y_2 = 2a - \sqrt{a^2 - x^2}$ deci $V = \pi \int\limits_{-a}^{a} 8a \sqrt{a^2 - x^2} \, \mathrm{d}x = 8\pi a \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, \mathrm{d}x = 4\pi^2 a^3.$

76. $V = 2\pi \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{2}{(1+x^2)^2} - x^4 \right) \mathrm{d}x$. Calculul integralei $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x$ se face conform exercițiului 22.

77. $V = \pi \left[\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \cos^2 x) \mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 x \, \mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \cos^2 x \, \mathrm{d}x \right] =$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) = \pi \left(1 + \frac{\pi}{4} \right).$$

78. $V = \pi \int\limits_{1}^{2} [(x-1)^2 - \ln^2 x] \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{(x-1)^3}{3} - \ln^2 x + \ln x - x \right] \Big|_1^e$

$$= \pi \left[\frac{(e-1)^3}{3} - e + 1 \right].$$

79. $V = \pi \int_0^{a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} (a - x)^2 dx + \pi \int_{a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}^{a} (2ax - x^2)\, dx$

7. PROBLEME DE CONCURS

1. Pentru orice $n \in N$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1})}{(n+1)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)} \leqslant$ $\leqslant \frac{n(1 + n2)(x_1 + \ldots + x_n)}{n^2(n+1)} = \frac{n^2+1}{n^2+n} \leqslant 1$ deci șirul $(a_n)_{n\in N}$ fiind format din numere pozitive este descrescător. b) Evident $0 < x_{n+1} \leqslant \frac{a_n}{n}$ și cu rezultatul anterior $0 < x_{n+1} \leqslant \frac{a_1}{n}$ pentru orice $n \in N$, de unde rezultă $\lim x_n = 0$.

2. În mod evident $\frac{n}{n^2+n} < |a_n| < \frac{n}{n^2+1}$ pentru orice n de unde rezultă $\lim\limits_n |a_n| = 0$ și deci $\lim a_n = 0$.

3. a) Să remarcăm, la început, că pentru $a > 2$, $\sqrt{\frac{a}{2}+3} > a$ adică $x_2 < x_1$. Presupunînd $x_n < x_{n-1}$ avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{\frac{x_n+6}{x_{n-1}+6}} < 1$ și deci $x_{n+1} < x_n$. Șirul este descrescător (faptul că șirul este definit rezultă din observația că $x_n > 2$ pentru orice $n \in N$, ceea ce se obține prin inducție). b) Trecînd la limită în relația $x_n = \sqrt{\frac{x_{n-1}}{2}+3}$ obținem $\lim x_n = 2$.

4. Prin inducție se arată ușor că $a_0 < a_n < b_n < b_0$ pentru orice $n \in N$; cu aceasta se obține apoi că $a_n < a_{n+1}$, $b_{n+1} < b_n$ și deci șirul $(a_n)_{n\in N}$ este crescător și mărginit, iar șirul $(b_n)_{n\in N}$ este descrescător și mărginit. Rezultă că șirurile sînt convergente; din $a_n = \frac{3a_{n-1} + b_{n-1}}{4}$, se obține și $\lim\limits_n a_n = \lim b_n$.

5. $b_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \sqrt{\frac{(k+1)(k+3)}{k(k+4)}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{(k+1)(k+3)}{k(k+4)} = \frac{1}{2}\cdot \ln \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)(k+3)}{k(k+4)} = \frac{1}{2}\ln\frac{4(n+1)}{n+4}$ de unde rezultă $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}\ln\frac{n^2+6n+8}{n^2+6n+5} > 0$ și deci șirul este monoton crescător și $0 < b_n < \ln 2$. Se obține $\lim b_n = \ln 2$.

6. Trebuie să presupunem că $a \neq \sqrt{2}+1$ deoarece în caz contrar x_2 nu are sens și odată cu acesta, nici termenii următori n-ar putea fi definiți. Rezultă că trebuie să presupunem că $a \notin \{0, 1, -1, \sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1, 1-\sqrt{2}, -\sqrt{2}-1\}$. În această ipoteză, punînd $x_n = \operatorname{tg} \alpha_n$ rezultă $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{\pi}{8}$ de unde $\alpha_{n+8} = \alpha_n + \pi$ pentru orice $n \in N$ și deci $x_{n+8} = x_n$ pentru orice $n \in N$. Așadar șirul este periodic și are perioada principală 8.

7. a) Din condiția $a_n = f(n) - f(n+1)$ cu forma propusă a lui f se obține sistemul $A = 1$, $3A + B = 6$, $4B = 12$. evident, compatibil cu soluția $A = 1$, $B = 3$.

b) Avem $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} [f(k) - f(k+1)] = f(1) - f(n+1) = 1 - \frac{n+5}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$ de unde se desprinde imediat convergența șirului b_n : $\lim_n b_n = 1$. c) $\lim_n b_n^{2^n} = 1$.

8. Se vede fără dificultate că $\frac{1}{9k^2-3k-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right)$ și deci $a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$, care conduce la faptul că $(a_n)_{n\in N}$ este crescător și mărginit, deci convergent, $\lim_n a_n = \frac{1}{3}$.

9. Dacă $0 < \alpha < 1$ atunci $a_n < \alpha^n$ pentru orice $n \in N$ și deci $\lim a_n = 0$. Dacă $\alpha = 1$ atunci $a_n = \frac{1}{2^n}$ și rezultă $\lim a_n = 0$.

Pentru $\alpha > 1$ avem $0 < a_n < \frac{1}{(1+\alpha(1+\alpha^2)\ldots(1+\alpha^{n-1})}$
$\frac{1}{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{n-1}} = \frac{\alpha-1}{\alpha^n-1}$ și deci $\lim a_n = 0$.

10. Pentru n par $x_{n+1} - x_n > 0$, iar pentru n impar $x_{n+1} - x_n < 0$; rezultă că șirul nu este monoton.

Din $x_{k+1} - x_k = \frac{(-1)^k}{2^k}$ pentru $k = 1, 2, \ldots n$ obținem

$x_{n+1} = x_1 + \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ de unde rezultă că șirul $(x_n)_{n \in N}$ are limită : $\lim x_n = x_1 - \frac{1}{3}$.

11. Din exercițiul precedent rezultă că există șiruri cu proprietățile (i), (ii) care sînt convergente. Arătăm că există șiruri care satisfac (i), (ii) care nu sînt convergente.
Să considerăm pentru aceasta un șir $(x_n)_{n \in N}$ astfel că $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n}$ dacă n este impar și $x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{2(n-1)}$ dacă n este par. Efectiv $x_2 - x_1 = 1$, $x_3 - x_2 = \frac{1}{2}$, $x_4 - x_3 = \frac{1}{3}$, $x_5 - x_4 = -\frac{1}{2\cdot 3}$, ... Rezultă $\sum_{k=1}^{2n} (x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pentru orice n adică $x_{2n+1} = x_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. După cum se știe șirul $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n \in N}$ este nemărginit și deci subșirul termenilor de rang impar al șirului este nemărginit și deci nu este convergent, prin urmare însuși șirul $(x_n)_{n \in N}$ nu este convergent. Se poate vedea că $\lim_n x_n = +\infty$.

12. Deoarece cos este funcție pară este suficient să considerăm cazul $r \geqslant 0$. Fie $r = \frac{p}{q}$ cu p și q numere naturale. Dacă $n > q$ atunci $x_n = \cos 2\pi\alpha_n$ unde α_n este un număr natural, deci $x_n = 1$ pentru $n > q$. Șirul este convergent.

13. $f(x) = -1 - x^2$ dacă $x \in (-\infty, 0)$, $f(0) = 0$, $f(x) = 1 + x^2$ dacă $x \in (0, \infty)$. Se vede ușor că f este strict crescătoare pe R și deci este inversabilă. Avem $f^{-1} : (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, \infty) \to R$ și $f^{-1}(x) = -\sqrt{-x-1}$ dacă $x \in (-\infty, -1)$, $f^{-1}(0) = 0$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ dacă $x \in (1, \infty)$. Se constată că f^{-1} este continuă pe mulțimea de definiție, deși f nu este continuă în punctul $x = 0$.

14. Pentru fiecare n se arată prin inducție asupra lui $k \in N$ $f\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(-\frac{k}{n}\right) = f(0)$. Prin urmare pentru orice număr rațional r avem $f(r) = f(0)$. Fie $x \in R$ și fie $(r_n)_{n \in N}$ un șir de numere raționale astfel ca $\lim r_n = x$. Din continuitatea în x a funcției f rezultă $f(x) = \lim\limits_{n} f(r_n) = f(0)$, deci f este constantă pe R. Funcția $f : R \to R$ definită prin $f(x) = -1$ dacă x este rațional și $f(x) = 1$ dacă x este irațional satisface condiția din enunț dar nu este constantă. Dar această funcție nu este continuă.

15. Funcția este continuă pe toată axa reală, dar nu este derivabilă în punctul $x = 0$; în celelalte puncte f este derivabilă.

16. a) $a = 1$, $b = 1$. b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ $f'(x) =$

$$= \frac{2 - x}{2(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 1)^{1/2}},$$

de unde rezultă că f are un maxim în punctul $\left(2, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. Dreapta $y = -1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ iar dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$. Graficul funcției taie asimptota $y = 1$ în punctul $(1, 1)$. Variația funcției este

x	$-\infty$			0		1		2			$+\infty$
f'	+	+	+		+		+	0	—	—	—
f	-1	↑	↑	0	↑	1	↑	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	↓	↓	1

Graficul este redat în fig. 8.24.

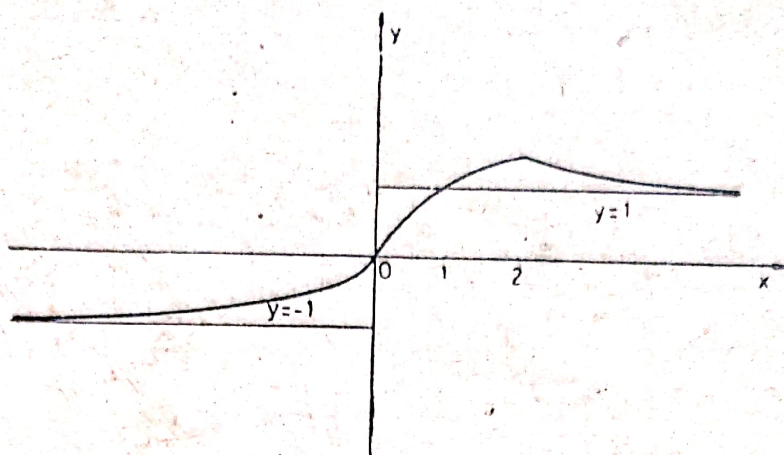


Fig. 8.24.

c) Deoarece $1/f^2(x) > 0$ pe $[1, 2]$ rezultă că aria cerută este

$$\int_1^2 \frac{x^2}{x^2-x+1}\,dx = \int_1^2 \frac{x^2-x+1+x-1}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \int_1^2 \left(1 + \frac{x-1}{x^2-x+1}\right) dx = x\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x-1-1}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\ln\ (x^2-x+1)\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= 1 + \ln\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arc\ tg}\ \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_1^2 = 1 + \ln\sqrt{3} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

17. Să remarcăm la început că deoarece $f(x) > 0$ pentru orice $x \in [0, \infty)$ rezultă $\int_0^x f(t)\,dt > 0$ pentru $x > 0$ și prin urmare φ este definită pentru orice $x > 0$. Deoarece $tf(t) > 0$ pentru orice $t > 0$ rezultă că $\varphi(x) > 0$ pentru orice $x > 0$. Mai departe, este evident că $tf(t) \leqslant xf(t)$ pentru $t \in [0, x]$ și prin urmare $\int_0^x t\,f(t)\,dt \leqslant x \int_0^x f(t)\,dt$ care conduce imediat la $\varphi(x) \leqslant x$ pentru orice $x > 0$. b) După cum se știe funcția $x \to \int_0^x f(t)\,dt$

este derivabilă și are derivata $x \to f(x)$ pentru $x > 0$. Arătăm că funcția $x \to \int_0^x t\,f(t)\,dt$ este derivabilă. Fie $F(x) = \int_0^x t\,f(t)\,dt$;

$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} t\,f(t)\,dt = h \cdot \xi f(\xi)$ unde $x \leq \xi \leq x+h$ (am presupus $h > 0$), conform teoremei de medie și deci $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \xi f(\xi)$; deoarece $\lim_{h\to 0} \xi f(\xi) = x f(x)$ întrucît $h \to 0$ implică $\xi \to x$ iar f este continuă, rezultă că există $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ și este $xf(x)$. La fel arătăm că F are derivata la stînga în x egală cu $x\,f(x)$, conchidem că F este derivabilă în $x > 0$ și $F'(x) = xf(x)$. Cu aceasta rezultă că φ

este derivabilă și $\varphi'(x) = \dfrac{f(x)\left[x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt\right]}{\int_0^x f(t)\,dt}$

c) Cu rezultatele anterioare se vede că $\varphi'(x) > 0$ pentru orice $x > 0$ și deci φ este crescătoare.

18. Cum se știe pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ funcția considerată este monotonă și $f'(x) \geqslant 1$ pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, pe $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ funcția f este de asemeni crescătoare deoarece cos este descrescătoare. Deoarece $f'(x) > 1$ pentru orice $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ rezultă f este strict crescătoare pe întregul domeniu. Deoarece f este strict crescătoare pe $[0, \pi]$ rezultă că f este injectivă. Funcția $f: [0, \pi] \to [0, 2]$ este surjectivă, continuitatea se studiază în $x = \frac{\pi}{2}$ în detaliu cu răspuns afirmativ, în celelalte puncte f fiind evident continuă. În punctul $x = \frac{\pi}{2}$ f nu este derivabilă.

19. Considerînd că dreapta $y = x - \frac{3}{2}$ este asimptotă la ramura de la $+\infty$ se obține $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{3}{4}$ și atunci se observă că dreapta respectivă este asimptotă și la ramura de la $-\infty$.

20. a) Din $f(x) = (kx + \sqrt{1 + k^2x^2})^{\frac{1}{k}}$ se obține imediat

$$f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1 + k^2x^2}}$$ adică (1) de unde

$$f''(x) = \frac{f'(x)\sqrt{1 + k^2x^2} - \frac{k^2x}{\sqrt{1 + k^2x^2}} f(x)}{1 + k^2x^2}$$ care ținînd seama

de (1) devine $(1 + k^2x^2)f''(x) = f(x) - k^2xf'(x)$ adică (2).

b) $k \to 0$ se obține $f(x) = e^x$ și (1,), (2) se verifică imediat.

21. Să presupunem $f''(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in (a, b)$. Să considerăm funcția $H : [0, 1] \to R$ definită prin $H(t) = f((1 - t)a + tb) - (1 - t)f(a) - t\,f(b)$. Atunci $H'(x_t) = f'(x_t)\,(b - a) - [f(b) - f(a)] = (b - a)\,((f'(x_t) - f'(\xi))$ unde $\xi \in (a, b)$ este astfel încît $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$ iar $x_t = (1 - t)a + t\,b$. Deoarece f' este crescătoare rezultă că ecuația $f'(x) = f'(\xi)$ are soluțiile x pe un interval întreg sau se reduc la $\{\xi\}$ (adică sau există un interval I astfel ca $x \in I$ implică $f'(x) = f'(\xi)$ sau ecuația are numai soluția $x = \xi$).

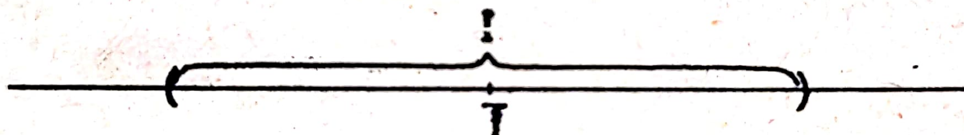


Fig. 8 X

Dacă $I = [\alpha, \beta]$ (sau (α, β)) atunci pentru $x \in (a, \alpha)$ adică pentru $t \in \left(0, \frac{\alpha - a}{b - a}\right)$ rezultă $H'(t) < 0$ iar pentru $t \in \left(\frac{\beta - a}{b - a}, 1\right)$ $H'(t) > 0$, $H'(t) = 0$ pe $[\alpha, \beta]$. Cum $H(0) = H(1) = 0$ deducem $H(t) \leqslant 0$ pe $[0, 1]$ și deci $f((1 - t)a + t\,b) \leqslant (1 - t)f(a) + t\,f(b)$.

Afirmația reciprocă nu este în general adevărată după cum arată exemplul $f : [-1, 1] \to R$ $f(x) = x^2(x^4 - 1)$ pentru care se vede imediat că $f(x) \leqslant 0$ pentru orice $x \in (-1, 1)$ (adică $f(-t + 1 - t) \leqslant t \cdot f(-1) + (1 - t)\,f(1))$ dar pe $\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{15}}, \frac{1}{\sqrt[4]{15}}\right)$ f'' este negativă.

Relația din enunț trebuia înlocuită prin

$$f(tx + (1 - t)y) \leqslant t f(x) + (1 - t)f(y)$$

pentru orice $x, y \in [a, b]$.
Fie, cu această ipoteză, $x_1, x_2 \in (a, b)$ astfel ca $x_1 < x_2$. Pentru $x \in (x_1, x_2)$ luînd $t = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \in (0, 1)$ se obține din condiția impusă

$$f\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2\right) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

care conduce la

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geqslant \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

de unde se obține

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y}$$

de îndată ce $x_1 < x < y < x_2$ și prin urmare $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$; funcția f' este crescătoare și deci f'' este pozitivă.

b) Să admitem că f nu este constantă pe R: există punctele x_1, x_2 în R astfel încît $f(x_1) \neq f(x_2)$. Aplicînd teorema lui Lagrange deducem că există un punct $x_0 \in (x_1, x_2)$ astfel ca $f'(x_0) \neq 0$. Fie funcția $x \to f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \varphi(x)$.

Avem $\varphi(x) - f(x) = f(x_0) - f(x) + f'(x_0)(x - x_0)$, $x \in R$. Aplicînd din nou teorema lui Lagrange avem $\varphi(x) - f(x) = (x - x_0)[f'(x_0) - f'(c_x)]$ unde c_x este situat pe intervalul deschis de capete x_0 și x, care devine $\varphi(x) - f(x) = (x - x_0)(x_0 - c_x) \cdot f''(c_x^1)$ unde c_x^1 este situat pe intervalul de capete x_0 și c_x. Se vede ușor că întotdeauna $(x - x_0)(x_0 - c_x) < 0$ și ipoteza $f''(x) \leqslant 0$ conduce la $\varphi(x) - f(x) \geqslant 0$ pentru orice x. Deoarece pe unul din intervalele $\left(-\infty, x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)$ $\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, +\infty\right)$ φ este strict negativă rezultă că și f este pe acela strict negativă. Contradicția obținută arată că în ipotezele făcute f este constantă.

c) Luînd $f(x) = \sqrt{x}$ $x \in (0, \infty)$ constatăm că concluzia de la b) nu se impune în acest caz. Explicația constă în aceea că pentru orice $x \in (0, \infty)$ $x - \frac{f(x)}{f'(x)} = -x$ nu se află pe intervalul de definiție.

22. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $f(x) = 0$ dacă și numai dacă $x = 0 \cdot f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x}$. Să remarcăm că $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in R$. În adevăr, $f''(x) = e^{-x}(x-2)$ de unde rezultă imediat că f' are un minim în $x = 2$ și cum $f'(2) = 1 - e^{-2} > 0$ rezultă $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in R$. Funcția este strict crescătoare pe R, punctul $(2, 2(1 + e^{-2}))$ este punct de inflexiune, dreapta $y = x$ este asimptotă la ramura de la $+\infty$. Graficul este reprezentat în fig. 7.22. b) Aria $= \int_0^1 x\, e^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$ (calcul prin părți). c) Avem $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{e^{\frac{k}{n}}}$ și deci a_n reprezintă o sumă Riemann asociată funcției $x\, e^{-x}$ pe $[0, 1]$; $\lim a_n = \int_0^1 xe^{-x}\, dx = \frac{e-2}{e}$.

23. Funcția f, $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$ $x > 0$ este derivabilă pe $(0, \infty)$, $f'(x) = 2 \cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$ deci f' este continuă pe $(0, \infty)$ și evident $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Totuși f' nu are limită la $+\infty$ (deoarece funcția cos nu are limită la $+\infty$).

b) Greșeala constă în faptul că se aplică eronat definiția limitei, în fapt în „demonstrație“ s-a arătat că există un șir (ξ) convergent la $+\infty$ astfel că șirul $(f'(\xi))$ este convergent, dar aceasta nu este suficient pentru a spune că f' are limita la $+\infty$, c) În adevăr, dacă $f''(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$ rezultă că f' este crescătoare pe $(0, \infty)$; fie $(x_n)_{n\in N}$ un șir crescător convergent către $+\infty$. Atunci $f'(x_n) < f'(\xi_n) < f'(x_n + 1)$ și $f'(\xi_n) = f(x_n + 1) - f(x_n)$ tinde către zero, evident, în mod crescător. Rezultă că șirul $f'(x_n)_{n\in N}$, fiind crescător și mărginit, este convergent. Conform exercițiului 3, pag. 158 rezultă că există $\lim f'(x)$ și deoarece $\lim f(')(\xi_n) = 0$ rezultă $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

24. Deoarece funcția $x \to [t\, f(x) + g(x)]^2$ este pozitivă pentru orice $t \in R$ rezultă

$t^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2t \int_a^b f(x)\, g(x) dx + \int_a^b g^2(x)\, dx \geq 0$ pentru orice

$t \in R$ de unde inegalitatea cerută, luînd $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{\sin x}$ $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ rezultă

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3/2} x \, dx \leqslant \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx\right)^{1/2}$$

de unde $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3/2} x \, dx \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

25. Dacă f este o funcție descrescătoare pe a, b și $\Delta \equiv a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ este o diviziune a lui $[a, b]$ atunci

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\,(x_{k+1} - x_k).$$

În particular luînd segmentul $[m, n+1]$ și diviziunea $\Delta \equiv m < m+1 < m+2 < \ldots < n < n+1$ deducem că $\int_m^{n+1} f(x)\, dx \leqslant \sum_{r=m}^{n} f(r)$. În cazul general invocat, avem $\sum_{k=0}^{n-1} f(xf)\,(x_{k+1} - x_k) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx$ care aplicată pe $[m-1, n]$ și diviziunii $\Delta \equiv m-1 < m < \ldots < n$ conduce la $\sum_{r=m}^{n} f(r) \leqslant \int_{m-1}^{n} f(x) dx$.

26. a) Dacă $\alpha > 0$ atunci e^{-x^2} este mărginită de 1 pe $[0, \alpha]$ adică $0 < e^{-x^2} \leqslant 1$ pentru orice $x \in [0, \alpha]$, de unde rezultă $0 < \int_0^\alpha e^{-x^2}\, dx \leqslant \int_0^\alpha 1\, dx = \alpha$ și prin urmare $\lim_{\alpha\to 0} \int_0^\alpha e^{-x^2}\, dx$. Dacă $\alpha < 0$, oricum pe $[\alpha, 0]$ e^{-x^2} este mărginită, fiind continuă: $0 < e^{-x^2} \leqslant M$ și deci $0 < \left|\int_0^\alpha e^{-x^2}\, dx\right| < -M\alpha$ de unde $\lim_{\alpha\to 0} \int_0^\alpha e^{-x^2}\, dx = 0$

b) $\int_0^\alpha e^{-x}\, dx = e - e^{-\alpha}$ și deci $\lim_{\alpha\to 0} \int_0^\alpha e^{-x} dx = 0$. Se poate raționa

şi ca la punctul precedent. c) $\int_0^{\alpha} e^{-x^3} x^2 dx = -\frac{1}{3}\int_0^{\alpha^3} e^u du =$ $= \frac{1}{3}(1 - e^{-\alpha^3})$ de unde rezultă $\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha} e^{-x^3} x^2\, dx = \frac{1}{3}$.

d) $\int_0^{\alpha} e^{-x} x^2 dx = -x^2 e^{-x}\Big|_0^{\alpha} + 2\int_0^{\alpha} x e^{-x}\, dx = -\alpha^2 e^{-\alpha} +$

$+2\left[-xe^{-x}\Big|_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^{-x}\, dx\right] = -\alpha^2 e^{-\alpha} - 2\alpha e^{-\alpha} - 2e^{-\alpha} + 2,$

de unde $\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha} e^{-x} x^2\, dx = 2$.

e) Calculăm integrala $\int_0^{\alpha} e^{-x^3} x^5\, dx$ făcînd schimbarea $x^3 = u$ obţinem $\int_0^{\alpha} e^{-x^3} x^5\, dx = +3\int_0^{\alpha^3} e^{-u}\cdot u\, du = 3(-\alpha^3 e^{-\alpha^3} - e^{-\alpha^3} + 1)$ şi deci $\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha} e^{-x^3}\cdot x^5\, dx = 3$.

27. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $f(0) = 0$, $f(-1) = 0 = f(1)$ $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in R$, deci graficul funcţiei este simetric faţă de $(0, 0)$; $f'(x) = \frac{-x^4 - 4x^2 + 1}{(1+x^2)^2}$ ale cărei rădăcini reale sînt $-\sqrt{\sqrt{5}-2}$, $\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

Variaţia funcţiei este redată în tabelul de mai jos

x	$-\infty$		-1		$-\sqrt{\sqrt{5}-2}$		0		$\sqrt{\sqrt{5}-2}$		1		$+\infty$
f'	$-$		$-$		0	$+$	$+$	$+$	0		$-$		$-$
f	$+\infty$	$\downarrow$	0	$\downarrow$	m	$\uparrow$	0	$\uparrow$	M	$\downarrow$	0	$\downarrow$	$-\infty$

$$M = \sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad m = -\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Dreapta $y = -x$ este asimptotă oblică la ramurile infinite. Graficul este redat în figura 8.25.

b) După transformări simple ecuaţia dată capătă forma echivalentă $x^3 - x^2 + \lambda = 0$ a cărei discuţie o realizăm uti-

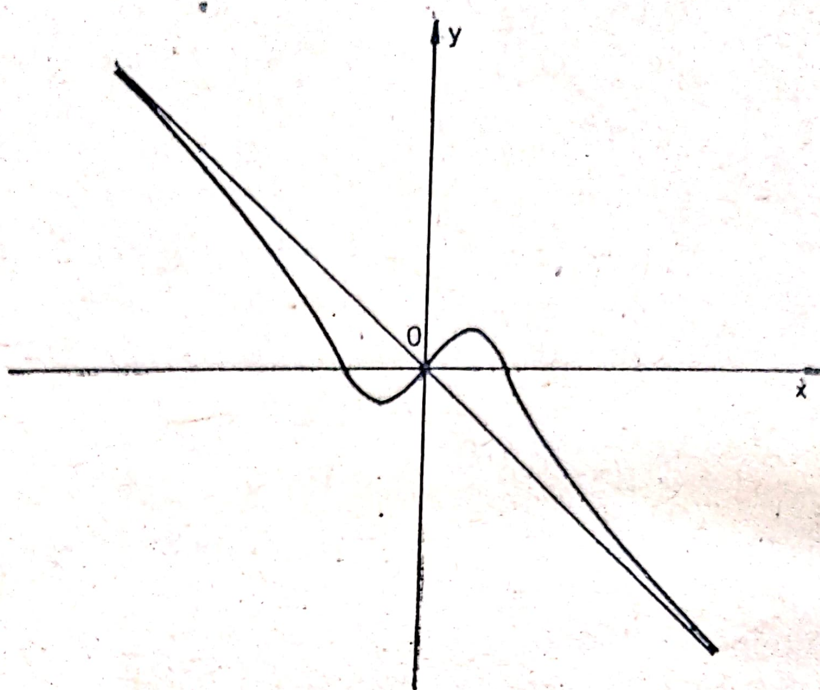


Fig. 8.25.

lizînd şirul lui Rolle. Concluzia : pentru λ (— ∞, 0) ecuaţia are o singură rădăcină reală ; dacă $\lambda = 0$ ecuaţia are rădăcinile 0, 0, 1, pentru $\lambda \in \left(0, \frac{4}{27}\right)$ ecuaţia are trei rădăcini reale diferite dacă $\lambda = \frac{4}{27}$ ecuaţia are rădăcinile $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$; pentru $\lambda \in \left(\frac{4}{27}, \infty\right)$ ecuaţia are o singută rădăcină reală. c) Inegalitatea propusă este

$$\left|\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right| \leqslant 1$$

Punînd $x = \operatorname{tg} \varphi$ rezultă $\frac{2x}{1+x} = \sin 2\varphi$, $\frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos\ 2\varphi$ şi atunci $\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \sin\ 4\varphi$ şi atunci rezultă valabilitatea inegalităţii.

28. a) $f'(x) = \frac{e^{\lambda x}(\lambda x^2 - 2x + \lambda^3)}{(x^2+\lambda^2)^2}$. Dacă $\lambda \in (-\infty, -1)$ atunci $\lambda x^2 - 2x + \lambda^3 < 0$ pentru orice $x \in R$ deci funcţia este strict descrescătoare pe R. Dacă $\lambda \in (-1, 0)$ $f'(x) < 0$ pentru $x \left(-\infty, -\frac{1+\sqrt{1-\lambda^4}}{\lambda}\right) \cup \left(-\frac{1-\sqrt{1-\lambda^4}}{\lambda}, \infty\right)$ şi

deci f este strict descrescătoare pe această mulţime iar pe $\left(-\frac{1+\sqrt{1-\lambda^4}}{\lambda}, \frac{1-\sqrt{1-\lambda^4}}{\lambda}\right)$ f este strict crescătoare. Dacă $\lambda \in (0, 1)$ deducem că f este strict crescătoare pe $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-\lambda^4}}{\lambda}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1-\lambda^4}}{\lambda}, \infty\right)$ şi strict descrescătoare pe $\left(\frac{1-\sqrt{1-\lambda^4}}{\lambda}, \frac{1+\sqrt{1-\lambda^4}}{\lambda}\right)$. Dacă $\lambda \in (1, \infty)$ funcţia f este strict crescătoare pe R. Pentru $\lambda = -1$ f este strict descrescătoare pe R, iar pentru $\lambda = 1$ este strict crescătoare pe R.

b) Deoarece pentru $\lambda \geqslant 1$ f este strict crescătoare pe R rezultă $f(0) < f(x)$ dacă $0 < x$, adică

$$e^{\lambda x} > 1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 \text{ dacă } 0 < x$$

c) $\lim\limits_{\lambda \to 0} \left(\frac{1+x_1x_2}{1-x_1x_2}\right)^{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2} = \lim\limits_{\lambda \to 0} \left(1 + \frac{2\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^{\frac{1}{\lambda^2}} = e^2$

d) Ecuaţia $\mu x^3 - x^2 + \frac{2+3\sqrt{3}}{4}\mu x + \mu - \lambda^2 = 0$ trebuie să aibă rădăcinile 1, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, ceea ce implică $\sin\alpha + \cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = \frac{2+3\sqrt{3}}{4}$. Notînd $\sin\alpha + \cos\alpha = u$ rezultă $2\sin\alpha\cos\alpha = u^2 - 1$ şi deci $2u^2 + 4u - 4 - 3\sqrt{3} = 0$ de unde $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi deci $\alpha = \frac{\pi}{3}$ sau $\alpha = \frac{\pi}{6}$; obţinem $\mu = \frac{2}{3+\sqrt{3}}$, $\lambda = \frac{9-\sqrt{3}}{6}$.

29. a) Evident, pe $(-\infty, -1)$ f este derivabilă şi $f'(t) = -t$; pe $(-1, 1)$ f este derivabilă şi $f'(t) = 1$, iar pe $(1, \infty)$ f este derivabilă şi $f'(t) = t$. Se constată uşor că f este derivabilă în $t = -1$ şi $f'(-1) = -1$, şi că $f'(1) = 1$. Din aceasta rezultă că f' este continuă.

b) Pentru $x \in [0, 1]$ $e^x \in [1, e]$ şi $e^{-x} \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$ şi prin urmare

$$f(e^x) = \frac{e^{2x}+1}{2}, \quad f(e^{-x}) = e^{-x}.$$

Aşadar $\int_0^1 \frac{f(e^{-x})^2}{f(e^x)} dx = \int_0^1 \frac{dx}{e^x(e^{2x}+1)}$. Punînd $e^x = u$ avem

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x(e^{2x}+1)} = \int_1^e \frac{du}{u^2(u^2+1)} = \int_1^e \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^2+1}\right) du =$$

$$= \left(-\frac{1}{u} - \text{arc tg } u\right)\Big|_1^e = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{e} - \text{arc tg } e.$$

30. Fie $x \in (0, 1)$ şi fie $(x_n)_{n \in N}$ un şir crescător din $(0, 1)$ convergent către x, atunci şirul $f(x_n)$ este, prin ipoteză, crescător şi fiind majorat de $f(x)$ rezultă că este convergent şi deci f are limită laterală la stînga în punctul x. La fel, dacă $(y_n)_{n \in N}$ este un şir descrescător către x şirul $f(y_n)$ este descrescător şi deci f are limita laterală la dreapta în punctul x. Să presupunem că limita laterală la dreapta este strict mai mare decît $f(x)$: $\lim\limits_{x \downarrow y} f(y) > f(x)$.

Fie punctele x, y, y_2, y_3 astfel ca $x < y < y_2 < y_3$ atunci

$$\frac{f(y_3) - f(y_2)}{y_3 - y_2} \geqslant \frac{f(y_2) - f(y)}{y_2 - y} \geqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant \frac{\lim\limits_{y \downarrow x} f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{A}{y - x}$$

pentru orice $y \in (x, y_2)$ unde $A = \lim\limits_{y \downarrow x} f(y) - f(x) > 0$. Evident că inegalitatea $\frac{f(y_3) - f(y_2)}{y_3 - y_2} \geqslant \frac{A}{y - x}$ nu poate fi adevărată pentru orice $y \in (x, y_2)$. Contradicţia obţinută arată că $\lim\limits_{y \downarrow x} f(y) = f(x)$. La fel se arată că $\lim\limits_{y \uparrow x} f(y) = f(x)$ şi deci f este continuă în orice punct $x \in (0, 1)$. Din demonstraţie se vede că ipoteza $x < 1$ a intervenit esenţial; de aceea nu este surprinzător că în exemplul dat la b) f nu este continuă în $x = 1$.

31. Să admitem că f este continuă în punctul $x_0 \in R$ şi fie $x \in R$ altfel arbitrar. Există un şir de numere raţionale $(r_n)_{n \in N}$ $r_n \to \frac{x - x_0}{T}$ şi deci $x - r_n T$ converge către x_0. Atunci $f(x - r_n T) \to f(x_0)$ adică $f(x) \to f(x_0)$ şi deci $f(x) = f(x_0)$. În concluzie f este constantă pe R: contradicţia obţinută arată că f nu este continuă în nici un punct.

32. Fie x un punct de continuitate şi fie $(x_n)_{n \in N}$ un şir de numere iraţionale convergente către x; atunci $\lim\limits_n f(x_n) = f(x)$, deci $f(x) = 0$. Fie $(x_n)_{n \in N}$ un şir de numere raţionale convergent

către x; atunci $\lim_n f(x'_n) = f(x)$ adică $\lim (x_n^3 - x_n^2) = f(x) = 0$ și deci $x^3 - x^2 = 0$ de unde $x = 0$, $x = 1$. Așadar f este continuă cel mult în punctele $x = 0$, $x = 1$. Arătăm că în aceste puncte f este continuă. Fie $\varepsilon > 0$; să luăm $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, 1\right\}$ atunci $|f(x) - f(0)| = |x^3 - x^2| = |x^2|\,|x-1| \leqslant |x^2|(|x| + 1) < \delta^2(\delta + 1) < \varepsilon$ pentru orice x rațional cu $|x| \leqslant \delta$. Evident $|f(x) - f(0)| = 0 < \varepsilon$ și pentru orice x irațional cu $|x| < \delta$ (în fapt pentru orice x irațional); în concluzie f este continuă în $x = 0$. Pentru continuitatea în $x = 1$ procedăm în mod analog. Pentru $\varepsilon > 0$ avem $|f(x) - f(0)| = 0 < \varepsilon$ pentru orice x irațional. Pentru x rațional, $|f(x) - f(0)| = |x^3 - x^2| = |x^2|\,|x-1| \leqslant (1 + \delta)^2\,\delta = \delta^3 + 2\delta^2 + \delta$ de îndată ce $|x - 1| < \delta$ deoarece în acest $|x| \leqslant 1 + \delta$. Dacă putem alege $\delta > 0$ astfel ca $\delta^3 + 2\delta^2 + \delta < \varepsilon$ atunci problema este rezolvată. Arătăm că inecuația de mai sus are soluții pozitive. În acest scop să observăm că funcția $\delta \to \delta^3 + 2\delta^2 + \delta - \varepsilon$ este negativă în $\delta = 0$ de unde fiind continuă, rezultă că este negativă pe un interval centrat în 0 $(-\delta_0, \delta_0)$. Altfel, luînd $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$ pentru $|x| \leqslant \delta$ avem $|f(x) - f(0)| \leqslant (1+\delta)^2\delta \leqslant 2^2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$. Evident, funcția nu poate fi derivabilă decît, cel mult, în $x = 0$ și $x = 1$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} x^2 - x & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 0 & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

de unde deducem $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ și deci f este derivabilă în $x = 0$. Apoi $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 0 & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$

de unde rezultă că f nu este derivabilă în $x = 1$.

33. Dacă $h(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, rezultă că pentru orice diviziune $\Delta \equiv a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ și orice alegere a punctelor $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, suma Riemann $S(h; \Delta; \xi)$ este pozitivă și prin urmare $\int_a^b h(x)\,dx \geqslant 0$.

Dacă $f(x) > 0$ pentru orice $x \in [a, b]$ atunci există o constantă pozitivă m astfel ca $0 < m \leqslant f(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$. Rezultă că $S(f; \Delta; \xi) \geqslant m\,(b - a)$ și deci $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

b) Să observăm că, dacă $[\alpha, \beta] \subset a, b$, atunci $\int_\alpha^\beta f \leqslant \int_a^b f$ (deoarece $f(x) \geqslant 0$). Să presupunem că $\int_a^b f = 0$ și că există $x_0 \in [a, b]$

astfel ca $f(x_0) > 0$. Există atunci un interval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ astfel ca $f(x) > 0$ pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$. Dar atunci $\int_\alpha^\beta f > 0$ (conform punctului a) ceea ce conduce la $\int_a^b f > 0$ ceea ce contrazice ipoteza. Condiţia de continuitate este esenţială. În adevăr, funcţia $f: [0, 1] \to R$ definită prin $f(x) = 0$ dacă $x \in [0, 1)$ şi $f(1) = 1$ satisface condiţiile $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in [0, 1]$, $\int_0^1 f = 0$ dar f nu este identic nulă.

34. $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{2k-1}{n}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2}}$ reprezintă suma Riemann asociată funcţiei $x \to \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pe $[0, 1]$ diviziunii $0 < \frac{1}{n} < \ldots < \frac{k-1}{n} < \frac{k}{n} < \ldots < 1$ şi punctelor intermediare $\xi_k = \frac{2k-1}{2n} \in [x_{k-1}, x_k]$.

Rezultă $\lim a_n = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{2} - 1$.

35. a) Fie T o perioadă a funcţiei derivabile periodice $f(x+T) = f(x)$ pentru orice $x \in R$. Atunci

$$f'(x_0+T) = \lim_{u \to x_0+T} \frac{f(u) - f(x_0+T)}{u - (x_0+T)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x+T) - f(x_0+T)}{(x+T) - (x_0+T)} =$$

$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ şi deci f' este periodică avînd o perioadă T. b) Dacă f' este periodică nu rezultă că f este periodică. Contraexemplu: fie $f: R \to R$ definită prin $f(x) = \frac{1}{2} x^2 - nx + \frac{n(n+1)}{2}$ dacă $x \in [n, n+1)$ unde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Se vede imediat că f nu este periodică dar f' este periodică: $f'(x) = x - n$ pentru $x \in [n, n+1)$.

36. Fie $\varepsilon > 0$, altfel arbitrar, şi fie δ astfel ca $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci pentru orice diviziune Δ a cărei normă este inferioară lui δ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare suma Riemann corespunzătoare fiind inferioară unei sume de forma $\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \delta$ este inferioară lui ε.

Conform definiţiei integrabilităţii unei funcţii, rezultă că f este integrabilă şi $\int_0^1 f = 0$.

37. a) Dacă f este o funcţie continuă şi a este astfel că $f(a) \neq 0$ atunci, cum ştim, există un întreg interval deschis centrat în a în care f nu se anulează. De aici rezultă că mulţimea punctelor în care o funcţie continuă nu se anulează este o reuniune de intervale deschise şi prin urmare mulţimea punctelor în care o funcţie continuă se anulează este formată din puncte izolate şi intervale închise (de forma $[\alpha, \beta]$, sau $(-\infty, \alpha] \cap I$ sau $[\beta, +\infty) \cap I$. Să presupunem că f se anulează în punctul x_0 ($f(x_0) = 0$) şi că există x_1 astfel că $f(x_1) \neq 0$. Putem presupune că $x_0 < x_1$, în cazul complementar raţionamentul s-ar desfăşura analog. Fie a cel mai mare număr real astfel că $a \in [x_0, x_1)$ şi $f(a) = 0$. Pe (a, x_1) f este nenulă şi deci pentru $x \in (a, x_1)$ $f'(x)/f(x) = g(x)$ de unde $f(x) = C\cdot e^{g(x)}$ unde $C \neq 0$, deoarece în caz contrar f ar fi nulă pe (a, x_1). Atunci $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = C\cdot e^{g(x)} \neq 0$ ceea ce contrazice continuitatea lui f în punctul a. Deci dacă f este nulă într-un punct ea trebuie să fie identic nulă.

b) Dacă $y_0 = 0$ atunci singura funcţie care satisface $f'(x) = f(x)\cdot g(x)$ pentru orice $x \in R$ şi $f(x_0) = y_0$, este funcţia identic nulă. Dacă $y_0 \neq 0$, atunci f trebuie să satisfacă $f(x) = C\cdot e^{g(x)}$ pentru orice $x \in R$ şi $f(x_0) = y_0$, adică $C \cdot e^{g(x_0)} = y_0$ de unde $f(x) = y_0\, e^{g(x) - g(x_0)}$.

38. Să notăm $F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ arc cos $\frac{\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ şi $F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ arc tg $\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}$. Atunci se vede că $F_1'(x) = F_2'(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}$, deci F_1 şi F_2 sînt primitive ale funcţiei $x \to \frac{1}{1+\cos^2 x}$ pe orice interval care nu conţine punctele $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Şi totuşi, dacă calculăm $\int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ după formula Leibniz-Newton cu F_1 şi F_2 obţinem $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, respectiv 0, ceea ce, desigur, arată că o eroare s-a strecurat. Eroarea constă în aceea că F_2 nu constituie o primitivă a funcţiei $x \to \frac{1}{1+\cos^2 x}$ pe $[0, \pi]$ deoa-

rece F_2 nici nu este definită pe acest întreg interval. Aşadar problema, aşa cum a fost formulată, conţine o afirmaţie falsă. Acest exemplu evidenţiază încă o dată unitatea funcţie-interval sub care trebuie să privim primitiva.

39. Avem

$$\int_0^1 (x-1)^{2p} \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k x^{2p-k} \mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k \cdot \left. \frac{x^{2p-k+1}}{2p-k+1} \right|_0^1 = \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k \frac{1}{2p-k+1} C_{2p}^k$$

iar pe de altă parte $\int_0^1 (x-1)^{2p} \mathrm{d}x = \left. \frac{(x-1)^{2p+1}}{2p+1} \right|_0^1 = \frac{1}{2p+1}$ şi

deci $\sum_{k=0}^{2p} (-1)^k \cdot \frac{C_{2p}^k}{2p-k+1} = \frac{1}{2p+1}$

40. a) Să definim funcţia F pe $[a, b]$ prin $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_x^b g(t)\mathrm{d}t$. Atunci demonstrăm cu uşurinţă că F este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe $[a, b]$ şi $F'(x) = f(x) - g(x)$ pentru $x \in [a, b]$. Dacă $x \in [a, b]$ există şiruri $(r_n)_{n \in N}$ de numere raţionale din $[a, b]$ convergente către x; atunci şirul $F(r_n)$ converge către $F(x)$, deci $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t + \int_x^b g(t)\ \mathrm{d}t = K$ pentru orice $x \in [a, b]$. b) Deoarece $F'(x) = 0$, întrucît F este constantă pe $[a, b]$ rezultă $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$.

41. Fie $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ o funcţie raţională; dacă grad $P >$ grad Q atunci $\lim_n F(n) = +\infty$ sau $-\infty$ după raportul coeficienţilor termenilor de grad maxim în P şi Q; dacă grad $P =$ grad Q atunci $\lim_n F(x) = \frac{a_0}{b_0}$ unde a_0, b_0 sînt coeficienţii termenilor de grad maxim în P, respectiv Q, şi este un număr raţional, iar dacă grad $P <$ grad Q atunci $\lim_n F(n) = 0$. Cum ştim $\lim \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = e$, şi concluzia din enunţ se impune.

BIBLIOGRAFIE

1. D. DRĂGHICESCU, AL. LEONTE, G. VRACIU şi alţii. *Culegere de probleme de matematică*, vol. I, Reprografia Universităţii din Craiova, 1974.

2. D. DRĂGHICESCU, AL. LEONTE, G. VRACIU şi alţii. *Culegere de probleme de matematică*, vol. II, Reprografia Universităţii din Craiova, 1974.

3. V. A. KRECIMAR. *Zadacnik no algebre.* Gostehnizdat, Moskva—Leningrad, 1950.

4. G. V. DOROFIEV, M. K. POTAPOV, N. H. ROZOB. *Posobie no matematike.* Izdatelstvo Nauka, Moskva, 1968.

5. M. DESBOVES. *Questions de Geometrie*, Paris, 1880.

6. S. I. NOVOSELOV. *Curs special de trigonometrie*, Editura tehnică, 1956.

7. F. BRACHET ET J. DUMARQUE. *Pecies de Geometrie classe de séconde et de premiere*, Paris, 1935.

8. P. BOLDESCU. *Culegere de probleme de geometrie analitică*. Reprografia Universităţii din Craiova, 1972.

SUMAR

Prefață V

Introducere IX

PARTEA ÎNTÎIA — ENUNȚURI 1

CAPITOLUL I

Algebra 1

1. Identități algebrice 1
2. Inegalități algebrice 9
3. Ecuații și sisteme de ecuații algebrice 15
4. Inecuații și sisteme de inecuații 27
5. Studiul polinoamelor 32
6. Probleme referitoare la numere. Analiză combinatoare 36
7. Structuri algebrice. Algebră liniară 40
8. Probleme de concurs 45

CAPITOLUL II

Trigonometrie 66

1. Identități trigonometrice 66
2. Inegalități trigonometrice 74
3. Ecuații și sisteme de ecuații trigonometrice 79
4. Inecuații trigonometrice 83
5. Probleme referitoare la triunghiuri și poligoane . . 87
6. Probleme de concurs 92

CAPITOLUL III

Geometria 101

1. Geometrie plană 101
2. Geometrie în spațiu 114
3. Geometrie analitică 118
4. Probleme de concurs 123

CAPITOLUL IV

Analiză matematică 134
1. Funcţii 134
2. Şiruri. 141
3. Limite de funcţii 156
4. Funcţii continue 162
5. Funcţii derivabile 167
6. Probleme de concurs 198

PARTEA A DOUA — SOLUŢII 209

Algebra 209
1. Identităţi algebrice 209
2. Inegalităţi algebrice 217
3. Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii 224
4. Inecuaţii şi sisteme de inecuăţii 243
5. Studiul polinoamelor 250
6. Probleme referitoare la numere. Analiza combinatorie 259
7. Structuri algebrice. Algebra liniară 268
8. Probleme de concurs 275

Trigonometrie 290
1. Identităţi trigonometrice 290
2. Inegalităţi trigonometrice 306
3. Ecuaţii trigonometrice 316
4. Inecuaţii trigonometrice 328
5. Probleme referitoare la triunghiuri şi poligoane . . 340
6. Probleme de concurs 352

Geometrie 362
1. Geometrie plană 362
2. Geometrie în spaţiu 405
3. Geometrie analitică 414
4. Probleme de concurs 434

1. **Analiză matematică** 452
2. Şiruri 452
3. Limite de funcţii 471
4. Funcţii continue 478
5. Funcţii derivabile 483
6. Integrala Reimann 507
7. Probleme de concurs 524

BIBLIOGRAFIE 539

Redactor : VASILE PREDESCU
Tehnoredactor : MARILENA BUTEICĂ

Tiraj : 57 090. Legate : 57 000+90.
Bun de tipar 1 16.IX.1976.
Coli tipar : 34,75.
CRAIOVA, 1976.

Întreprinderea poligrafică „Oltenia"
Str. Mihai Viteazul, nr. 4.
Comanda nr. 158